Université Paul Sabatier
Licence L3 E (Mathématiques pour l'enseignement)
2018-2019
Algèbre 1

Chap. 2 : Ensembles et relations.

Table des matières

1. Ensembles

1.1. **Approche naïve de la théorie axiomatique.** La notion d'*ensemble* est une notion primitive, comme celle d'*éléments* ou encore celle d'*appartenance*. En théorie naïve des ensembles, on ne cherchera pas à les définir, on indiquera seulement des relations qui les lient et des règles de manipulations qui constituent en quelque sorte leurs modes d'emploi. Un ensemble est un objet mathématique lui même "constitué" d'autres objets mathématiques, appelés éléments. Si x est un élément de l'ensemble X, on dira que x *appartient à l'ensemble* X et on écrira

$$x \in X.$$

Cela veut seulement dire que le langage (du premier ordre) de la théorie des ensembles est uniquement constitué des symboles logiques (y compris le symbole d'égalité) et du prédicat binaire $\in$ (les autres symboles qu'on ajoutera, comme $\varnothing$, $\subset$, etc., ne seront que des abréviations, définies à partir de ces *seuls symboles du langage* ; on se permettra également, dans les exemples, des symboles d'ensembles mathématiques usuels, dont on admettra qu'ils peuvent, eux aussi, être définis à partir des symboles de base). Le fait de noter l'élément x en minuscule et l'ensemble X en majuscule n'est qu'une "béquille psychologique" et n'a aucune signification mathématique puisque dans cette théorie, tous les ensembles sont eux-mêmes des éléments, et inversement.

Les trois premières "règles de manipulation" sont :

Axiome d'extensionnalité : si deux ensembles X et Y ont les mêmes éléments, alors ils sont égaux. (La réciproque n'est pas un axiome de la théorie des ensemble : elle fait déjà partie des règles logiques du calcul du premier ordre avec égalité.)

Axiome de l'ensemble vide : il existe un ensemble particulier, défini par la propriété de ne posséder aucun élément. Il est unique d'après l'axiome d'extensionnalité. Il est appelé l'*ensemble vide* et noté $\varnothing$ ou parfois 0.

Axiome de la paire : étant donnés deux ensembles x et y, il existe un ensemble (unique par extensionnalité), noté $\{x, y\}$, dont les seuls éléments sont x et y. Par extensionnalité, $\{x, y\} = \{y, x\}$. C'est la "paire au sens large" car on n'a pas supposé $x \neq y$. En particulier, on définit ainsi le singleton $\{x, x\}$, désormais noté $\{x\}$.

à partir de ces trois règles, on peut déjà définir beaucoup d'autres ensembles, comme $\{0\} = \{\varnothing\}$ (noté 1) $\{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (noté 2) ou encore, étant donnés deux ensembles x, y déjà définis, la paire $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ (notée (x, y), cf. section 1.3) mais ils ont tous fatalement 1 ou 2 éléments. Pour aller plus loin, on a besoin de l'axiome suivant :

Axiome de la réunion : pour toute paire $A = \{X, Y\}$, il existe un ensemble, noté $X \cup Y$, dont les éléments sont les éléments de X et ceux de Y ; plus généralement, pour tout ensemble A, il existe un ensemble dont les éléments sont *les éléments des éléments* de A. Il est unique par extensionnalité et noté $\cup A$. Il est donc caractérisé par :

$$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists X \in A \quad x \in X.$$

Exemples 1.1. *Si $A = \{X, Y\}$ alors $\cup A = X \cup Y$. Par exemple : $\cup(x, y) = \{x, y\}$, $\cup 2 = 1$ et $\cup 1 = 0$.*
Si $A = \varnothing$ alors $\cup A = \varnothing$.

Cela permet de définir des ensembles finis de taille arbitraire *en extension*, c'est-à-dire en listant leurs éléments entre accolades (dans un ordre quelconque et avec répétitions éventuelles), ce qui généralise la notation de la paire. Par exemple, l'ensemble dont les éléments sont 0, 1 et 2 peut être noté $\{0, 1, 2\}$. (Exercice : montrer qu'il existe, à l'aide des axiomes de la paire et de la réunion.) De même, $\varnothing$ peut être noté $\{\}$.

Un ensemble B peut être donné aussi *en compréhension*, c'est-à-dire par un ensemble A (déjà connu) dans lequel les éléments de B sont choisis et par une "propriété" $P(x)$ qui les sélectionne dans A :

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Exemple : $\{x \in A \mid x \neq x\} = \varnothing$.

C'est le "schéma d'axiomes de compréhension" (constitué d'une infinité d'axiomes : autant que de formules $P(x)$ – à une variable libre x – du langage), qui affirme qu'étant donnée un propriété $P(x)$, il existe, pour tout ensemble A, un ensemble B caractérisé comme ci-dessus.

Exemples 1.2.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < -6\} = \varnothing$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \text{ et } x \text{ est premier}\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$\{x \in \mathbb{C} \mid x^4 - 1 = 0\} = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$$

$$S_4 := \{f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\} \mid f \text{ est bijective}\}$$

$$[1, 2] := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

$$2\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \quad x = 2y\}$$

Remarque 1.3. *Dans une définition en compréhension, il est indispensable de préciser l'ensemble "ambiant" (A ci-dessus). Sinon, aucun axiome ne garantit l'existence de l'ensemble B que l'on cherche à définir. Cette limitation, inhérente au schéma d'axiomes de compréhension, évite (en les rendant informulables dans la théorie) les paradoxes classiques comme le paradoxe de Russell :*

$$\mathcal{C} = \{X \mid X \notin X\}$$

(la collection $\mathcal{C}$ ne peut pas constituer un ensemble, sinon on aurait $\mathcal{C} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} \notin \mathcal{C}$) et son équivalent plus imagé, le paradoxe du barbier : dans un village, le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et aucun autre ; le barbier se rase-t-il lui même ?

Cela dit, même en prenant ce genre de précautions dans le choix d'un système – inévitablement incomplet mais "raisonnablement puissant" – d'axiomes pour une théorie des ensembles, il est impossible de démontrer qu'elle est non-contradictoire (du moins : impossible par les seules méthodes imaginables, parce qu'elles sont "codables" au sein même de cette théorie).

Mentionnons, en parallèle, le schéma d'axiomes de remplacement, un peu plus fort (modulo les autres axiomes) que celui de compréhension et tout aussi utilisé dans la pratique : c'est celui qui permet de définir un ensemble B comme l'"image directe" d'un ensemble A par une "fonction" f (plus exactement : une "relation fonctionnelle", définie par une formule $Q(x, y)$ telle que pour tout x, il existe *au plus un* y pour lequel $Q(x, y)$ est vrai) :

$$B = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Par exemple, l'ensemble $2\mathbb{N}$ défini ci-dessus par compréhension peut aussi être défini par remplacement :

$$2\mathbb{N} = \{2y \mid y \in \mathbb{N}\}.$$

De même, l'ensemble $B = \{x \in A \mid P(x)\}$ peut être défini par remplacement : $B = \{f(x) \mid x \in A\}$, où f est la "fonction" définie par : $y = f(x) \Leftrightarrow [P(x) \wedge (y = x)]$.

