Université Paul Sabatier
Licence L3 E (Mathématiques pour l'enseignement)
2018-2019
Algèbre 1

Chap. 1 : Logique et raisonnements : quelques notions.

(avec deux exercices supplémentaires ajoutés le 18/09/2018)

Table des matières

1. Introduction

La logique, comme science du raisonnement, se préoccupe d'établir ce que sont une argumentation ou un raisonnement corrects. Les phrases utilisées dans le langage courant obéissent à des règles de correction syntaxique (de ce point de vue là, l'énoncé « *quinze dans heures cours qu'il avance le calme commence* » n'est pas correct) mais aussi à des règles de sémantique qui doivent permettre de s'entendre sur le sens des énoncés (de ce point de vue là, l'énoncé « *le pommier démonte un vélo à trois pattes dans ma cafetière* » est correct du point de vue syntaxique mais son sens reste énigmatique). On sait d'ailleurs que le langage courant peut foisonner de formulations ambigües.

Afin de minimiser le plus possible les éventuelles ambiguïtés, on commencera par se restreindre à certains types d'énoncés que l'on appellera *assertions*

Exemples 1. *Les énoncés suivants* ***sont*** *des assertions :*

- *Il pleut.*
- *J'ai un chapeau sur la tête.*
- *Il fait bon vivre dans le Sud-Ouest.*
- *5+7=10.*

Les énoncés suivants ***ne sont pas*** *des assertions :*

- *Plus vite que ça !*
- *Es-tu venue en métro ?*
- *Que pensez-vous du montant des retraites ?*

Ça, c'est l'intuition que l'on veut modéliser. Précisons donc d'abord ce qu'est le calcul des propositions, ou logique des propositions. Syntaxiquement, une assertion, ou proposition, est une formule propositionnelle "bien formée" (c.-à-d. syntaxiquement correcte), à partir des propositions élémentaires (des lettres majuscules) appelées les variables propositionnelles (et d'éventuelles constantes comme $\perp$) et de connecteurs (et, ou, non, implique, équivaut). Les variables propositionnelles correspondent intuitivement aux assertions élémentaires ci-dessus. Lorqu'on leur attribue, *indépendamment les unes des autres* des valeurs de vérité, et qu'on calcule celle de la proposition ainsi formée (par les règles usuelles de calcul associées à chaque connecteur, et que l'on peut formuler sous forme de tables de vérité), on obtient la *loi de l'alternative* :

Une assertion est soit vraie, soit fausse.

Il s'agit d'un « ou » exclusif : une assertion ne peut pas être à la fois vraie *et* fausse : c'est le principe de non contradiction : p ou non-p est vrai. En logique classique, on impose de plus qu'elle soit forcément l'un des deux : c'est le principe de tiers-exclu : p et non-p est faux. Une assertion $\mathcal{A}$ aura donc deux *valeurs de vérité* possibles : **V** si elle est vraie, **F** si elle est fausse. On représentera souvent cela sous la forme d'un tableau :

$\mathcal{A}$	
V	
F	

Ce tableau est la *table de vérité* de l'assertion $\mathcal{A}$ et on utilisera ce formalisme pour dresser la *table de vérité* d'une assertion, calculée de proche en proche en fonction des valeurs de vérité de ses variables propositionnelles, en utilisant les tables de vérité ci-dessous qui définissent la *sémantique* des connecteurs.

Remarque 1. *Le point de vue syntaxique permet d'éviter les énoncés autoréférents, comme le célèbre* `paradoxe du menteur` *qui consiste à affirmer :*

`Je mens.`

Sans cette non-autoréférence, on n'aurait pas de tiers exclu.

1.1. **Connecteurs.** Les *connecteurs* sont des opérateurs qui permettent de combiner plusieurs assertions pour en composer une nouvelle. Plus précisément, un connecteur *n-aire* reliera n assertions. On ne s'intéressera qu'aux connecteurs, dits *vérifonctionnels*, pour lesquels il existe une table de vérité qui donne la valeur de vérité de la nouvelle assertion en fonction des valeurs de vérité de chacune des assertions qui la composent.

On va décrire un opérateur unaire (la négation) – on pourrait éventuellement ajouer les deux connecteurs 0-aire (c.-à-d. constantes) VRAI et FAUX – et 4 opérateurs binaires : la conjonction, la disjonction (inclusive), l'implication et l'équivalence. On pourrait se contenter de définir, par exemple à partir de la négation et la conjonction, tous les autres connecteurs, puis d'en déduire leurs tables de vérité. Certaines des équivalences logiques de la liste qu'on verra plus loin, qui sont des méta-théorèmes selon notre approche, seraient alors des définitions des connecteurs supplémentaires.

1.1.1. *La négation.* Appliquée à une assertion $\mathcal{A}$, elle se note $\sim\mathcal{A}$ ou $\neg\mathcal{A}$ et se lit « *non* $\mathcal{A}$ ». Sa table de vérité est :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemples 2.

- *La négation de « J'ai un chapeau sur la tête » est « Je n'ai pas de chapeau sur la tête ».*
- *La négation de « 5+7=10 » est « 5+7 $\neq$ 10 ».*

1.1.2. *La conjonction.* Appliquée à deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, elle se note $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ et se lit « $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ ». Sa table de vérité est :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(De même que pour les autres connecteurs binaires, on peut aussi présenter sa table de vérité comme un tableau à double entrée.)

Exemples 3.

- *L'assertion « Toulouse est en Espagne et $1 + 1 = 2$ » est fausse.*
- *L'assertion « Toulouse est en France et $1 + 1 = 2$ » est vraie.*
- *L'assertion « Toulouse est en France et $1 + 1 = 3$ » est fausse.*

1.1.3. *La disjonction (inclusive ou non exclusive).* Appliquée à deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, elle se note $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ et se lit ≪ $\mathcal{A}$ *ou* $\mathcal{B}$ ≫. Sa table de vérité est :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples 4.

- *L'assertion ≪ Toulouse est en Espagne ou* $1+1=2$ *≫ est vraie.*
- *L'assertion ≪ Toulouse est en France ou* $1+1=3$ *≫ est vraie.*
- *L'assertion ≪ Toulouse est en Espagne ou* $1+1=3$ *≫ est fausse.*

1.1.4. *L'implication.* Appliquée à deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, elle se note $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et se lit ≪ $\mathcal{A}$ *implique (ou entraîne)* $\mathcal{B}$ ≫. Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ peut se dire également ≪ $\mathcal{A}$ *est une condition suffisante pour avoir* $\mathcal{B}$ ≫ ou ≪ $\mathcal{B}$ *est une condition nécessaire pour avoir* $\mathcal{A}$ ≫ ou encore ≪ *Si* $\mathcal{A}$, *alors* $\mathcal{B}$ ≫. On note que :
- *l'assertion* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *est toujours vraie lorsque* $\mathcal{A}$ *est fausse* : ≪ `Ex falso sequitur quolibet` ≫ : à partir du faux s'ensuit n'importe quoi ;
- elle est également toujours vraie lorsque $\mathcal{B}$ est vraie : ≪ `Verum sequitur ad quolibet` ≫ : une assertion vraie est impliqée par n'importe quelle autre assertion.

