Indépendance et convergences

1 Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

Définition 1. (Indépendance d'événements)

- Deux événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Des événements $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ sont indépendants si $\forall \{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, N\}$ on a
$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_p}) = P(A_{j_1}) \times \cdots \times P(A_{j_p}).$$

Définition 2. (Indépendance de sous-tribus)

- Des sous-tribus $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ de $\mathcal{A}$ sont mutuellement indépendantes si
$$\forall C_i \in \mathcal{B}_i, \quad P(C_1 \cap \cdots \cap C_n) = P(C_1) \times \cdots \times P(C_n).$$
- Des sous-tribus de $\mathcal{A}$, $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes si toute sous-famille finie l'est.

L'indépendance de tribus se vérifie sur des parties génératrices stables par intersection:

Proposition 3. Soient $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$. Pour chaque i soit $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{B}_i$ avec

- $\Omega \in \mathcal{F}_i,\ \sigma(\mathcal{F}_i) = \mathcal{B}_i$
- $\mathcal{F}_i$ stable par intersection finie.

Si $\forall F_i \in \mathcal{F}_i$ on a $P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) = \prod_{i=1}^n P(F_i)$ alors les $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^n$ sont indépendantes.

Proposition 4. (Regroupement par paquets) Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$, indépendantes. Soit une partition de $I, I = \cup_{j \in J} I_j$ et pour $j \in J$, $\widetilde{\mathcal{B}}_j = \sigma(\mathcal{B}_i, i \in I_j)$. Alors les tribus $(\widetilde{\mathcal{B}}_j)_{j \in J}$ sont indépendantes.

Définition 5. (Indépendance de variables aléatoires)
Pour $i \in I$, soit $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (E_i, \mathcal{E}_i)$ une v.a.. Les $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si les tribus $\big(\sigma(X_i)\big)_{i \in I}$ le sont. En particulier $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants si et seulement si $\forall F_i \in \mathcal{E}_i$,
$$P\Big((X_1 \in F_1) \cap \cdots \cap (X_n \in F_n)\Big) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in F_i).$$

Théorème 6. Des v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants si et seulement si
$$P_{(X_1, \ldots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}.$$

Dans ce cas:

- $\forall f_i$ mesurables positives: $E\big(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\big) = \prod_{i=1}^n Ef_i(X_i)$.
- Si f_i mesurable de signe quelconque, l'égalité précédente est vérifiée si

$$E\Big(\prod_{i=1}^n |f_i(X_i)|\Big) = \prod_{i=1}^n E|f_i(X_i)| < \infty.$$

Proposition 7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.
- $\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \Phi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(\xi_i)$.
- $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},\ P(X_1 \le a_1, \dots, X_n \le a_n) = \prod_{j=1}^n P(X_j \le a_j)$.
- $\forall f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ E\Big(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\Big) = \prod_{i=1}^n Ef_i(X_i)$.

2 Sommes de variables aléatoire indépendantes

Définition 8. Des v.a.r. $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont non corrélées si

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = 0$$

Remarque 9. Des variables indépendantes sont non corrélées.

Proposition 10. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes (non corrélées deux deux suffit), alors

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$

Loi de la somme de v.a. indépendantes:

Définition 11. Soient μ, ν deux probabilités sur $\mathbb{R}^d$. Leur produit de convolution $\mu * \nu$ est défini comme la mesure image de $\mu * \nu$ par $(y, z) \mapsto y + z$. En d'autres termes

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \mu * \nu(A) = \mu \otimes \nu\Big(\big\{(y, z), y + z \in A\big\}\Big)$$

$$\forall \varphi \ge 0,\ \int \varphi(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \int\int \varphi(y + z)\, d\mu(y)\, d\nu(z)$$

Exemple 12. Si $d\mu(x) = p(x)\, dx$ et $d\nu(y) = q(x)\, dx$ alors $\mu * \nu$ admet pour densité par rapport la mesure de Lebesgue la fonction $p * q(x) = \int p(x - z)\, q(z)\, dz$.

Proposition 13. Soient X, Y des v.a. indépendantes valeurs $\mathbb{R}^d$ alors

$$\begin{aligned} P_{X+Y} &= P_X * P_Y, \\ \Phi_{X+Y} &= \Phi_X\, \Phi_Y, \\ L_{X+Y} &= L_X\, L_Y. \end{aligned}$$

Si X, Y sont valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X\, G_Y$.

Exemple 14. (Lois classiques dont les convolées sont trés simples)

- Lois binomiales: pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (0,1)$,

$$\mathcal{B}(n,p) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

On a $\mathcal{B}(n,p) * \mathcal{B}(n',p') = \mathcal{B}(n+n',p)$. En d'autres termes, si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n',p')$ sont indépendantes alors:

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n+n',p).$$

On appelle loi de Bernoulli avec probabilité de succés $p \in [0,1]$, la loi

$$b(p) := \mathcal{B}(1,p) = (1-p)\delta_0 + p\delta_1.$$

- Lois binomiales négatives: $\mathcal{B}(-m,p)$ avec $p \in (0,1)$ et $m \in \mathbb{N}^*$, définies par

$$\mathcal{B}(-m,p) := \sum_{k \geq 0} C_{m+k-1}^{m-1}\, p^m (1-p)^k\, \delta_k.$$

Pour $m,n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{B}(-m,p) * \mathcal{B}(-n,p) = \mathcal{B}\big(-(m+n),p\big)$. On appelle loi géométrique $\mathcal{G}(p) := \mathcal{B}(-1,p) = \sum_{k\geq 0} p(1-p)^k\, \delta_k$.

