Université Paul Sabatier Année 2018-2019

L3 E (Mathématiques pour l'enseignement) Algèbre 1

Examen du 24 octobre 2018, 13 h 30 – 15 h 30

Exercice 1. Les deux premières questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Q} \quad (k^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z})$.
2. Soient $u, v, w \in \mathbb{Z}$ tels que $u^2 + v^2 = w^2$, montrer que uv est pair.
3. Un triangle pythagoricien est un triangle rectangle dont les trois côtés sont entiers. Démontrer par descente infinie (*méthode imposée*) que l'aire d'un tel triangle ne peut pas être un carré parfait (c.-à-d. un carré d'entier). Pour cela :
   — on admettra le lemme suivant : si un carré parfait n^2 est l'aire d'un triangle pythagoricien, alors il existe des entiers $u, v > 0$ tels que $u^2 + v^2$ et $\frac{n^2}{2uv}$ soient des carrés parfaits ;
   — on invoquera en temps utile les questions 1 et 2.

Exercice 2.

Soient E un ensemble quelconque et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On définit, sur l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, une relation $\mathcal{S}$ par :

$$u\mathcal{S}v \iff \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad u_n\mathcal{R}v_n.$$

1. Montrer que si $\mathcal{R}$ est transitive alors $\mathcal{S}$ est transitive.
2. Démontrer la réciproque.

Exercice 3. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2).$$

1. Montrer très rapidement, à l'aide d'une fonction f bien choisie (*méthode imposée*), que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les $\mathcal{R}$-classes sont finies et pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'ensemble
$$A_k := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la classe de } x \text{ a exactement } k \text{ éléments}\}.$$
3. Donner un exemple de partie X de $\mathbb{R}$ contenant exactement un élément de chaque classe.

Exercice 4. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff [x = y \text{ ou } (x \text{ est impair et } x < y)].$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. Le sous-ensemble $S := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ a-t-il, pour cet ordre :
   (a) un plus petit élément ?
   (b) des éléments minimaux ?
   (c) une borne inférieure ?
   (d) des éléments maximaux ?
   (e) une borne supérieure ?
   (f) un plus grand élément ?

   Dans chaque cas, préciser le(s)quel(s), en justifiant.