Remarque 2. *En particulier (c'est important !) la véracité de* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *ne dit a priori rien sur celle de* $\mathcal{A}$ *ou* $\mathcal{B}$. *Elle dit seulement qu'il n'est pas possible d'avoir simultanément* $\mathcal{A}$ *vraie et* $\mathcal{B}$ *fausse. Pour en déduire quelque chose, il faut une information supplémentaire (voir plus loin : modus ponens et modus tollens).*

Exemples 5.

- *L'assertion ≪ Si Toulouse est en France, alors* $1+1=2$ *≫ est vraie.*
- *L'assertion ≪ Si Toulouse est en Espagne, alors* $1+1=2$ *≫ est vraie (pour 2 raisons, au choix).*
- *L'assertion ≪ Si Toulouse est en Espagne, alors* $1+1=3$ *≫ est vraie.*
- *L'assertion ≪ Si Toulouse est en France, alors* $1+1=3$ *≫ est fausse*

1.1.5. *L'équivalence.* Appliquée à deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, elle se note $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et se lit ≪ $\mathcal{A}$ *équivaut à* $\mathcal{B}$ ≫. Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

L'équivalence $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ peut se dire également ≪ $\mathcal{A}$ *est une condition nécessaire et suffisante pour avoir* $\mathcal{B}$ ≫ ou ≪ $\mathcal{B}$ *est une condition nécessaire et suffisante pour avoir* $\mathcal{A}$ ≫ ou encore ≪ $\mathcal{A}$ *si, et seulement si,* $\mathcal{B}$ ≫.

Exemples 6.

- *L'assertion ≪ Toulouse est en France si, et seulement si,* $1+1=2$ *≫ est vraie.*
- *L'assertion ≪ Toulouse est en Espagne* $\Leftrightarrow 1+1=3$ *≫ est vraie.*
- *L'assertion ≪ Toulouse est en France* $\Leftrightarrow 1+1=3$ *≫ est fausse.*
- *L'assertion ≪ Toulouse est en Espagne* $\Leftrightarrow 1+1=2$ *≫ est fausse.*

Remarque 3. *Comme pour l'implication, la vérité ou la fausseté de* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ *ne permet pas de conclure la fonction de vérité de* $\mathcal{A}$ *(ni celle de* $\mathcal{B}$*) : si* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ *est vraie, ces deux assertions sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses ; si* $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ *est fausse, l'une des deux assertions est vraie et l'autre fausse, mais on ne sait pas laquelle est vraie.*

Exercices : 1, 2, 3, 4.

1.2. **Tautologies.**

1.2.1. *Parler pour ne rien dire ?* Dans le langage courant, *tautologie* est synonyme de pléonasme, répétition, truisme, lapalissade, ... Pour la logique, une tautologie, ou proposition valide, est une proposition vraie quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles ; autrement dit, c'est une *assertion toujours vraie*.

Exemples 7.
- $P \vee \neg P$ *(tiers exclu)*
- $\big((P \Rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$ *(**modus ponens**, du latin pono, affirmer)*
- $\big((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$ *(**modus tollens**, du latin tollo, nier)*
- $\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ *(**transitivité de l'implication**)*

Remarque 4.
- *Énoncer une lapalissade semble revenir à parler pour ne rien dire... Il découle cependant de la définition d'une tautologie que tout théorème, c'est-à-dire toute assertion établie en respectant les règles de la logique, est une tautologie !*
- *Toute tautologie en reste une lorsqu'on remplace chaque variable propositionnelle par une assertion plus complexe.*

1.2.2. *Une liste de règles logiques.* Certaines tautologies se présentent sous la forme d' équivalences. Elles seront appelées plus loin *règles logiques*, lorsqu'on les transformera en méta-théorèmes, permettant de transformer – et, éventuellement, simplifier – des expressions ou des formules. En voici quelques-unes :

Double négation : $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

Idempotence : $\begin{array}{l}(P \vee P) \Leftrightarrow P\\(P \wedge P) \Leftrightarrow P\end{array}$

Commutativité : $\begin{array}{l}(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)\\(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)\end{array}$

Associativité : $\begin{array}{l}\big(P \vee (Q \vee R)\big) \Leftrightarrow \big((P \vee Q) \vee R\big)\\\big(P \wedge (Q \wedge R)\big) \Leftrightarrow \big((P \wedge Q) \wedge R\big)\end{array}$

Distributivité : $\begin{array}{l}\big(P \vee (Q \wedge R)\big) \Leftrightarrow \big((P \vee Q) \wedge (P \vee R)\big)\\\big(P \wedge (Q \vee R)\big) \Leftrightarrow \big((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\big)\end{array}$

Lois de De Morgan : $\begin{array}{l}\big(\neg(P \vee Q)\big) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)\\\big(\neg(P \wedge Q)\big) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)\end{array}$

1.2.3. *Équivalence logique.* Les règles logiques correspondent à des tautologies de la forme $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$. L'assertion $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une tautologie, si, et seulement si, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont la même table de vérité ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont tantôt toutes les deux vraies, tantôt toutes les deux fausses, à l'exclusion de toute autre possibilité). On dira alors que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des assertions *logiquement équivalentes* ou qu'il y a une *équivalence logique* entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et l'on écrira alors $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Par exemple, la tautologie $\neg\neg R \Leftrightarrow R$ fournit le méta-théorème $\neg\neg(P \wedge Q) \equiv (P \wedge Q)$.

Les tautologies énoncées ci-dessus fournissent donc autant d'équivalences logiques. Voici d'autres exemples d'équivalences logiques bien utiles lorsqu'on cherche à établir des preuves :

- **Reformulation d'une implication** : $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ (exo 5)
- Loi de **contraposition** : $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (exo 5)
- **Reformulation de la négation d'une implication** : $(\neg(P \Rightarrow Q)) \equiv (P \wedge \neg Q)$
- **Reformulations d'une équivalence** :

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv \big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\big) \equiv \big((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big).$$

Exercices : 5, 7.

