Université Paul Sabatier Année 2017-2018
L3 E (Mathématiques pour l'enseignement) Algèbre 1

Examen du 18 juin 2018 (2e session), 13 h 30 – 16 h 30

Le barème envisagé, sur 22 pts, n'est pas contractuel.

Exercice 1. [3pts]

1. (1 pt) Donner un exemple simple d'ensemble E, et de choix d'interprétation sur E des prédicats P et Q, tel que les énoncés suivants soient vrais tous les deux :

$$\begin{array}{ll} A: & \exists x \in E \quad \neg P(x) \\ B: & \exists x \in E \quad [P(x) \wedge \neg Q(x)]\,. \end{array}$$

2. (2 pts) Pour tout (E, P, Q) vérifiant A et B, donner (en justifiant !) la valeur de vérité de chacun des deux énoncés :

$$\begin{array}{ll} C: & [\forall x \in E \quad P(x)] \Longrightarrow [\forall x \in E \quad Q(x)] \\ D: & \forall x \in E \quad [P(x) \Longrightarrow Q(x)]\,. \end{array}$$

Solution :

1. $E = \{0, 1\}$, $P(x) \Leftrightarrow x = 0$, et $Q(x) \Leftrightarrow x = 1$ (on peut aussi choisir $Q(x) \Leftrightarrow$ FAUX).
2. $C \Leftrightarrow \big(\neg\,[\forall x \in E \quad P(x)] \vee [\forall x \in E \quad Q(x)]\big) \Leftrightarrow \big(A \vee \dots\big)$ et A est vrai, donc C est vrai.
   $D \Leftrightarrow \forall x \in E \quad [\neg P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow \neg B$ et B est vrai, donc D est faux.

Exercice 2. [8 pts] Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y).$$

1. (1 pt) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. (1 pts) Montrer que chaque $\mathcal{R}$-classe a au plus 3 éléments.
3. (4 pts) Pour préciser le résultat précédent, on pose

$$A_k := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la classe de } x \text{ a exactement } k \text{ éléments}\}.$$

   Déterminer les ensembles A_3, A_2, A_1 et A_0 (il pourra éventuellement être utile de remarquer que $-1\ \mathcal{R}\ 2$).
4. (1 pts) Donner un exemple de partie X de $\mathbb{R}$ contenant exactement un élément de chaque classe.
5. (1 pt) Montrer qu'une telle partie X a la puissance du continu.

Solution :

1. $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par : $f(t) = t^3 - 3t$.
2. La classe d'équivalence d'un réel x est l'ensemble des antécédents par f du réel $f(x)$. Sur $\mathbb{R}$ (comme sur n'importe quel corps commutatif), un polynôme de degré 3 ne peut pas prendre 4 fois la même valeur.
3. $A_0 = \varnothing$ car toute classe d'équivalence est non vide. On peut déterminer A_1, A_2, A_3 de deux façons :

— Méthode analytique : le tableau des variations de f (dont l'élaboration est supposée acquise au niveau L3) :

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
											$+\infty$
										$\nearrow$	
					2				2		
$f(x)$				$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$			
			-2				-2				
		$\nearrow$									
	$-\infty$										

donne :

$$A_3 =]-2, 2[\,, \quad A_2 = \{-2, 2\} \quad \text{et} \quad A_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\,.$$

— Méthode algébrique : déterminons la classe d'un réel a, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $x^3 - a^3 = 3(x-a)$, ou encore : $(x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0$. Mis à part a lui-même, ce sont les réels x solutions de $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$. Par conséquent, $a \in A_3$ si $\Delta := a^2 - 4(a^2 - 3) = 3(4 - a^2)$ est > 0, $a \in A_2$ si $\Delta = 0$, et $a \in A_1$ si $\Delta < 0$. On retrouve bien $A_3 =]-2, 2[$, $A_2 = \{-2, 2\}$ et $A_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

4. D'après l'étude ci-dessus, $X =]-\infty, -2[\cup [1, +\infty[$ convient.
5. L'application $X \to f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ est bijective par construction

---

Exercice 3. [3 pts] Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés et $f : E \to F$ une application.

