Justifier vos réponses. Aucun document n'est autorisé durant cette épreuve.

Exercice 1. Soit G un groupe, pour $g \in G$ on considère l'application $\phi_g : G \to G$ définie par

$$\phi_g(x) = gxg^{-1}.$$

a) Montrer que ϕ_g est un automorphisme de G.
b) Soit l'application $\Psi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $\Psi(g) = \phi_g$. Montrer que Ψ est un morphisme de groupes.
c) Montrer que $\ker \Psi = Z(G)$ où $Z(G)$ est le *centre* de G (i.e l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres).
d) Montrer que $Z(G)$ est normal dans G.
e) Montrer que $\mathrm{Im}\Psi$ est normal dans $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 2. Considérons le groupe S_n, $n \geqslant 3$. Soit $\sigma \in Z(S_n)$ et $\tau = (ab)$ une transposition.
a) Montrer que $\sigma(a) = \tau(\sigma(b))$ et $\sigma(b) = \tau(\sigma(a))$.
b) En déduire que $\{a, b\} = \{\sigma(a), \sigma(b)\}$.
c) Montrer que si $c \neq b$ et $c \neq a$, on a encore $\{c, b\} = \{\sigma(c), \sigma(b)\}$.
d) Conclure que $\sigma(b) = b$ et donc que $Z(S_n) = \{id\}$.
e) Quel est le centre d'un groupe abélien ?
f) En déduire que S_n n'est pas abélien.

Exercice 3. Soient $n_1, \ldots, n_k$ des entiers supérieurs à 2 et deux à deux premiers entre eux. Notons $n = \prod_{i=1}^{k} n_i$ et pour $i = 1, \ldots, k$,

$$\hat{n}_i = \frac{n}{n_i}.$$

Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$.
a) Montrer que $\mathrm{pgcd}(n_i, \hat{n}_i) = 1$.
b) En déduire que $\hat{n}_i$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$.
On prend $u_i \in \mathbb{Z}$ tel que $u_i + n_i\mathbb{Z}$ soit l'inverse $\hat{n}_i$ dans $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ et $e_i = u_i\hat{n}_i$.
c) Montrer que $e_i \equiv 1 \mod n_i$ et $e_i \equiv 0 \mod n_j$ si $j \neq i$.
d) Montrer que pour tout $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ est une solution du système :

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod n_1 \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \mod n_k \end{aligned} \tag{1}$$

e) Donner une solution du système

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 3 \mod 5 \\ x &\equiv 2 \mod 7 \end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 4. Soit G un groupe (fini) agissant sur un ensemble fini X.
a) Montrer que

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ et } y \text{ sont dans la même orbite de } G \text{ dans } X$$

est une relation d'équivalence sur X.
On note X/G l'ensemble des orbites et pour $g \in G$, $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.
b) Montrer que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = |X/G|. \tag{3}$$

Indice : combien de fois un élément x de X est-il compté dans la somme ?
c) En déduire que si G opère transitivement sur X et que celui ci a au moins deux éléments alors il existe au moins un élément de G qui ne fixe aucun point de X.
d) Pour $x \in X$, on note $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x dans G. Montrer que G_x est un sous-groupe de G et qu'on a une bijection entre G/G_x et l'orbite de x par G.
e) En déduire que $|G/G_x||G_x| = |G|$.
f) Un groupe d'ordre 35 opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun point. Combien y a-t-il d'orbites ?