1.3. **Contraires ou contradictoires ?** Une proposition toujours fausse est une **contradiction** ou une *antilogie* ou antinomie ; autrement dit, la négation d'une tautologie. Ainsi, l'assertion $P \wedge \neg P$ (la négation de la loi du tiers-exclu) est une contradiction :

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

Deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont dites **contradictoires** lorsque l'une équivaut à la **négation** de l'autre.

Deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui ne peuvent pas être vraies simultanément sont dites **contraires** ou **incompatibles** (elles peuvent cependant être simultanément fausses donc c'est moins informatif que contradictoire).
Exercice : 6

2. Quantificateurs

Un *prédicat* est un énoncé $A(x, y, ...)$ dépendant de variables libres $x, y, ...$ qui devient une assertion chaque fois que l'on remplace *toutes* les variables libres par des valeurs issues d'ensembles $X, Y, ...$ On peut cependant pratiquer certaines déductions sans ce remplacement intégral.

Exemples 8.

- *$P(x)$: « $\sqrt{x} \geqslant 4$ » : Si $X = [0, +\infty[$, $P(x)$ est vraie pour tout $x \geqslant 16$.*
- *Soit le prédicat $A(x, y)$: « $x + 3y \geqslant 1$ ». $A(-1, 1)$ est vraie tandis que $A(1, -1)$ est fausse.*

Le quantificateur universel $\forall$

La notation $\forall$ (« *quel que soit* », symbole A à l'envers, A étant l'initiale du "All" de "for all" – pour tout) permet d'englober tous les éléments d'un ensemble et l'assertion

$$\forall\, x \in X \quad A(x)$$

est une abréviation de

$$\forall x \quad (x \in X \Rightarrow A(x))$$

qui se lit : « *Pour tout x de X, $A(x)$ [est vraie]* ».

Exemples 9.

- *L'assertion « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 1 \geqslant 0$ » est fausse.*
- *Pour toute propriété $\mathcal{P}$, l'assertion « $\forall x \in \varnothing \quad \mathcal{P}(x)$ » est vraie.*

Le quantificateur existentiel $\exists$

La notation $\exists$ (« *il existe* », symbole E à l'envers, E étant l'initiale de Existe) permet d'indiquer l'existence d'un élément dans un ensemble et l'assertion

$$\exists\, x \in X \quad A(x)$$

est une abréviation de

$$\exists x \quad (x \in X \wedge A(x))$$

qui se lit : « *Il existe [au moins] un x dans X tel que $A(x)$ [soit vrai]* ».

Exemples 10.

- *L'assertion « $\exists\, x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x - 1 \geqslant 0$ » est vraie.*
- *L'assertion « $\exists\, x \in \mathbb{R} \quad x^2 < 0$ » est fausse.*
- *Pour toute propriété $\mathcal{P}$, l'assertion « $\exists x \in \varnothing \quad \mathcal{P}(x)$ » est fausse.*

Remarque 5.

- *Remarquer (et comprendre le bien-fondé de) la différence entre le symbole logique ($\Rightarrow$ ou $\wedge$) qui suit $x \in X$ ci-dessus, selon qu'il est précédé de $\forall x$ ou de $\exists x$.*
- *L'existence d'un élément doit toujours être entendue comme l'existence d'*au moins* un élément. La notation $\exists\,!$ est parfois utilisée pour indiquer l'existence d'un unique élément (« il existe un et un seul... »), c'est-à-dire que $\exists! x P(x)$ est une abréviation pour :*

$$[\exists x P(x)] \wedge \forall u \forall v\, [(P(u) \wedge P(v)) \Rightarrow u = v]$$

ou encore (pourquoi est-ce équivalent ?) :

$$\exists x\, [P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow y = x)]$$

(formulation utile dans le raisonnement par analyse-synthèse, section 3.8).

Par exemple,
l'assertion « $\exists\,!\, x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$ » est fausse
et l'assertion « $\exists\,!\, x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 4 \ \wedge\ x < 0)$ » est vraie.

Négation des quantificateurs

Si l'on considère la quantification universelle comme une conjonction infinie et la quantification existentielle comme une disjonction infinie, les règles suivantes, équivalentes l'une à l'autre (pourquoi ?), généralisent celles de De Morgan (et pourraient servir, de même, à définir l'un des deux quantificateurs à partir de l'autre) :

$$\neg\big(\exists\, x \quad B(x)\big) \Leftrightarrow \forall\, x \quad \neg B(x)$$

$$\neg\big(\forall\, x \quad B(x)\big) \Leftrightarrow \exists\, x \quad \neg B(x)$$

Par exemple, la négation de « *Tous les étudiants viennent en cours* » est « *Il y a au moins un étudiant qui ne vient pas en cours* » (ou encore : « *Les étudiants ne viennent pas tous en cours* »).

Ces deux règles, jointes à $(\forall x B(x)) \wedge P \equiv \forall x(B(x) \wedge P)$ et $(\exists x B(x)) \wedge P \equiv \exists x(B(x) \wedge P)$, permettent de réécrire tout énoncé sous forme prénexe, c'est-à-dire avec tous les quantificateurs au début.

On *déduit* aussi de ces deux règles (exercice) leurs analogues pour les “quantificateurs relativisés à un ensemble” (définis ci-dessus comme des “abréviations”) :

$$\neg\big(\exists\, x \in X \quad A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in X \quad \neg A(x)$$

$$\neg\big(\forall\, x \in X \quad A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \in X \quad \neg A(x)$$

Permutation des quantificateurs

On ne change pas la valeur de vérité d'une assertion en permutant deux quantificateurs de même nature :

$$\big(\exists\, x\, \exists\, y\, B(x,y)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\exists\, y\, \exists\, x\, B(x,y)\big)$$

$$\big(\forall\, x\, \forall\, y\, B(x,y)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall\, y\, \forall\, x\, B(x,y)\big)$$

ou en abrégé : $\exists x, y\; B(x,y) \;\Leftrightarrow\; \exists y, x\; B(x,y)$ et $\forall x, y\; B(x,y) \;\Leftrightarrow\; \forall y, x\; B(x,y)$.

On en déduit (exercice) :

$$\big(\exists\, x \in X\; \exists\, y \in Y \quad A(x,y)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\exists\, y \in Y\; \exists\, x \in X \quad A(x,y)\big)$$

$$\big(\forall\, x \in X,\; \forall\, y \in Y,\; A(x,y)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall\, y \in Y,\; \forall\, x \in X,\; A(x,y)\big)$$

Par contre, la valeur de vérité d'une assertion risque d'être modifiée si l'on permute un quantificateur universel avec un quantificateur existentiel. La même distinction se produit dans le langage courant : voir la différence entre « *tout le monde doit de l'argent à quelqu'un* » et « *il y a quelqu'un à qui tout le monde doit de l'argent* »...