1. (1,5 pts) Traduire formellement : “f n'est pas strictement croissante”. (Attention : on ne suppose pas que les ordres $\leq$ et $\preceq$ sont totaux.)
2. (0,5 pt) Traduire formellement : “f est croissante”.
3. (1 pt) En déduire (formellement) que si f est croissante et non strictement croissante, alors il existe $a, b \in E$ tels que $a < b$ et f est constante sur $[a, b]$ (c.-à-d. sur $\{x \in E \mid a \leq x \leq b\}$).

Solution :

1. $\exists a, b \in E \quad (a < b \wedge f(a) \not\prec f(b))$.
2. $\forall x, y \in E \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y))$.
3. Comme f n'est pas strictement croissante, il existe $a, b \in E$ tels que $a < b$ et $f(a) \not\prec f(b)$. Comme f est croissante, $f(a) \preceq f(b)$. Donc $f(a) = f(b)$.
   Par croissance de f, on en déduit : $\forall x \in [a, b] \quad f(a) \preceq f(x) \preceq f(b) = f(a)$ donc (par antisymétrie de $\preceq$) $\forall x \in [a, b] \quad f(x) = f(a)$.

Exercice 4. [4 pts] On avance sur la droite réelle, dans le sens positif, en partant de 0. Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n le nombre de façons d'effectuer un trajet de longueur $n - 1$ en faisant uniquement des pas de longueur 1 ou 2. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. (2 pts) Démontrer que T_n est égal au n-ième nombre de Fibonacci F_n, défini par

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

2. (2 pts) Exprimer T_n comme une somme de coefficients binomiaux, en comptant le nombre $S_{n,k}$ de façons d'effectuer un trajet de longueur $n-1$ avec k pas de longueur 2 (et les autres de longueur 1).

Solution :

1. Récurrence d'ordre 2.

   Initialisation : $T_1 = 1$ (il n'y a qu'une façon de faire un trajet de longueur 0 : en restant sur place) et $T_2 = 1$ (on ne peut faire un trajet de longueur 1 que par un pas de longueur 1) donc $T_1 = F_1$ et $T_2 = F_2$.

   Hérédité : pour tout $n \geq 2$, $T_{n+1} = T_n + T_{n-1}$, en partitionnant les trajets de longueur n en ceux finissant par un pas de longueur 1 (donc précédés d'un trajet de longueur $n-1$) et ceux finissant par un pas de longueur 2 (donc précédés d'un trajet de longueur $n-2$). On en déduit que si (hypothèse de récurrence) $T_{n-1} = F_{n-1}$ et $T_n = F_n$, alors $T_{n+1} = F_{n+1}$.

2. Sur un trajet de longueur $n-1$, si l'on fait k pas de longueur 2, on en fait $n-1-2k$ de longueur 1, soit au total $n-1-k$ pas. Le nombre $S_{n,k}$ de façon de choisir, parmi ces $n-1-k$ pas, lesquels seront les k pas de longueur 2, est égal à $\binom{n-1-k}{k}$ (qui n'est non nul que si $0 \leq k \leq n-1-k$, c.-à-d. $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$), et $T_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k}$.

Exercice 5. [4 pts] On considère l'ensemble ordonné $(T, \leq) := (\mathcal{P}(X), \subset)$ (l'ensemble des parties de X, ordonné par l'inclusion), où X est un ensemble arbitraire. Montrer que dans T :

1. (2 pts) toute partie non vide S de T a une borne inférieure ;
2. (2 pts) la partie $S = \varnothing$ a également une borne inférieure.

Solution :

1. Soit $\varnothing \neq S \subset T$. Les minorants de S dans T sont les parties de X incluses dans chaque élément de S c.-à-d. incluses dans leur intersection, donc le plus grand minorant est cette intersection : $\inf(S) = \cap_{A \in S} A$.
2. Les minorants de $\varnothing$ dans T sont les parties de X incluses dans chaque élément de $\varnothing$, c.-à-d. toutes les parties de X, donc le plus grand minorant est X : $\inf(\varnothing) = X$.