Attention, donc, à bien distinguer l'une de l'autre, pour les utiliser à bon escient, les deux notations (très proches) liées à ces deux schémas d'axiomes.

Un autre axiome très utile est l'axiome de l'ensemble des parties, qui permet de définir, à partir d'un ensemble A, l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des sous-ensembles de A (cf. section suivante).

En général, la théorie des ensembles inclut également l'axiome de l'infini et, souvent, l'axiome du choix, mais cela deviendrait trop ésotérique pour ce cours. Empressons-nous plutôt de "faire fonctionner" notre stock minimal d'axiomes, en rappelant et complétant, dans ce cadre, les notions mathématiques élémentaires.

1.2. **Parties d'un ensemble.** Soient X et Y deux ensembles. Si tous les éléments de X sont aussi des éléments de Y, on dira que X est inclus dans Y et on écrira $X \subset Y$:

$$X \subset Y \overset{def}{\iff} \forall x\,(x \in X \Rightarrow x \in Y).$$

D'après l'axiome d'extensionnalité, on a donc :

$$X = Y \iff (X \subset Y \text{ et } Y \subset X)$$

Lorsque X est inclus dans Y, X sera appelé *sous-ensemble* ou *partie* de Y. On note $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties de Y, défini par :

$$A \in \mathcal{P}(Y) \overset{def}{\iff} A \subset Y$$

$\mathcal{P}(Y)$ est unique par extensionnalité et existe d'après l'axiome de l'ensemble des parties. Il est aussi noté 2^Y, par identification avec l'ensemble des applications de Y dans l'ensemble $2 = \{0, 1\}$ (cf. chapitre 1, exemple de raisonnement par analyse-synthèse via un exercice sur la fonction indicatrice).
Exercices : 1, 2.

1.3. **Produit cartésien de deux ensembles.** Partant de deux "objets" x et y (vus ici plutôt comme des éléments que comme des ensembles, mais cette distinction est purement subjective), on sait constituer un nouvel "objet" (x, y), appelé *couple*, de telle manière que (pour tous x, y, x', y') :

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow [(x = x') \wedge (y = y')]$$

(cf. cet exemple – dû à Kuratowski – d'implémentation de cette définition : on définit le couple (x, y) par l'égalité $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$).

En particulier, le *couple* (appelé "ordered pair" en anglais) se différencie de la *paire* par le fait qu'il tient compte de l'ordre d'écriture des éléments qui le composent : $\{x, y\} = \{y, x\}$, tandis que (x, y) n'est égal à (y, x) que si $x = y$.

Pour définir ensuite *en compréhension* le produit cartésien de deux ensembles X et Y de telle façon qu'il soit caractérisé par

$$z \in X \times Y \overset{def}{\iff} \exists x \in X\ \exists y \in Y\ z = (x, y),$$

il suffit de construire, à partir de X et Y, un ensemble suffisamment gros pour contenir (entre autres !) tous les couples (x, y) pour $x \in X$ et $y \in Y$. Par exemple, si l'on choisit le codage de Kuratowski pour les couples, on a $\{x, y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ et $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X \cup Y)$ donc $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$. On peut donc poser :

$$X \times Y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad z = (x, y)\}.$$

Le produit cartésien $X \times X$ se note aussi X^2.

1.4. **Opérations.** On va définir des opérations ensemblistes sur trois ensembles A, B et C. Chacune peut être représentée par un diagramme de Venn.

1.4.1. *Union.* On a déjà défini l'ensemble *union d'un ensemble (fini ou infini) d'ensembles* (par l'axiome de la réunion) et (en invoquant l'axiome de la paire) l'union de deux ensembles A et B. Elle est caractérisée par :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

Propriétés 1.4.

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(l'opération $\cup$ est associative)*
2. $A \cup B = B \cup A$ *(l'opération $\cup$ est commutative)*
3. $A \cup \varnothing = A$ *($\varnothing$ est neutre pour $\cup$)*
4. $A \cup A = A$ *(tout ensemble est idempotent pour $\cup$)*
5. $A \subset A \cup B$
6. $A \cup B \subset C \Leftrightarrow (A \subset C \wedge B \subset C)$

1.4.2. *Intersection.* Contrairement à la réunion, l'intersection d'un ensemble d'ensembles ne nécessite pas d'axiome spécifique, mais n'est définie que si cet ensemble d'ensembles est non vide : si $X_0 \in E$, on définit simplement en compréhension :

$$\cap E := \{x \in X_0 \mid \forall X \in E \quad x \in X\}$$

et l'intersection est alors caractérisée par :

$$x \in \cap E \Leftrightarrow \forall X \in E \quad x \in X.$$

L'intersection d'une paire $\{A, B\}$ est notée $A \cap B$. Elle est donc caractérisée par :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

Propriétés 1.5.
1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativité)*
2. $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité)*
3. $A \cap \varnothing = \varnothing$ *($\varnothing$ est absorbant pour $\cap$)*
4. $A \cap A = A$ *(idempotence)*
5. $A \cap B \subset A$
6. $A \subset B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B \wedge A \subset C)$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)*
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)*

1.4.3. *Différence.* La différence de deux ensembles A et B (non nécessairement inclus l'un dans l'autre) est définie en compréhension par :

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

On évite la notation $A - B$ car elle peut prêter à confusion avec la différence algébrique. Par exemple : $[0,1] \setminus [0,1] = \varnothing$ tandis que $[0,1] - [0,1] := \{x - y \mid x, y \in [0,1]\} = [-1,1]$.

Propriétés 1.6.
1. $A \setminus B \subset A$
2. $A \setminus \varnothing = A$
3. $A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$

1.4.4. *Complémentaire.* C'est la différence symétrique dans une situation particulière : si A est un sous-ensemble d'un ensemble X, son complémentaire dans X est :

$$\complement_X A := X \setminus A.$$

Quand X est fixé, on peut l'omettre dans la notation, en écrivant $\complement A$, ou simplement $\overline{A}$.