Exemples 11. *La non-permutabilié des quantificateurs universel et existentiel est un fait important. Par exemple :*

- $$\mathcal{A} \;:\; \forall x\, \exists y\; (y = x), \qquad \mathcal{B} \;:\; \exists y\, \forall x\; (y = x).$$
  Clairement, l'assertion $\mathcal{A}$ est vraie tandis que l'assertion $\mathcal{B}$ est fausse.
- $\mathcal{A}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ *: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie*
  $$\forall\, n \in \mathbb{N},\; \exists\, M\; u_n = M$$
- $\mathcal{B}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ *: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie*
  $$\exists\, M\; \forall\, n \in \mathbb{N},\; u_n = M$$

L'assertion $\mathcal{A}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est une tautologie (elle dit simplement que tout terme de la suite (u_n)est égal à quelque chose...) tandis que l'assertion $\mathcal{B}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ n'est vraie que si la suite est constante.

Autre illustration « classique », pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- $\mathcal{C}(f)$ *: pour tout $\varepsilon > 0$:*
  $$\forall x_0 \in \mathbb{R}\; \exists \delta > 0\; \Big(\forall x \in \mathbb{R}\; |x - x_0| \leqslant \delta \;\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\Big)$$
- $\mathcal{UC}(f)$ *: pour tout $\varepsilon > 0$:*
  $$\exists \delta > 0\; \forall x_0 \in \mathbb{R}\; \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}\; |x - x_0| \leqslant \delta \;\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

L'assertion $\mathcal{C}(f)$ est vraie si f est continue en tout x_0 de $\mathbb{R}$ tandis que $\mathcal{UC}(f)$ est vraie si f est uniformément *continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercices : 8, 9, 10.

3. Quelques raisonnements classiques

Voici quelques types de démonstrations.

3.1. **Preuve « directe ».**

Exemple 12. *Montrons que l'assertion suivante est vraie :*

Le carré de tout entier impair est congru à 1 modulo 8 (c'est-à-dire de la forme $8k+1$ avec k entier).
Preuve : $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$ *et (cf. ci-dessous) $n(n+1)$ est un multiple de 2.*

3.2. **Preuve par disjonction de cas.** Si l'on ne distingue que deux cas, une preuve par disjonction de cas repose sur l'équivalence logique (cf. exo 5) :

$$P \;\equiv\; \big((Q \Rightarrow P) \wedge (\neg Q \Rightarrow P)\big).$$

On étend facilement cette équivalence logique aux disjonctions en plus de deux cas.

Exemple 13. *Montrons que l'assertion « Le produit de deux entiers consécutifs est pair » est vraie.*

Preuve : *Soit n un entier.*
- *Si n est pair alors $n(n+1)$ aussi, comme multiple de n.*
- *Si n est impair alors $n+1$ est pair donc $n(n+1)$ aussi, comme multiple de $n+1$.*

3.3. **Modus ponens.** L'argument du *modus ponens* utilise la tautologie (cf. §1.2.1) :

$$\big((P \Rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q.$$

Il permet d'établir l'assertion $\mathcal{A}$ en faisant le raisonnement : si $\mathcal{B}$ et « $\mathcal{B}$ implique $\mathcal{A}$ » sont vraies, alors l'assertion $\mathcal{A}$ est vraie. Dans ce raisonnement, $\mathcal{B}$ est une assertion auxiliaire sur laquelle on s'appuie.

Quel que soit son "type", une démonstration d'un fait un tant soit peu élaboré met toujours en jeu, souvent plusieurs fois, cette "brique élémentaire" du raisonnement – parfois implicitement, comme dans la démonstration "par disjonction de cas" précédente.

Exemple 14. *Montrons que l'assertion $\mathcal{A}$: « $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2} \geqslant 1$ » est vraie.*

Preuve : *On introduit l'assertion auxiliaire $\mathcal{B}$: « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ » dont on sait qu'elle est vraie. Et, comme $u \geqslant 0 \Rightarrow e^u \geqslant 1$, on a bien $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2} \geqslant 1)$.*

Remarquons que le modus ponens peut aussi s'écrire (en remplaçant $P \Rightarrow Q$ par sa contraposée) :

$$\big((\neg Q \Rightarrow \neg P) \wedge P\big) \Rightarrow Q.$$

Vu sous cette forme, il devient un *modus tollens* : pour démontrer $\mathcal{A}$, il suffit de démontrer $\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est une assertion auxiliaire précédemment établie.

3.4. **Preuve par l'absurde.** Pour prouver l'assertion $\mathcal{A}$ par un raisonnement par l'absurde, le principe est de supposer $\neg\mathcal{A}$, la négation de $\mathcal{A}$, et de montrer que cela mène à une *contradiction* (cf. section 1.3). On peut donc voir ce raisonnement comme reposant sur les équivalences logiques (qui expriment le tiers exclu) :

$$P \equiv \neg\neg P \equiv (\neg P \Rightarrow \text{FAUX}).$$

- FAUX se présente parfois sous la forme $\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est une proposition auxiliaire. Pour démontrer $\neg A \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B})$, il suffira, d'après l'équivalence logique (à démontrer en exercice)

  $$P \Rightarrow (Q \wedge R) \quad\equiv\quad (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R),$$

  de démontrer les deux implications $\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$. Citons deux cas particuliers où l'une de ces deux implications est acquise :
  - Dans le cas particulier $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, il suffit de démontrer simplement : $\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$, ce qui revient à s'appuyer sur l'équivalence logique (cf. exercice 5) :

    $$P \equiv (\neg P \Rightarrow P).$$

  - Un autre cas particulier est celui où l'on connait la valeur de vérité de $\mathcal{B}$ sans avoir à supposer $\neg\mathcal{A}$. Si par exemple c'est $\mathcal{B}$ qui est vraie, il suffit de démontrer $\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$: on est ramenés à une preuve par modus tollens (cf. section précédente).
- Mais FAUX peut tout aussi bien être une contradiction sans rapport direct avec $\mathcal{A}$, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 15. *Prouvons le théorème d'Euclide sur les nombres premiers : « L'ensemble des nombres premiers est infini »*

Preuve : *On suppose $\neg\mathcal{A}$: « l'ensemble S des entiers premiers est fini » . Il admet alors un majorant $N \in \mathbb{N}$. Posons $M = 1 + N!$. C'est un entier ≥ 2 donc il admet au moins un facteur premier p. Puisque $p \in S$, $p \leq N$ donc $p \mid N! = M - 1$, donc $p \mid M - (M-1) = 1$, ce qui est absurde car $p \geq 2$. L'assertion $\neg A$ mène donc à une contradiction et ceci prouve que $\mathcal{A}$ est vraie.*

Les preuves par l'absurde peuvent presque toujours être évitées au prix d'un petit travail de réflexion (ce qui rend la rédaction toujours plus élégante et parfois plus "constructive" – cf. exo11).

