Interrogation écrite n° 1 - corrigé

Exercice 1. (7p) *Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux $\sigma-$algèbres d'un ensemble X. On note*

$$\mathcal{I} = \{A_1 \cap A_2 \ | \ A_1 \in \mathcal{A}_1, \ A_2 \in \mathcal{A}_2\},$$

Montrer que

$$\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2).$$

(C'est-à-dire la $\sigma-$algèbre engendrée par $\mathcal{I}$ est la même que la $\sigma-$algèbre engendrée par $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.)

Solution. On doit montrer l'égalité de deux ensembles. On procède par double inclusion.

a) $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$.

Soit $A \in \mathcal{I}$. On peut écrire $A = A_1 \cap A_2$ avec $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Alors $A_1 \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, donc $A_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$. De même $A_2 \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, donc $A_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$. Comme $\mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ est une $\sigma-$algèbre, on en déduit $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, autrement dit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$. Nous venons de montrer que $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$. Comme $\mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ est une $\sigma-$algèbre qui contient $\mathcal{I}$, on en déduit que $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$.

b) $\mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}(\mathcal{I})$.

Soit $A \in \mathcal{A}_1$. On peut écrire $A = A \cap X$ avec $A \in \mathcal{A}_1$ et $X \in \mathcal{A}_2$; donc $A \in \mathcal{I}$. On a ainsi montré que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{I}$.

De même, pour tout $B \in \mathcal{A}_2$ on peut écrire $B = X \cap B$ avec $X \in \mathcal{A}_1$ et $B \in \mathcal{A}_2$, donc $B \in \mathcal{I}$. On en déduit que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{I}$.

Par conséquent nous avons

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{A}(\mathcal{I}).$$

Comme $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ une $\sigma-$algèbre qui contient $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, il résulte que $\mathcal{A}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}(\mathcal{I})$.

Exercice 2. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ une application telle que $\mu(\emptyset) = 0$.*

a) (7p) On suppose que μ est une mesure. Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, on a $\mu\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

b) (6p) On suppose que μ est additive, c'est-à-dire pour tous les ensembles disjoints A, $B \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. De plus, on suppose que pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ (c'est-à-dire $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n), on a $\mu\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Montrer que μ est une mesure.

Solution.

a) Soit $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. On veut montrer que $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Comme $A_n \subset A_{n+1}$ on a $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1}$ pour tout n. Par conséquent, la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ existe. On a $A_n \subset A$ pour tout n, donc $\mu(A_n) \leq \mu(A)$ et on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A). \tag{1}$$

On distingue deux cas:

1. Il existe un indice n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) = \infty$. On a alors $\mu(A_n) = \infty$ pour tout $n \geq n_0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$. Dans ce cas on a évidemment $\mu(A) = \infty$, donc on a égalité dans (1).

2. $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n. On définit $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, etc., $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Alors les ensembles $(B_n)_{n\geq 1}$ sont mesurables, disjoints, $\mu(B_1) = \mu(A_1)$ et $\mu(B_n) =$

$\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$ pour tout $n \geq 2$. De plus, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Comme μ est une mesure, on obtient

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n)$$

$$= \lim_{N\to\infty} [\mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + \cdots + (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}))] = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).$$

b) Nous devons montrer que μ est $\sigma-$additive. Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ une suite d'ensembles mesurables disjoints. On pose $C_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$ et $C = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Par réccurence on montre facilement que $\mu(C_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n)$ (ici on utilise le fait que μ est additive). Comme la suite $(C_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = C$, en utilisant l'hypothèse on obtient

$$\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$