Propriétés 1.7.
1. $\overline{\overline{A}} = A$ *(l'application $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $A \mapsto \overline{A}$ est une involution)*
2. $\overline{\varnothing} = X$ *et* $\overline{X} = \varnothing$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(lois de De Morgan)*
4. $A \cup \overline{A} = X$ *et* $A \cap \overline{A} = \varnothing$
5. *Si* $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \setminus B = A \cap \complement_X B$

1.4.5. *Différence symétrique.* La différence symétrique de deux ensembles A et B peut être définie comme union de deux différences :

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Propriétés 1.8.
1. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ *(associativité)*
2. $A \Delta B = B \Delta A$ *(commutativité)*
3. $A \Delta \varnothing = A$ *($\varnothing$ est neutre pour Δ)*
4. $A \Delta A = \varnothing$ *(tout ensemble est son propre symétrique pour Δ)*
5. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Remarque : les propriétés 1 à 4 expriment que pour tout ensemble X, $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ (l'ensemble des parties de X, muni de la différence symétrique) est un groupe abélien. En particulier, le neutre et les symétriques sont uniques et l'on a simplification. Plus précisément : dans un monoïde, c'est-à-dire un ensemble G muni d'une opération $* : G \times G \to G$ associative (non nécessairement commutative) pour laquelle il existe un élément neutre e ($\forall g \in G \quad g * e = e * g = g$), le neutre est unique. Si de plus ce monoïde est un groupe, c'est-à-dire si tout élément g de G possède un élément symétrique, noté g^{-1} ($g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$), alors le monoïde est simplifiable, c.-à-d. pour tous $g, h, k \in G$, si $g * h = g * k$ ou $h * g = k * g$ alors $h = k$. En particulier, si $g * h = g$ alors $h = e$ (ce qui est une propriété plus forte que l'unicité du neutre), et pour tout $g \in G$, le symétrique g^{-1} est unique.
Exercices : 3, 4, 5, 6, 7.

1.5. **Partitions.**

Définition 1.9. *Une partition d'un ensemble X est un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de X :*

1) *non vides :* $\forall A \in \mathcal{F} \quad A \neq \varnothing$;
2) *disjointes deux à deux :* $\forall A, B \in \mathcal{F} \quad (A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing)$;
3) *dont la réunion est X tout entier :* $\forall x \in X \quad \exists A \in \mathcal{F} \quad x \in A$.

Exemples 1.10.

- *La paire $\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\}$ est une partition de $\mathbb{N}$ avec $2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des entiers naturels pairs et $2\mathbb{N}+1 := \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des entiers naturels impairs.*
- *L'ensemble à trois éléments $\{3\mathbb{N}, 3\mathbb{N}+1, 3\mathbb{N}+2\}$ est une partition de $\mathbb{N}$ avec $3\mathbb{N}+i := \{3n+i \mid n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des entiers congrus à i modulo 3.*
- *Si $\mathcal{C}((0,0),r)$ désigne le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r (réduit au singeton $\{(0,0)\}$ si $r=0$), l'ensemble infini $\{\mathcal{C}((0,0),r) \mid r \in \mathbb{R}_+\}$ est une partition du plan $\mathbb{R}^2$.*

2. Relations binaires

2.1. **Relations et graphes.** Une relation binaire $\mathcal{R}$ est la donnée de deux ensembles X (l'ensemble de départ), Y (l'ensemble d'arrivée) et d'un sous-ensemble Γ de $X \times Y$ (appelé *graphe* de la relation). Une relation binaire est donc la donnée du triplet $\mathcal{R} = (X, Y, \Gamma)$; dans la suite, l'écriture « $x\mathcal{R}y$ » signifiera que $(x,y) \in \Gamma$.

Lorsque $X = Y$, la relation sera noté (X, Γ) ou $(X, \mathcal{R})$ et l'on parlera de la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble X. Et, bien souvent, on la notera simplement $\mathcal{R}$.

Définition 2.1. *Une relation (X, Γ) est dite :*
- *réflexive si $x\mathcal{R}x$ pour tout x de X ;*
- *symétrique si $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$, pour tous les x, y de X ;*
- *antisymétrique si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ impliquent $x = y$ pour tous les x, y de X ;*
- *transitive si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ impliquent $z\mathcal{R}z$, pour tous les x, y, z de X.*

Exemples 2.2.

- *Pour tous les ensembles X et Y, on a la relation vide $(X, Y, \varnothing)$ (aucun x de X n'est en relation avec un y de Y) et la relation grossière $(X, Y, X \times Y)$ (tout x de X est en relation avec tout y de Y).*
- *Soit X un ensemble non vide. Dans $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, la relation $A\mathcal{R}B \iff A \cap B = \varnothing$ n'est ni réflexive, ni transitive mais elle est symétrique.*
- *Dans $\mathbb{Z}$, la relation $x\mathcal{R}y \iff xy \neq 0$ est symétrique, transitive mais non réflexive.*
- *Dans $\mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y \iff x \mid y$ (x divise y) est réflexive, transitive mais non symétrique (ni anti-symétrique).*

Diagramme sagital d'une relation On peut représenter une relation graphiquement par un diagramme sagittal (un point pour chaque élément de X et de Y et une flèche de x à y pour chaque couple $(x,y) \in \Gamma$) qui, si $Y = X$, est un graphe orienté (les points sont appelés les *sommets* du graphe et les flèches sont les *arêtes* du graphe).
Exercices : 8, 9

2.2. **Relations d'équivalence.**

Définition 2.3. *Une relation $\mathcal{R} = (X, \Gamma)$ est une* `relation d'équivalence` *si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Définition 2.4. *Si $(X, \mathcal{R})$ est une relation d'équivalence et si $x \in X$, l'ensemble des éléments qui sont en relation avec x est appelé* `classe d'équivalence modulo` *$\mathcal{R}$ de x et elle sera notée $\overline{x}^{\mathcal{R}}$ ou, plus simplement, $\overline{x}$, s'il n'y a pas de risque de confusion.*

Proposition 2.5. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble X et $x, y \in X$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $y\mathcal{R}x$

(ii) $y \in \overline{x}$

(iii) $\overline{y} = \overline{x}$

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ par définition de $\overline{x}$.
$(i) \Rightarrow (iii)$: par transitivité, $y\mathcal{R}x \Rightarrow \overline{y} \subset \overline{x}$ donc par symétrie, $y\mathcal{R}x \Rightarrow \overline{y} = \overline{x}$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: par réflexivité, $y \in \overline{y}$ donc $\overline{y} = \overline{x} \Rightarrow y \in \overline{x}$. □

Théorème 2.6. *Un ensemble $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble E est une partition de E* `si et seulement si` *$\mathcal{F}$ est l'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E. De plus, cette relation $\mathcal{R}$ est alors unique.*

Preuve. 1. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors, $\forall x \in E \quad x \in \overline{x}$ donc les classes sont non vides et leur union est E. De plus, d'après la Proposition 2.5, si $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$ alors $\overline{x} = \overline{z} = \overline{y}$ donc par contraposée, si $\overline{x} \neq \overline{y}$ alors $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$, c.-à-d. que deux classes distinctes sont disjointes.
On a ainsi vérifié que l'ensemble $\{\overline{x} \mid x \in E\}$ forme une partion de E.