Les quatre derniers types de preuves que nous évoquerons ne s'appliquent chacun qu'à des assertions d'une forme particulière.

3.5. **Par contraposée.** La *contraposée* de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$.

Grâce au tiers exclu, une assertion et sa contraposée sont logiquement équivalentes (cf. §1.2.3), par exemple : “ceux qui parlent ne savent pas” est équivalent à “ceux qui savent ne parlent pas”.

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \;\equiv\; (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

et le principe de la preuve par contraposition est de prouver $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ en prouvant sa contraposée $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ (parfois beaucoup plus simple que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$).

Exemple 16. *Prouvons la proposition : ≪ $(\forall\,\varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \;\Rightarrow\; (a = 0)$ ≫.*

Preuve : *Il s'agit de prouver $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ avec $\mathcal{A}$: ≪ $\forall\varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$ ≫ et $\mathcal{B}$: ≪ $a = 0$ ≫. On va montrer $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$, soit encore :*

$$(a \neq 0) \;\Rightarrow\; \exists\,\varepsilon > 0,\ |a| \geqslant \varepsilon$$

Soit $a \neq 0$. Avec $\varepsilon = |a|$, on a bien trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant \varepsilon$ puisque $|a| \geqslant |a|$ et $|a| > 0$.

3.6. **Preuve par recours à un contre-exemple.** Pour montrer la fausseté d'une assertion de la forme ≪ $\forall x \in X,\ A(x)$ ≫, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c.-à-d. de trouver un x de X pour lequel l'assertion $A(x)$ est fausse.

Exemple 17. *Montrons que l'assertion ≪ Toute fonction (à valeurs réelles) continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable (sur $\mathbb{R}$) ≫ est fausse.*

Preuve : *La fonction “valeur absolue” est continue (sur $\mathbb{R}$) mais n'est pas dérivable (sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire en tout point de $\mathbb{R}$) car elle n'est pas dérivable en 0.*

On montre de même que ≪ *La réciproque de toute bijection continue est continue* ≫ et ≪ *Toute fonction dérivable et de dérivée nulle est constante* ≫ sont fausses (il manque des hypothèses...).

3.7. **Raisonnement par récurrence.** On utilise le raisonnement par récurrence pour montrer une assertion du type, étant donnés une propriété $\mathcal{P}$ et un $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathcal{P}(n)$$

C'est un raisonnement qui peut être très utile lorsqu'on cherche à démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les éléments d'un ensemble énumérable.

Pour simplifier l'exposé, l'appartenance des variables à $\mathbb{N}$ sera implicite et l'on supposera $n_0 = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas puisque $\forall n \geq n_0 \quad \mathcal{P}(n)$ est équivalent à $\forall k \geq 0 \quad \mathcal{Q}(k)$, en définissant $\mathcal{Q}$ par $\mathcal{Q}(k) \equiv \mathcal{P}(n_0 + k)$).

3.7.1. *Récurrence simple.* Le principe de la récurrence simple est de s'appuyer sur la propriété axiomatique de $\mathbb{N}$:

si une partie E de $\mathbb{N}$ contient 0 et est stable par successeur alors $E = \mathbb{N}$

qui, appliqué à $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n)\}$, donne :

$$\Big[\mathcal{P}(0) \wedge \forall n\big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big)\Big] \;\Rightarrow\; \forall n\, \mathcal{P}(n).$$

On procède donc en deux temps :

Initialisation: On démontre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité: On démontre que (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Cela prouve que $\forall n \quad \mathcal{P}(n)$.

Exemple 18. *Prouvons la proposition : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 7 \mid (9^n - 2^n)$.*

Preuve :

`Initialisation:` *Pour $n = 0$, $9^n - 2^n = 1 - 1 = 0$ et 7 divise 0 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*

`Hérédité:` *On fait l'hypothèse (c'est* `l'hypothèse de récurrence`*) que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour un entier positif n fixé. Les égalités :*

$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 9(9^n - 2^n) + (9-2)2^n = 9(9^n - 2^n) + 7 \times 2^n$$

montrent bien que $7 \mid \left(9^{n+1} - 2^{n+1}\right)$ (puisque 7 divise $(9^n - 2^n)$ d'après l'hypothèse de récurrence et 7 divise 7×2^n) ; $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et la preuve par récurrence est terminée.

Remarque 6 (De l'importance de l'initialisation)**.** *Il se peut que la propriété d'hérédité soit vérifiée alors que la propriété à montrer est fausse pour certaines valeurs, voire pour toutes. Par exemple, si l'on suppose que $2k+1$ est divisible par 2, alors $2(k+1)+1$ est aussi divisble par 2 puisque $2(k+1)+1-(2k+1) = 2$. Mais il serait malvenu d'en conclure que tous les entiers impairs sont divisibles par 2...*

3.7.2. *Récurrence d'ordre fixé.* La récurrence d'ordre m fixé est une variante de la récurrence simple. Elle consiste, pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à démontrer par récurrence simple la propriété $\mathcal{Q}(n) \equiv \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n+m-1)$.

Exemple 19. *La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Démontrons, par une récurrence d'ordre 2, que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1-k}{k}$$

(somme finie car les coefficients binomiaux $\binom{n-1-k}{k}$ sont nuls si $k < 0$ ou si $k > n-1-k$: les seuls termes non nuls sont donc pour $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$).

Initialisation: $\sum_k \binom{-1-k}{k} = 0 = \mathcal{F}_0$ *et* $\sum_k \binom{-k}{k} = 1 = \mathcal{F}_1$.