- Loi de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda) := \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$ avec $\lambda > 0$. Elle vérifie

$$\mathcal{P}(\lambda) * \mathcal{P}(\lambda') = \mathcal{P}(\lambda + \lambda').$$

- Lois $\gamma(t,a)$ avec $t > 0$ et $a > 0$ de densité $\frac{a^t}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-ax} 1_{x>0}$ par rapport la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour $t > 0$, $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$. Si $s,t > 0$,

$$\gamma(t,a) * \gamma(s,a) = \gamma(t+s,a).$$

On appelle loi exponentielle de paramétre $a > 0$ la mesure de probabilité $\mathcal{E}xp(a) := \gamma(1,a)$.

- Lois gaussiennes: $\mathcal{N}(m,\sigma^2), m \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$. Elles sont définies par $\mathcal{N}(m,0) := \delta_m$ et pour $\sigma > 0$

$$\mathcal{N}(m,\sigma^2)(dx) := e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}},\ x \in \mathbb{R}.$$

On a $\mathcal{N}(m,\sigma^2) * \mathcal{N}(m',\sigma'^2) = \mathcal{N}(m+m',\sigma^2+\sigma'^2)$.

3 Suites de tribus ou de v.a. indépendantes

Définition 15. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega,\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned}
\limsup_n A_n &:= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = \{\omega \in \Omega;\ \text{pour une infinité de valeurs de } n,\ \omega \in A_n\},\\
\liminf_n A_n &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{k\geq n} A_k\Big) = \{\omega \in \Omega;\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \omega \in A_n\}.
\end{aligned}$$

Lemme 16 (Borel-Cantelli)**.** Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A_i \in \mathcal{A}$.

i. Si $\sum_{n\geq 0} P(A_n) < \infty$ alors $P(\limsup A_n) = 0$ i.e. p.s. card $\{n, \omega \in A_n\} < \infty$.

ii. Si les A_n sont indépendants et si $\sum P(A_n) = +\infty$ alors $P(\limsup A_n) = 1$ i.e. p.s. A_n a lieu une infinité de fois.

4 Convergence

4.1 Convergence presque sure

Définition 17. Soient $X, (X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ tend vers X *presque sûrement* et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si

$$P\Big(\big\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\big\}\Big) = 1.$$

La suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega, \sup_{k\geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$.

Proposition 18. (Critère de Borel-Cantelli).

i. Si $\forall \epsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} P\big(|X_n - X| \geq \varepsilon\big) < \infty$ alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

ii. Si les X_n sont indépendantes et α est un nombre réel fixé,

$$X_n \xrightarrow{p.s.} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \sum_{n\in\mathbb{N}} P\big(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon\big) < \infty.$$

Proposition 19. Soient $(X_n)_{n\geq 0}, (Y_n)_{n\geq 0}, X, Y$ des v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \overset{p.s.}{\to} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y$ et $X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} XY$.

4.2 Convergence en probabilité

Définition 20. Soient $X, (X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ tend vers X *en probabilité* et on note $X_n \xrightarrow{P} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\big(|X_n - X| \geq \varepsilon\big) = 0.$$

Si (X_n) converge en probabilité vers X, on peut extraire une sous suite qui converge presque surement vers X.

La convergence en probabilité est métrisable :

Proposition 21. Pour tout couple de variables aléatoires (X, Y) $d(X, Y) := \mathbb{E}\left(\min(1, |X - Y|)\right)$.

Soit $(x_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. La suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si et seulement si $\lim_{n\to 0} d(X_n, X) = 0$.

Corollaire 22. Soit $(x_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. La suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si et seulement si de toute suite extraite on peut extraire une sous suite qui converge vers X.

Corollaire 23. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$.

- Si ϕ est continue alors $\phi(X_n) \overset{P}{\to} \phi(X)$,
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \overset{P}{\to} \alpha X + \beta Y$,
- $X_n Y_n \overset{P}{\to} XY$.

5 Convergence dans $L^p, p \geq 1$

Définition 24. Soient X et $(X_n)_{n\geq 0}$ des v.a.r. dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que la suite (X_n) tend vers X au sens L^p et on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\|_p = 0$, c'est-à-dire si

$$\lim_{n\to\infty} E\big(|X_n - X|^p\big) = 0.$$

Proposition 25. Si $q \geq p \geq 1$,

$$X_n \xrightarrow{L^q} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^1} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X.$$

5.1 Loi des grands nombres

Définition 26. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. définies sur un mme espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. A un échantillon de taille n, $\big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$, on associe

- la *moyenne empirique* $\overline{X}_n(\omega) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i(\omega)$,
- la *mesure empirique* $\mu_n^\omega := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)}$.

Théorème 27 (Loi forte des grands nombres)**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r indépendantes et de mme loi. Il ya équivalence entre

i. $E|X_1| < +\infty$,

ii. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.}$ existe.

Dans ce cas la limite est $\mathbb{E}(X_1)$.