2. Soit $\mathcal{F}$ une partition de E. Tout élément de E appartient donc à un unique membre de cette partition, $s(x) \in \mathcal{F}$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe une unique relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E dont $\mathcal{F}$ est l'ensemble des classes. D'après la proposition 2.5, une telle relation doit vérifier : $y\mathcal{R}x \Leftrightarrow s(x) = s(y)$. La relation $\mathcal{R}$ sur E ainsi définie est clairement une relation d'équivalence et $\mathcal{F}$ est l'ensemble de ses classes. □

Exemples 2.7. *Le lecteur vérifiera que les relations qui suivent sont bien des relations d'équivalence.*

1. *Sur un ensemle quelconque* X, *l'égalité :* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.
   Pour tout x *de* X, $\overline{x} = \{x\}$.
2. *Sur* $X = \mathbb{Z}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *fixé :* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = kn$.
   Pour tout x *de* X, $\overline{x} = \{x + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} =: x + k\mathbb{Z}$ *; c'est la* classe de x modulo n. *Si* $y\mathcal{R}x$, *on dit que* y *est congru à* x *modulo* n *et on le note* $y \equiv x \bmod n$ *ou* $y \equiv x \ [n]$. *(Pour* $n = 0$, *on retrouve l'exemple précédent.)*
3. *Sur* $X = \mathbb{R}$ *:* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k\pi$.
   Pour tout $x \in X$, $\overline{x} = \{x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} =: x + 2\pi\mathbb{Z}$ *; c'est la* classe de x modulo 2π *et si* $y\mathcal{R}x$, *on dit que* y *est congru à* x *modulo* 2π *et on le note* $y \equiv x \bmod 2\pi$ *ou* $y \equiv x \ [2\pi]$.
4. *Sur l'ensemble* $\mathcal{D}$ *des droites du plan :* $d\mathcal{R}d' \Leftrightarrow d$ *et* d' *sont parallèles.*
   Pour tout $d \in \mathcal{D}$, $\overline{d}$ *est l'ensemble des droites du plan parallèles à* d.
5. *Sur* $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *:* $(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$.
   Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\overline{(m, n)} = \{(m + k, n + k) \mid k \in \mathbb{Z},\ m + k \geq 0,\ n + k \geq 0\}$.
6. *Sur* $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *:* $(p, q)\mathcal{R}(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.
   Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\overline{(p, q)} = \mathbb{Z}^*(p, q) := \{(kp, kq) \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$.
7. *Sur l'ensemble* X *des suites de Cauchy de rationnels :* $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \lim(u_n - v_n) = 0$.
8. *Sur* $\mathbb{R}^k \setminus \{O\}$ *(où* $O = (0, 0, \ldots, 0)$ *est l'origine) :* $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \quad u = \lambda v$.
   Pour tout $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{O\}$, $\overline{u} = \mathbb{R}^* u := \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.
9. *Sur la* K*-algèbre* $\mathrm{M}_n(K)$ *des matrices à* n *lignes et* n *colonnes et à coefficients dans un corps* K, *matrices semblables :* $M\mathcal{R}N \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(K) \quad N = P^{-1}MP$.
10. *Sur* $\mathrm{M}_n(K)$ *encore, matrices équivalentes :* $M\mathcal{R}N \Leftrightarrow \exists P, Q \in \mathrm{GL}_n(K) \quad N = P^{-1}MQ$.
11. *Sur* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ *et en notant* $O(2)$ *le groupe des isométries du plan :* $X\mathbb{R}Y \Longleftrightarrow \exists\varphi \in O(2) \quad Y = \varphi(X)$.
    Pour toute partie X *de* $\mathbb{R}^2$, $\overline{X} = \{\varphi(X) \mid \varphi \in O(2)\}$.
12. *Sur l'ensemble* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^*}$ *des applications de* $\mathbb{R}^*$ *dans* $\mathbb{R}$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$ *fixé :*

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0.$$

Pour toute application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $\overline{f} = \{g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \mid \exists\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^*}\ g(x) = f(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ et } \lim_0 \varepsilon = 0\}$.
Si $f\mathcal{R}g$, *on écrit aussi* $f - g \in o(x^n)$.

Définitions 2.8. *Si* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences modulo* $\mathcal{R}$ *est appelé* `ensemble quotient` *de* X *par la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *et il est noté* $X/\mathcal{R}$ *:*

$$X/\mathcal{R} \ := \ \{\overline{x} \mid x \in X\}.$$

L'application

$$\begin{array}{cccc} p & : & X & \to & X/\mathcal{R} \\ & & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

est appelée `projection canonique` *de* X *sur* $X/\mathcal{R}$.

Le théorème suivant, extrêmement pratique, sera redémontré et généralisé au prochain chapitre.

Théorème 2.9. *Une relation* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* X *est une relation d'équivalence si et seulement si elle peut être décrite de la façon suivante :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

pour une certaine application f *définie sur* X *(et à valeurs dans un autre ensemble,* Y*).*

De plus, dans ce cas, on a une bijection naturelle entre $X/\mathcal{R}$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.

Preuve. "Si" est immédiat.
Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et construisons *une* (parmi tant d'autres) application f vérifiant la "description". Il suffit de poser $Y = X/\mathcal{R}$ et $\forall x \in X \quad f(x) = \overline{x}$.
Enfin, soit f *une* application définie sur X et vérifiant la "description". Définissons une application F sur $\mathrm{Im}(f)$ par $F(y) = f^{-1}(\{y\})$ (l'ensemble de tous les antécédents de y par f). Alors, F est une bijection de $\mathrm{Im}(f)$ dans $X/\mathcal{R}$.
Exercices : 10, 11, 12.

2.3. **Relations d'ordre.**

Définition 2.10. *Une relation $\mathcal{R}$ est une* **`relation d'ordre`** *si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est souvent notée $\preceq_{\mathcal{R}}$ ou, plus simplement, $\preceq$. S'il s'agit d'une relation d'ordre sur un ensemble X, on parlera de l'*ensemble ordonné* $(X, \preceq)$. Si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, on dit que x et y sont *comparables*. Une relation d'ordre $(X, \preceq)$ est une *relation d'ordre total* sur X si pour tout couple $(x, y) \in X \times X$, x et y sont comparables.

Si $(X, \preceq)$ est un ensemble ordonné, la notation $x \prec y$ signifiera que l'on a $x \preceq y$ et $x \neq y$.