Hérédité: *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = \sum_k \binom{n-1-k}{k}$ et $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$. Alors,*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \sum_k \binom{n-k}{k} + \sum_k \binom{n-1-k}{k}.$$

Puis, pour pouvoir appliquer la formule du triangle de Pascal $\binom{m+1}{p} = \binom{m}{p} + \binom{m}{p-1}$, on pose $p = k$ dans la première somme et $p = k+1$ dans la seconde (dans les deux cas, quand k parcourt $\mathbb{Z}$, p parcourt $\mathbb{Z}$) :

$$F_{n+2} = \sum_p \left(\binom{n-p}{p} + \binom{n-p}{p-1} \right) = \sum_p \binom{n-p+1}{p} = \sum_p \binom{(n+2)-1-p}{p}.$$

3.7.3. *Récurrence forte.* Le principe de la récurrence "forte" est, comme celui de la récurrence d'ordre m, logiquement équivalent à celui de la récurrence simple. La seule différence est que l'hypothèse de récurrence ne porte plus sur nombre fixe d'entiers consécutifs mais sur n et tous ses prédécesseurs : la récurrence simple, appliquée à $\mathcal{Q}(n) \equiv \forall k \leq n\, \mathcal{P}(k)$, devient :

$$\Big[\mathcal{P}(0) \wedge \forall n \Big(\big(\forall k \leq n\, \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \Big) \Big] \;\Rightarrow\; \forall n\, \mathcal{P}(n).$$

Initialisation: On démontre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité: On démontre que (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\big(\forall k \leq n\, \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. L'*hypothèse de récurrence* est donc ici

$$\forall k \leq n\, \mathcal{P}(k) \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n-1) \wedge \mathcal{P}(n).$$

Cela prouve que $\forall n \quad \mathcal{P}(n)$.

Exemple 20. *Prouvons la proposition : « Tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier ».*

Preuve :

`Initialisation:` *L'initialisation se fait ici en $n = 2$ et il est bien exact que 2 admet un diviseur premier puisque 2 est un nombre premier et qu'il est un diviseur de lui-même.*

`Hérédité:` *On fait l'hypothèse (c'est **`l'hypothèse de récurrence forte`**) que, pour un $n \geqslant 2$ fixé, les entiers $2, 3, \ldots, n-1$ et n sont des entiers qui admettent un diviseur premier. Il faut montrer que $n+1$ admet aussi un diviseur premier.*

- *Si $n+1$ est premier, il admet donc lui-même comme diviseur premier.*
- *Si $n+1$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur d tel que $2 \leqslant d \leqslant n$. D'après l'hypothèse de récurrence, d admet un diviseur premier. Mais tout diviseur de d est aussi un diviseur de $n+1$. Par conséquent, $n+1$ admet aussi un diviseur premier.*

3.7.4. *Récurrence bien fondée et descente infinie.* La récurrence bien fondée est une reformulation de la récurrence forte : pour démontrer que $\forall n \mathcal{P}(n)$, on démontre "seulement" que

$$\forall n \Big(\big(\forall k < n\, \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n) \Big),$$

ce qui est une synthèse de :

- (pour $n > 0$) la partie "hérédité" de la récurrence forte, car $\big(\forall k < n\, \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$ est équivalent, si $n > 0$, à $\big(\forall k \leq m\, \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$, en posant $m = n-1$;
- (pour $n = 0$) la partie "initialisation" de la récurrence forte, car l'assertion "$\mathcal{P}(k)$ est vrai pour tout $k < 0$" est du type $\forall k \in \varnothing\ \mathcal{P}(k)$, c'est-à-dire VRAI, donc dire qu'elle implique $\mathcal{P}(0)$ revient à dire que $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

La descente infinie consiste, au lieu de démontrer (pour tout $n \in \mathbb{N}$) cette implication $\big(\forall k < n \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$, à démontrer sa contraposée :

$$\neg \mathcal{P}(n) \Rightarrow \exists k < n\ \neg \mathcal{P}(k).$$

Exemple 21. *Irrationalité de* $\sqrt{2}$

Montrons par descente infinie que tout entier naturel p *vérifie la propriété* $\mathcal{P}(p)$ *suivante :*
il n'existe aucun entier $q > 0$ *tel que* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Supposons donc $\neg P(p)$ *pour un certain* $p \in \mathbb{N}$ *et montrons qu'alors, il existe (dans* $\mathbb{N}$*) au moins un* $k < p$ *tel que* $\mathcal{P}(k)$ *soit fausse. Par hypothèse,* $\mathcal{P}(p)$ *est fausse, c.-à-d.* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *pour un certain entier* $q > 0$*. Alors,* $p^2 = 2q^2$ *donc* p *est pair :* $p = 2r$*, d'où, en simplifiant :* $2r^2 = q^2$*. L'entier naturel* q *est strictement inférieur à* p *(car* $p^2/q^2 > 1$*) et* $\mathcal{P}(q)$ *est fausse (car* $\sqrt{2} = \frac{q}{r}$*).*

Exercice : 17.

3.8. **Par analyse-synthèse.** On a vu que

$$\exists! x P(x) \equiv \exists x \left[P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow y = x)\right].$$

Le raisonnement par analyse-synthèse consiste à prouver d'abord l'unicité puis l'existence, en démontrant d'abord $\forall y\ (P(y) \Rightarrow y = a)$ – par tâtonnements, sans connaître a à l'avance mais en essayant de déduire un maximum de propriétés de y à partir de l'hypothèse $P(y)$ – puis à vérifier $P(a)$.

Exemple 22. *Dans la recherche des extrema locaux et globaux d'une fonction dérivable* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, on calcule d'abord l'ensemble des points où* f' *s'annule puis, parmi ces points, on détermine le(s)quel(s) correspond(ent) effectivement à un extremum.*

Exercices : 11, 12, 13, 14, 18.

4. Représentations graphiques

4.1. **Connecteurs logiques et diagrammes de Venn.** Les diagrammes de Venn permettent de représenter les conditions de véracité des assertions. Si P est une variable propositionnelle, une zone du plan (délimitée par une courbe) représentera P et la zone complémentaire représentera $\neg P$. Si l'on veut veut pouvoir représenter tous les connecteurs binaires, il faut délimiter une autre zone, correspondant à une seconde variable propositionnelle Q, qui rencontre à la fois la zone P et la zone $\neg P$, et dont le complémentaire rencontre également ces deux zones. On colore ensuite ou pas chacune des quatre sous-zones ainsi dessinées, selon le connecteur qu'on veut représenter.

(Le faire pour $P \vee Q$, $P \,\mathrm{XOR}\, Q$, VRAI, $P \wedge Q$, $P \Rightarrow Q$.)

Pour trois variables propositionnelles, on peut faire de même avec trois disques. Pour n plus grand, Venn a trouvé un procédé de construction pour que toutes les 2^n sous-zones soient représentées (pour 4 et 5 on y arrive quand même avec des ellipses et pour 6 avec des triangles).
Exercice : 15.

4.2. **Syllogismes et diagrammes d'Euler-Venn.** Un syllogisme est un raisonnement composé de deux assertions (les deux prémisses, "majeure" et "mineure") et d'une conclusion.

