Université Paul Sabatier Année 2018-2019
L3 E (Mathématiques pour l'enseignement) Algèbre 1

Examen du 8 janvier 2019, 13 h 30 – 16 h 30

Exercice 1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble E de tous les couples (A, a) tels que $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $\operatorname{card}(A) = m$ et $a \in A$.

1. Exprimer (en fonction de m et n) $\operatorname{card}(E)$ de deux façons (selon qu'on choisit d'abord A ou d'abord a). Quelle identité en déduit-on ?
2. Redémonter cette identité par un calcul, en distinguant à part le cas $E = \varnothing$.

Exercice 2. Soient $n, k, j, r, s \in \mathbb{N}$, avec $k + j > 0$.

1. Quel est le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k garçons et j filles de sorte que chaque garçon ait au moins r euros et chaque fille au moins s euros ?
2. À quelle condition ce nombre est-il non nul ?

Exercice 3. Soient E un ensemble et

$$\begin{array}{rcl} \chi : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

l'application de $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) dans $\{0,1\}^E$ (l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$) qui à chaque partie A de E associe sa fonction indicatrice χ_A. Montrer, avec des *notations ensemblistes correctes*, que χ est une bijection.

Exercice 4. On rappelle (pour les questions 2 et 3) que pour tous cardinaux α, β, γ :

$$\alpha^\beta \times \alpha^\gamma = \alpha^{(\beta+\gamma)} \quad \text{et} \quad \alpha^{\beta \times \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma.$$

Dans chacune des trois listes suivantes, comparer entre eux les cardinaux des 5 ensembles, par *des inégalités strictes ou des égalités*.

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
3. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 5. Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et a un élément de E.

1. Rappeler les définitions formelles de « a est minimum » et « a est minimal ».
2. Montrer que si a est minimum alors a est l'unique minimal (donc l'unique minimum).
3. Montrer que si l'ordre est total et si a est minimal, alors il est minimum.
4. Montrer (par deux exemples) que E peut avoir plusieurs éléments minimaux, ou aucun.
5. Montrer (par un exemple) que E peut avoir un unique minimal et aucun minimum.

Exercice 6. On rappelle que :

— deux matrices carrées $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sont dites semblables, ce que nous noterons $A\mathcal{S}B$, s'il existe une matrice inversible, $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, telle que $B = P^{-1}AP$;

— $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

On notera $[A]$ la $\mathcal{S}$-classe d'une matrice A, et $\det(A)$ son déterminant.

1. Montrer qu'il existe une unique application $\overline{\det} : \mathrm{M}_2(\mathbb{R})/\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \quad \overline{\det}([A]) = \det(A).$$

2. Cette application est-elle surjective ? injective ?