Exemples 2.11.
- *La relation $\leq$ usuelle est une relation d'ordre total sur $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.*
- *Pour tout ensemble X, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ est un ensemble ordonné (mais dès que X a au moins deux éléments, l'inclusion n'est pas une relation d'ordre total).*
- *En notant $\mid$ la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ (c.-à-d. $x \mid y$ s'il existe un entier naturel k tel que $y = kx$), $(\mathbb{N}, \mid)$ est un ensemble ordonné (mais la relation de divisibilité n'est pas une relation d'ordre total).*
- *Par contre, sur $\mathbb{Z}$, la divisibilité n'est pas un ordre mais seulement un préordre.*

Définitions 2.12. *Soit $(X, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset X$, $A \neq \varnothing$.*

1.i) Un élément x de X est un **`majorant`** *de A si $a \preceq x$ pour tout a de A. On notera $\mathrm{Major}(A)$ l'ensemble des majorants de A.*

Si $\mathrm{Major}(A) \neq \varnothing$, on dit que A est **`majoré`**.

1.ii) Un élément x de X est un **`minorant`** *de A si $x \preceq a$ pour tout a de A. On notera $\mathrm{Minor}(A)$ l'ensemble des minorants de A.*

Si $\mathrm{Minor}(A) \neq \varnothing$, on dit que A est **`minoré`**.

2.i) Le **`plus grand élément`** *(ou maximum) de A est un majorant de A qui appartient à A. Si un tel élément existe alors il est unique et on le note $\max(A)$.*

2.ii) Le **`plus petit élément`** *(ou minimum) de A est un minorant de A qui appartient à A. Si un tel élément existe alors il est unique et on le note $\min(A)$.*

2.i) La **`borne supérieure`** *de A est $\sup(A) := \min(\mathrm{Major}(A))$ (si cet élément existe).*

2.i) La **`borne inférieure`** *de A est $\inf(A) := \max(\mathrm{Minor}(A))$ (si cet élément existe).*

3.i) Un élément x de X est dit **`maximal`** *s'il n'a pas de majorant strict, c.-à-d. si*

$$\forall y \in X (x \preceq y \Rightarrow y = x).$$

3.ii) Un élément x de X est dit **`minimal`** *s'il n'a pas de minorant strict, c.-à-d. si*

$$\forall y \in X (y \preceq x \Rightarrow y = x).$$

Remarques 2.13.

- $\max(A)$ *existe si et seulement si* $\sup(A)$ *existe et appartient à A (dans ce cas,* $\max(A) = \sup(A)$*). De même,* $\min(A)$ *existe si et seulement si* $\inf(A)$ *existe et appartient à A (dans ce cas,* $\min(A) = \inf(A)$*).*
- *Pour un ordre total, les notions d'élément maximal et maximum sont confondues (de même pour minimal et minimum).*
- *Pour un ordre quelconque, si X a un élément maximum alors il a un unique élément maximal (égal à ce maximum). De même, si X a un minimum alors il a un unique élément minimal. Les réciproques sont fausses (exercice : construire un contre-exemple).*
- *La "propriété de la borne supérieure" est vérifiée dans $(\mathbb{R}, \leq)$ (toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure), mais pas dans $(\mathbb{Q}, \leq)$.*

Exemples 2.14.

- *L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, \mid)$ admet 1 comme plus petit élément (et n'a pas de plus grand élément).*
- *L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \mid)$ admet 1 comme plus petit élément et 0 comme plus grand élément (car tout entier divise 0).*
- *L'ensemble ordonné $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mid)$ n'a ni plus petit élément, ni plus grand élément et tout nombre premier est minimal.*
- *Pour tout ensemble X, l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subset)$ admet X comme plus grand élément et $\varnothing$ pour plus petit élément.*
- *Pour tout ensemble X, l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}, \subset)$ n'admet ni plus grand élément, ni plus petit élément. Ses éléments minimaux sont les singletons ($\{x\}$ avec $x \in X$) et ses éléments maximaux sont leurs complémentaires.*

- *Soit* $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ *muni de la relation d'ordre usuelle dans* $\mathbb{R}$. $\max(X) = \sup(X) = 1$, $\inf(X) = 0$ *et* $\min(X)$ *n'existe pas.*
- *Soit* $X = [0, 1[$ *muni de la relation d'ordre usuelle dans* $\mathbb{R}$. $\min(X) = \inf(X) = 0$, $\sup(X) = 1$ *et* $\max(X)$ *n'existe pas.*

Définition 2.15. *L'ensemble ordonné* $(X, \preceq)$ *est dit* ***bien ordonné*** *si toute partie non vide de* X *admet un plus petit élément, autrement dit :* $\forall A \subset X(A \neq \varnothing \Rightarrow \min(A)$ *existe).*

Remarque 2.16. *Clairement, tout bon ordre est un ordre total et la réciproque est fausse.*

Théorème 2.17. *L'ensemble ordonné* $(\mathbb{N}, \leq)$ *est bien ordonné.*

PREUVE. Montrons par récurrence bien fondée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$: tout ensemble d'entiers naturels qui contient n admet un plus petit élément. Supposons $\forall k < n \quad P(k)$ et soit $n \in A \subset \mathbb{N}$. Si $n = \min(A)$ alors $P(n)$ est vraie. Sinon, A contient un entier naturel $k < n$ et par hypothèse de récurrence, $P(k)$ est vraie, donc A a un plus petit élément. □

Remarque 2.18. *Les bons ordres sont ceux auxquels s'étend le principe de récurrence bien fondée (vu pour* $\mathbb{N}$ *au chapitre 1).*

Corollaire 2.19. *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément.*

PREUVE. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ et soit $n \in \mathrm{Major}(A)$. D'après le théorème 2.17, l'ensemble $\{n - k \mid k \in A\}$ a un plus petit élément $n - k_0$ et alors, $k_0 = \max(A)$. □

Exercices : 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

2.4. **Opérations sur les relations.** Les applications peuvent être considérées comme des relations particulières, et les notions usuelles qui leurs sont attachées s'étendent aux relations quelconques.

2.4.1. *Lien avec les applications.*

Définition 2.20. *Soit* (X, Y, Γ) *une relation.*

- *Le* ***domaine de définition*** *de la relation est l'ensemble des* $x \in X$ *pour lesquels il existe* ***au moins un*** $y \in Y$ *tel que* $(x, y) \in \Gamma$.
- *L'****image*** *de la relation est l'ensemble des* $y \in Y$ *pour lesquels il existe au moins un* $x \in X$ *tel que* $(x, y) \in \Gamma$.
- *La relation est dite* ***fonctionnelle*** *si pour tout* $x \in X$, *il existe* ***au plus un*** $y \in Y$ *tel que* $(x, y) \in \Gamma$.
- *La relation est une* ***application*** *(ou* ***fonction****)* f *si elle est fonctionnelle et si son domaine de définition est* X, *c'est-à-dire si pour tout* $x \in X$, *il existe* ***un unique*** $y \in Y$ *tel que* $(x, y) \in \Gamma$. *Cet unique* y *sera noté* $f(x)$ *et l'application sera notée* $f : X \to Y$ *ou encore*

$$\begin{array}{cccc} f & : & X & \to & Y \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et on dira que « f est une application de X vers Y ».