L'exemple type est :

Tous les hommes sont mortels
or Socrate est un homme
donc Socrate est mortel.

Voici deux exemples de syllogismes non valides (quoi qu'on puisse penser de leurs hypothèses et de leur conclusion) :

Tous les hommes sont mortels
or mon chat est mortel
donc mon chat est un homme.

Tous les abricots sont comestibles
or tous les fruits sont comestibles
donc tous les abricots sont des fruits.

Pour les curieux de scolastique, voir Carré logique et Syllogisme, où l'on qualifie chaque proposition, selon qu'elle est universelle ($\forall x \dots$) ou existentielle ($\exists x \dots$) et affirmative ($\dots P(x)$) ou négative ($\dots \neg P(x)$), et où l'on dégage les "modes concluants", selon la forme des deux prémisses. Mais de nombreux cas sont équivalents, à l'aide des transformations :

— intervertir les deux prémisses ;
— appliquer aussi la commutativité de $\wedge$ à l'intérieur d'une prémisse existentielle ;
— remplacer une implication (dans une prémisse universelle) par sa contraposée ;
— renommer une propriété et sa négation en remplaçant $P(x)$ et $\neg P(x)$, respectivement, par $\neg Q(x)$ et $Q(x)$).

On constate alors que les **deux seuls types de syllogismes valides** sont les suivants (les lettres S, P, M correspondent à ce qu'on appelle traditionnellement "sujet", "prédicat" et "moyen terme") :

1) (bArbArA) Si $\forall x(M(x) \Rightarrow P(x))$ et $\forall x(S(x) \Rightarrow M(x))$ alors $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$, composé de trois universelles affirmatives (A) ;
2) (dArII) Si $\forall x(M(x) \Rightarrow P(x))$ et $\exists x(S(x) \wedge M(x))$ alors $\exists x(S(x) \wedge P(x))$, composé d'une universelle affirmative et deux particulières affirmatives (I).

Les diagrammes d'Euler-Venn vont être un codage graphique des syllogismes valides. Puisqu'en logique du premier ordre (donc avec variables) les formules élémentaires ne sont plus – contrairement au calcul propositionnel – de la forme P mais – une seule variable dans ce contexte – $\mathcal{P}(x)$, la zone correspondante d'un diagramme de Venn représentera l'ensemble des élements x vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. On ajoutera un sympole « $\times$ » pour marquer l'existence tandis qu'une surface hachurée marquera la non-existence. Ainsi, à chaque syllogisme valide, on peut faire correspondre un diagramme permettant de s'assurer de sa validité. On peut aussi (diagramme d'Euler) coder une prémisse de la forme $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ en dessinant directement une "zone P" comme incluse dans la "zone Q", au lieu de hachurer la "zone $P \wedge \neg Q$".

Exemple : Le syllogisme sur Socrate est-il à votre avis un darii ou un barbara ? Le représenter graphiquement. Exercice : 16

5. Exercices

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

1) Si $1+1=3$, alors $1+1=2$.
2) Si $1+1=2$, alors $1+1=3$.
3) Il n'est pas vrai que « $1+1=2$, si $1+1=3$ ».
4) Il n'est pas vrai que $1+1=3$, si $1+1=2$.
5) $1+1=3$ si, et seulement si, $3+14=\pi$.
6) $-\sqrt{2} > 0$ si, et seulement si, $(-\sqrt{2})^2 > 0^2$.
7) Un entier naturel est positif si, et seulement si, son carré est positif.

Exercice 2 : 1. On considère les assertions P : « il pleut » et Q : « je suis mouillé ». Donner des énoncés en français qui traduisent les assertions suivantes :

a) $\neg P$ b) $\neg\neg Q$ c) $P \wedge Q$ d) $Q \Rightarrow P$ e) $P \vee \neg P$
f) $\neg P \wedge Q$ g) $\neg(P \wedge Q)$ h) $\neg P \wedge \neg Q$

2. Simplifier les énoncés suivants :

a) Il n'est pas vrai que s'il pleut, il fait froid.
b) Il n'est pas vrai que « les coquelicots sont rouges si, et seulement si, les violettes sont bleues ».
c) Il n'est pas vrai que « les champignons ne poussent pas s'il ne fait pas soleil ».

Exercice 3 : QCM (extrait du CC de novembre 2017)

1) La négation de la proposition "S'il fait beau, je vais à la plage" est :
   (a) S'il fait beau, je ne vais pas à la plage.
   (b) S'il ne fait pas beau, je ne vais pas à la plage.
   (c) S'il ne fait pas beau, je vais à la plage.
   (d) Il fait beau et je ne vais pas à la plage.
2) La proposition "Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas souvent" équivaut à :
   (a) Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas.
   (b) Les personnes qui réfléchissent souvent ne parlent pas trop.
   (c) Les personnes qui réfléchissent souvent parlent trop.
   (d) Les personnes qui ne parlent pas trop réfléchissent souvent.

Exercice 4 : 1. Montrer qu'il y a 4 connecteurs unaires et écrire leurs tables de vérité.

2. a) Ecrire les tables de vérité des trois connecteurs binaires $\veebar$, $|$ et $\|$, définis par :

i) $\veebar$ est le connecteur de *disjonction exclusive* (« OU exclusif ») : $P \veebar Q$ est vraie si l'on a P ou Q mais pas les deux à la fois.

ii) $|$ (barre de Sheffer) est le connecteur d'*incompatibilité* (« NAND » ou « NON ET ») : $P|Q$ signifie que P exclut Q (ou encore que l'on ne peut pas avoir P et Q la fois).

iii) $\|$ (connecteur de Pierce) est le connecteur de *rejet* (« NOR » ou « NON OU ») : $P \parallel Q$ signifie que l'on n'a ni P, ni Q.

b) Montrer que tous les connecteurs logiques usuels peuvent être définis en utilisant uniquement la barre de Sheffer, et que le connecteur de Pierce peut jouer le même rôle.

c) Montrer qu'il y a 16 connecteurs binaires et écrire leurs tables de vérité.

3. Combien y a-t-il de connecteurs ternaires ?

Exercice 5 : 1. Vérifier à l'aide des tables de vérité les équivalences logiques suivantes :

$a)\ \neg\neg P \equiv P,\qquad b)\ P \vee Q \equiv Q \vee P,\qquad c)\ \neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q),$

$d)\ (P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P) \vee Q,\qquad e)\ (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv P \vee (Q \wedge R).$

2. En déduire :

$a)\ (P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P),\qquad b)\ \neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q,$

$c)\ (Q \Rightarrow P) \wedge (\neg Q \Rightarrow P) \equiv P,\qquad d)\ (\neg P \Rightarrow P) \equiv P.$

3. Dans chacun des cas suivants, écrire la table de vérité de l'assertion et trouver une assertion équivalente plus simple :

$a)\ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R),\qquad b)\ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R,\qquad c)\ (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P).$

Exercice 6 : 1. Que peut-on dire de l'assertion P lorsque l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie

a- avec Q qui est fausse ? b- avec Q qui est vraie ?