Remarque 2.21. *On ne fera pas de distinction entre « application » et « fonction »*[1].

2.4.2. *La composition.*

Définitions 2.22.

- *Si* $\mathcal{R} = (X, Y, \Gamma)$ *et* $\mathcal{S} = (Y, Z, \Gamma')$ *sont deux relations, la* relation composée $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = (X, Z, \Gamma'')$ *est définie par :*
$$x\ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\ z \Leftrightarrow \exists y \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{S}z.$$
- *Si* $\mathcal{R} = (X, X, \Gamma)$, *l'itérée* $\mathcal{R}^n$ *est définie par récurrence pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par :* $\mathcal{R}^0 = \mathrm{Id}$ $(x \,\mathrm{Id}\, y \Leftrightarrow x = y)$ *et* $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$.

Remarques 2.23.

- *Une relation* $\mathcal{R}$ *sur* X *est transitive si, et seulement si,* $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.
- *De même que la composition des applications, la composition des relations est associative mais non commutative.*

---

1. Certains manuels définissent une *fonction* comme étant une relation fonctionnelle. Ils réservent alors le terme d'*application* pour les fonctions dont le domaine de définition est X entier (comme dans ces notes).

◦ *La composition est croissante (au sens de l'inclusion des graphes) par rapport à ses deux variables :* $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \Rightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{S} \circ \mathcal{R}'$ *et* $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \Rightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{S}' \circ \mathcal{R}$.

2.4.3. *L'union.* Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations sur un ensemble E, l'union de ces relations est la relation, notée $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, dont le graphe est la réunion des graphes des relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ (autrement dit : $x\,(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})\,y$ si, et seulement si, $x\,\mathcal{R}\,y$ ou $x\,\mathcal{S}\,y$).

Remarque 2.24. *La composition est distributive par rapport à l'union :* $(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R})$ *et* $\mathcal{S} \circ (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_2)$.

2.4.4. *La relation réciproque.*

Définition 2.25. *La réciproque d'une relation* $\mathcal{R} = (X, Y, \Gamma)$ *est la relation* $\mathcal{R}^{-1} = (Y, X, \Gamma^{-1})$ *définie par*

$$x\,\mathcal{R}^{-1}\,y \iff y\,\mathcal{R}\,x.$$

Lorsque $X, Y \subset \mathbb{R}$, il y a donc une interprétation géométrique naturelle : dans un repère orthonormé, Γ^{-1} et Γ se déduisent l'un de l'autre par la symétrie orthogonale par rapport à la bissectrice $y = x$:

2.5. **Fermetures d'une relation.** Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E et une propriété P concernant les relations sur E. Si la relation $\mathcal{R}$ ne vérifie pas la propriété P, on peut chercher à étendre $\mathcal{R}$ (c.-à-d. ajouter des couples dans le graphe) de façon à obtenir une nouvelle relation qui vérifie la propriété P. Ainsi, la relation $\mathcal{R}^*$ telle que

1) $\mathcal{R}^*$ vérifie la propriété P
2) $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$ (c.-à-d. $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}^*y$)
3) Si $\mathcal{T}$ est une autre relation qui contient $\mathcal{R}$ et qui vérifie la propriété P, alors $\mathcal{T}$ contient aussi $\mathcal{R}^*$

est appelée *fermeture de* $\mathcal{R}$ *pour la propriété* P. Pour être plus précis et pour éviter d'éventuelles confusions, il sera parfois préférable de la noter $\mathcal{R}^*_P$ (pour ne pas oublier que toute fermeture est associée à une propriété P spécifique).

2.5.1. *Fermeture réflexive* $\mathcal{R}^*_{ref}$ *de* $\mathcal{R}$. En remarquant que $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si $\mathrm{Id} \subset \mathcal{R}$, la proposition suivante est immédiate :

Proposition 2.26. *La fermeture réflexive de* $\mathcal{R}$ *est*

$$\mathcal{R}^*_{ref} = \mathrm{Id} \cup \mathcal{R}.$$

2.5.2. *Fermeture symétrique* $\mathcal{R}^*_{sym}$ *de* $\mathcal{R}$. En remarquant que $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}$, la proposition suivante est immédiate :

Proposition 2.27. *La fermeture symétrique de* $\mathcal{R}$ *est*

$$\mathcal{R}^*_{sym} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}.$$

2.5.3. *Fermetures transitive et transitive-réflexive.* La proposition suivante se déduit facilement de la remarque 2.23.

Proposition 2.28. *La fermeture transitive de* $\mathcal{R}$ *est*

$$\mathcal{R}^*_{trans} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{R}^k = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \ldots.$$

Sa fermeture transitive-et-réflexive est

$$\mathcal{R}^*_{trans-ref} = (\mathcal{R}^*_{trans})^*_{ref} = (\mathcal{R}^*_{ref})^*_{trans} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^k.$$

Remarque 2.29. *Si* $\mathcal{R}$ *est réflexive, alors* $\mathcal{R}^*_{trans-ref} = \mathcal{R}^*_{trans}$. *La réciproque est fausse.*

Exercice : 21

3. Complément : Les algèbres de Boole

Définition 3.1. *Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire $\{x, y\}$ admet une borne supérieure, notée $x \vee y$ et une borne inférieure, notée $x \wedge y$.*

Exemples 3.2.

- *Pour tout ensemble X, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ est un treillis; si $A, B \subset X$, $A \vee B = A \cup B$ et $A \wedge B = A \cap B$.*
- $(\mathbb{N}, |\,)$ *est un treillis : si $x, y \in \mathbb{N}$, $x \wedge y = \mathrm{pgcd}\{x, y\}$ et $x \vee y = \mathrm{ppcm}\{x, y\}$.*

Proposition 3.3. *Dans un treillis :*

- *les deux opérations $\wedge$ et $\vee$ sont associatives et commutatives;*
- *on retrouve la relation d'ordre à partir de l'une ou l'autre :*

$$x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x.$$

Définitions 3.4. *Un treillis $(T, \leq)$ est dit :*

1. ***distributif*** *si les distributivités suivantes[2] sont vérifiées pour tous $x, y, z \in T$:*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

2. ***borné*** *s'il a un plus petit et un plus grand élément.*
3. ***complémenté*** *s'il est borné et si pour tout x de T, il existe un x' dans T tel que*

$$x \vee x' = \max(T) \qquad \text{et} \qquad x \wedge x' = \min(T)$$

Exemples 3.5.

- *Tout treillis* ***fini*** *est borné : si $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,*

$$\max(T) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \qquad \text{et} \qquad \min(T) = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

- *Pour tout ensemble X, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ est un treillis distributif et complémenté : $\vee$ est la réunion $\cup$, $\wedge$ est l'intersection $\cap$, le plus petit et le plus grand élément sont $\varnothing$ et X, et le complément d'une partie A de X est $\complement_X A$.*

On arrive ainsi à la définition d'une algèbre de Boole.

Définition 3.6. *Un treillis distributif et complémenté est appelé* ***algèbre de Boole****.*

Nous avons ainsi défini les algèbres de Boole à partir des ensembles ordonnés et, si $(T, \leq)$ est une algèbre de Boole, en notant $m = \min(T)$ et $M = \max(T)$, on a les propriétés suivantes :

T1. Commutativité : $\begin{cases} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{cases}$

T2. Associativité : $\begin{cases} (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \end{cases}$

T3. Distributivité $\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (t \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{cases}$

T4. Éléments neutres : $x \vee m = x$ et $x \wedge M = x$

T5. Compléments : $x \vee x' = M$ et $x \wedge x' = m$.

Remarque 3.7. *Dans une algèbre de Boole, le complément d'un élément est entièrement déterminé par les propriétés $T3$ à $T5$. En effet, si x' et x'' sont deux compléments de x alors*

$$x'' = (x \wedge x') \vee x'' = (x \vee x'') \wedge (x' \vee x'') = x' \vee x''$$

c'est-à-dire que $x'' \leq x'$. De même, $x' \leq x''$, d'où l'égalité.

En fait, les propriétés $T1$ à $T5$ suffisent pour définir un treillis. En effet, on peut vérifier que :

Théorème 3.8. *Soit E un ensemble muni de 3 opérations $\wedge$, $\vee$, $'$ et de deux éléments M et m, vérifiant les propriétés $T1$ à $T5$. Alors il existe une relation d'ordre $\leq$ sur E (et une seule) telle que $(E, \leq)$ soit une algèbre de Boole avec $M = \max(E)$, $m = \min(E)$, $x \vee y = \sup(\{x, y\})$ et $x \wedge y = \inf(\{x, y\})$.*

---

2. Elles se déduisent en fait l'une de l'autre. En effet, si par exemple $\vee$ est distributive par rapport à $\wedge$ alors

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = [a \vee (b \wedge c)] \wedge [c \vee (b \wedge c)] = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge c = (a \vee b) \wedge c$$

donc $\wedge$ est distributive par rapport à $\vee$.

Une algèbre de Boole vérifiera d'autres identités dont, en particulier :

T6. Lois de De Morgan : $\left\{ \begin{array}{l} (x \wedge y)' = x' \vee y' \\ (x \vee y)' = x' \wedge y' \end{array} \right.$

T7. Idempotence : $\left\{ \begin{array}{l} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{array} \right.$

T8. $(x')' = x$

T9. $m' = M$ et $M' = m$

Si l'on réécrit l'ensemble de ces identités pour $(\mathcal{P}(X), \subset)$ (exemple 3.5), on retrouve les identités listées dans la section 1.4.

Ces exemples d'algèbres de Boole ne sont pas du tout anodins. En fait, on peut montrer (Théorème de Stone) que `toute algèbre de Boole finie est isomorphe à une algèbre de Boole` $(\mathcal{P}(X), \subset)$ `pour un certain ensemble fini` X[3]. Cela implique en particulier qu'une algèbre de Boole finie a un cardinal qui est forcément une puissance de 2. La plus petite est obtenue pour $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, l'ensemble constitué des 2 valeurs booléennes 0 et 1. Le plus petit élément est alors 0, le plus grand élément est 1 et les opérations sont :

l'addition $+$ définie par $0 + 0 = 0$ et $0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$,

la multiplication $\times$ définie par $0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$ et $1 \times 1 = 1$

et le passage au complément : $\overline{1} = 0$ et $\overline{0} = 1$.

Cet exemple est très important. On notera que « l'addition » introduite ci-dessus n'est pas l'addition dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puisqu'on a ici 1+1=1. En fait, 0 et 1 sont les 2 valeurs de vérité d'une proposition et l'on reconnaît dans les opérations introduites ci-dessus les opérations logiques de *disjonction*, *conjonction* et *négation* (introduites dans le chapitre 1). Ainsi,

$$(\{0, 1\}^n, \wedge, \vee, \neg, \underline{0}, \underline{1})$$

(où $\underline{0}$, resp. $\underline{1}$, est le n-uplet formé de 0, resp. de 1) est l'algèbre de Boole qui permet de manipuler l'ensemble des propositions faites à partir de n variables propositionnelles (modulo l'équivalence logique). Avec les propriétés qui caractérisent l'algèbre de Boole (commutativité, associativité, distributivité, idempotence, double négation, lois de De Morgan), on retrouve les principales règles logiques vues au chapitre 1 (§1.2.2). C'est ce calcul sur les propositions qui avait motivé l'étude des algèbres de Boole quand elles apparaissent dans les travaux de George Boole, en 1854.

3. Les éléments de X correspondent aux singletons, qui sont les atomes de l'algèbre, c.-à-d. les éléments dont $\varnothing$ est l'unique minorant strict.

4. Exercices

Exercice 1. Pour tout ensemble X, vérifier que $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ et que $x \in X \Leftrightarrow \{x\} \subset X$.

Exercice 2. 1. Vrai ou faux ? a) $\varnothing \subset \varnothing$ b) $\varnothing \in \varnothing$ c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ d) $\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing)$
2. Décrire les éléments de $\mathcal{P}(\varnothing)$ et de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$.

Exercice 3. Vrai ou faux ? (justifier la réponse !)
1. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ 2. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 4. $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

Exercice 4. Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer :
1. $A \cup B \subset A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$; 2. $B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n le sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$ formé des multiples de n.
1. Caractériser $A_3 \cap A_5$, $A_3 \cap A_6$, $A_4 \cap A_6$ et, plus généralement $A_n \cap A_m$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.
2. Caractériser $\bigcup_{p \in P} A_p$ et $\bigcap_{p \in P} A_p$, P désignant l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 6. On rappelle que pour tout ensemble X, $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ (l'ensemble des parties de X, muni de la différence symétrique) est un groupe abélien. En déduire que pour tous ensembles A, B, C, si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ alors $B = C$.

Exercice 7. (novembre 2014) Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer l'équivalence :

$$A \cap B = A \cap C \iff A\Delta(B \cup C) = (A\Delta B) \cup (A\Delta C)$$

Exercice 8. Soit E un ensemble de cardinal n. Combien existe-t-il sur E de relations binaires :
1. quelconques ? 2. réflexives ? 3. symétriques ?