2. Mêmes questions lorsque l'assertion « $Q \Rightarrow P$ » est vraie

3. Étant donné une assertion P fixée, que peut-on dire de l'assertion Q telle que $P \vee Q$ soit une tautologie et $P \wedge Q$ une contradiction ?

Exercice 7 : On considère trois propositions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et l'on suppose que $\mathcal{A} \Leftrightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ et $\mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{C})$. En déduire les valeurs de vérité de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 8 : (Posé au C.C. de novembre 2017 avec $a = 1$ et $b = k = 2$)

Soient $a, b, k \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $k > 1$. Déterminer les réels x tels que

$$\forall y \in [a, b] \quad (x \geq y \Rightarrow x \geq ky)\,.$$

Exercice 9 : (Posé à la session 2 de juin 2018)

1) Donner un exemple simple d'ensemble E, et de choix d'interprétation sur E des prédicats P et Q, tel que les énoncés suivants soient vrais tous les deux :

$$A: \quad \exists x \in E \quad \neg P(x)$$
$$B: \quad \exists x \in E \quad [P(x) \wedge \neg Q(x)]\,.$$

2) Pour tout (E, P, Q) vérifiant A et B, donner (en justifiant !) la valeur de vérité de chacun des deux énoncés :

$$C: \quad [\forall x \in E \quad P(x)] \Longrightarrow [\forall x \in E \quad Q(x)]$$
$$D: \quad \forall x \in E \quad [P(x) \Longrightarrow Q(x)]\,.$$

Exercice 10 : Dans chaque cas, écrire en langage quantifié la négation de l'assertion (on précisera, quand c'est possible, la valeur de vérité des assertions) :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x > 3 \text{ et } x \leqslant -2)$
2. $\exists\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x > y + z,\ x - y \neq y - z \text{ et } -1 \leqslant z \leqslant 2)$
3. $\forall\, a \in \mathbb{N},\ \exists\, (b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ a = bc$
4. $\forall\, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \exists\, c \in \mathbb{N},\ a = bc$
5. $\exists\, a \in \mathbb{N},\ \forall\, b \in \mathbb{N},\ \exists\, c \in \mathbb{N},\ a = bc$
6. $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \ \Rightarrow\ \exists\, q \in \mathbb{Q},\ a < q < b$
7. La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
8. La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant M$

Exercice 11 : Redémontrer le théorème d'Euclide sur les nombres premiers, en transformant la preuve par l'absurde vue en cours en une preuve par récurrence de : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins n nombres premiers.

Exercice 12 : On considère la suite récurrente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et

$$a_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n + 1$$

Montrer que $a_n = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 : Voici un raisonnement (par récurrence) dont la conclusion est que ≪ *toutes les vaches sont de la même couleur* ≫. Comme le nombre de vaches dans le monde est assurément fini, on va en fait montrer la propriété $\mathcal{P}(n)$ $(n \geqslant 1)$: ≪ *Pour tout entier strictement positif n et pour tout groupe de n vaches, toutes les vaches de ce groupe sont de la même couleur* ≫. Voici cette ≪ preuve ≫ :

Initialisation : Pour $n = 1$, toutes les vaches d'un groupe composé d'une seule vache ont certainement la même couleur puisqu'une vache a la même couleur qu'elle-même...

Hérédité : Hypothèse de récurrence : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé et l'on considère un groupe de $n+1$ vaches. On les range l'une derrière l'autre. Par hypothèse de récurrence, les n premières sont toutes de la même couleur et la dernière est aussi de cette couleur (par exemple en tant que membre des n dernières), ce qui montre bien que les n+1 vaches sont de la même couleur.

Quelle erreur a-t-on commise dans ce raisonnement ?

Exercice 14 : Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}^*$. On suppose que :

— $P(1)$;

— $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (P(n) \Rightarrow P(2n))$;

— $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (P(n+1) \Rightarrow P(n))$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n)$.

Applications :

— Montrer que si une application $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle réel) vérifie la condition suivante pour $n = 2$, alors elle la vérifie pour tout entier $n \geq 2$:

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in I \quad f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

— En déduire l'inégalité arithmético-géométrique (pour tout entier $n \geq 2$) :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

sachant qu'elle est vraie pour $n = 2$.

Exercice 15 : Représenter par des diagrammes de Venn les 16 connecteurs binaires de l'exercice 4.

Exercice 16 : En justifiant la réponse (éventuellement par un diagramme d'Euler-Venn), juger de la validité des syllogismes suivants :

1. Aucune citrouille n'est rouge.
   Tous les fruits sont rouges.
   Donc certains fruits ne sont pas des citrouilles.
2. Seules les citrouilles sont orange.
   Certains fruits ne sont pas orange.
   Donc certains fruits ne sont pas des citrouilles.
3. Seuls les jugements désintéressés sont des jugements libres.
   Tout jugement rationnel est un jugement libre.
   Donc certains jugements rationnels sont désintéressés.
4. Qui est déchu de ses droits civiques n'est pas éligible.
   Certains criminels ne sont pas déchus de leurs droits civiques.
   Donc certains criminels sont éligibles.
5. Seuls les actes explicitement interdits par la loi sont répréhensibles.
   Certains détournements d'argent ne sont pas explicitement interdits par la loi.
   Donc certains détournements d'argent ne sont pas répréhensibles.

Exercice 17 : (Extrait de l'examen de novembre 2017)

1) Montrer que modulo 7, un carré parfait ne peut être congru qu'à 0, 1, 2 ou 4.
2) En déduire que si trois entiers x, y, z vérifient $x^2 + y^2 = 7z^2$, alors ils sont tous les trois divisibles par 7.
3) En raisonnant *par descente infinie* (méthode imposée), en déduire qu'il n'existe aucun triplet d'entiers naturels $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tel que $x^2 + y^2 = 7z^2$.

Exercice 18 : Soient E un ensemble et χ l'application de $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) dans $\{0,1\}^E$ (l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$) qui à chaque partie A de E associe sa fonction indicatrice :

$$\begin{aligned} \chi_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer *par analyse-synthèse* que l'application

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \{0,1\}^E \\ A &\longmapsto \chi_A \end{aligned}$$

est bijective.