Exercice 9. Il y a une erreur dans le raisonnement suivant :
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E, symétrique et transitive. Alors $\mathcal{R}$ est réflexive. En effet, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$ par symétrie et, par transitivité, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ impliquent que $x\mathcal{R}x$ (et $y\mathcal{R}y$ ...).
Quelle est l'erreur commise ?

Exercice 10. 1. Décrire l'ensemble quotient obtenu pour chacune des relations d'équivalence de la liste d'exemples 2.7.
2. Les relations (X, Γ) suivantes sont-elles des relations d'équivalence ? Si oui, décrire alors les classes d'équivalence et l'ensemble quotient :
a) $X_1 = \mathbb{Z}$, $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \in 2\mathbb{Z}\}$
b) $X_2 = \mathbb{R}$, $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(2x) = \cos(2y)\}$
c) $X_3 = \mathbb{R}$, $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = x - y\}$
d) $X_4 = \mathbb{Z}$, $\Gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - y^2 \in 3\mathbb{Z}\}$
3. (novembre 2012) On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par : par $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si $(x + x', y^2 - y'^2) \in (2\mathbb{Z}) \times (3\mathbb{Z})$.
a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) On note $\overline{(x, y)}$ la classe d'équivalence du couple $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Décrire l'ensemble des classes d'équivalence et donner un représentant de chacune d'entre elles.

Exercice 11. (Extrait de l'examen de novembre 2017)
Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence et $f : F \to E$ une application. Montrer *élégamment* (au lieu de vérifier séparément les trois propriétés usuelles) que la relation $\mathcal{S}$ sur F définie par

$$x\mathcal{S}y \iff f(x)\mathcal{R}f(y)$$

est une relation d'équivalence.

Exercice 12. (Extrait de l'examen de juin 2018)
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Montrer que chaque $\mathcal{R}$-classe a au plus 3 éléments.
3) Pour préciser le résultat précédent, on pose

$$A_k := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la classe de } x \text{ a exactement } k \text{ éléments}\}.$$

Déterminer les ensembles A_3, A_2, A_1 et A_0 (il pourra éventuellement être utile de remarquer que $-1\ \mathcal{R}\ 2$).
4) Donner un exemple de partie X de $\mathbb{R}$ contenant exactement un élément de chaque classe.

Exercice 13. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\preccurlyeq$ par

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \iff (x \leq x' \text{ et } y \leq y')$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2. Le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ admet-il des majorants ? des éléments maximaux ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?
3. Mêmes questions pour le carré $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| \leq 1, 0 \leq |y| \leq 1\}$.

Exercice 14. (Extrait de l'examen de novembre 2015)
On considère la relation $\preceq$ définie sur $C = [0,1] \times [0,1]$ par

$$\forall\, (x,y),(x',y') \in C,\ (x,y)\ \preceq\ (x',y') \iff \Big(\big(x < x'\big) \text{ ou } \big(x = x' \text{ et } y \leq y'\big)\Big)$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. L'ensemble C admet-il des éléments maximaux ? et des éléments minimaux ?
3. Est-ce que que toute partie non vide de C admet un plus grand élément ?

Exercice 15. 1. On considère l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \mid)$.
a) Existe-t-il des éléments maximaux dans $\mathbb{N}$? Si oui, lesquels ? Existe-t-il des éléments minimaux ? Si oui, lesquels ?
b) Soit $S = \{2,4,6,7,15\} \subset \mathbb{N}$. S admet-il des majorants ? Une borne sup ? Un plus grand élément ? Des éléments maximaux ? S admet-il des minorants ? Une borne inf ? Un plus petit élément ? Des éléments minimaux ? Justifier la réponse.
2. Soit X un ensemble. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subset)$. Dans chacun des cas qui suivent, le sous-ensemble S de $\mathcal{P}(X)$ admet-il des majorants ? Une borne sup ? Un plus grand élément ? Des éléments maximaux ? S admet-il des minorants ? Une borne inf ? Un plus petit élément ? Des éléments minimaux ?
i) $S = \{\{1,2,3\},\{3,4\},\{6\},\{1,4,6\},\{1,6,8\},\{2,4,6\}\}$ avec $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
ii) $S = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}$ avec $X = \{1,2,3,4\}$.

Exercice 16. (novembre 2013) On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$.
1. La famille $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ fini}\}$ admet-elle des éléments minimaux ? Un plus petit élément ? des éléments maximaux ? Un plus grand élément ? Si la réponse est oui, on indique quels sont les éléments répondant à la question.
2. Même question avec la famille $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{N} \mid \overline{A} \text{ fini}\}$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$).

Exercice 17. Est-il vrai qu'un ensemble bien ordonné possède la propriété de la borne supérieure ? (justifier la réponse !)

Exercice 18. (Extrait de l'examen de juin 2018)
On considère l'ensemble ordonné $(T, \leq) := (\mathcal{P}(X), \subset)$ (l'ensemble des parties de X, ordonné par l'inclusion), où X est un ensemble arbitraire. Montrer que dans T :

1) toute partie non vide S de T a une borne inférieure ;
2) la partie $S = \varnothing$ a également une borne inférieure.

Exercice 19. (Extrait de l'examen de novembre 2017)
On considère les parties d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$.

1) Montrer que la partie E a une borne supérieure si et seulement si E a un maximum.
2) Montrer que la partie $\varnothing$ a une borne supérieure si et seulement si E a un minimum.
3) On dit que $(E, \leq)$ est un *treillis complet* si dans E, toute partie a une borne supérieure. Montrer que le segment réel $[0,1]$ (muni de l'ordre usuel) est un treillis complet.
4) Soit $(E, \leq)$ un treillis complet. Démontrer que chaque partie A de E admet aussi une borne inférieure. (Une piste : en notant B l'ensemble des minorants de A et β la borne supérieure de B, montrer que tout élément de A est supérieur ou égal à β).

Exercice 20. (Extrait de l'examen de novembre 2017)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension non nécessairement finie). On rappelle qu'une partie (non nécessairement finie) L de E est libre si aucun vecteur $\ell \in L$ n'est combinaison linéaire de vecteurs de $L \setminus \{\ell\}$. On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ des parties libres de E, ordonné par l'inclusion.

1) Démontrer formellement que $\varnothing \in \mathcal{L}$.
2) $(\mathcal{L}, \subset)$ a-t-il des éléments minimaux ? un élément minimum ?
3) $(\mathcal{L}, \subset)$ a-t-il des éléments maximaux ? un élément maximum ?

Exercice 21. 1. On considère, sur $\{1,2,3,4\}$, la relation $\mathcal{R}$ de graphe $\{(1,2),(2,3),(3,3),(2,4),(4,1)\}$.

a) Donner le diagramme sagittal de cette relation.

b) Trouver la fermeture de $\mathcal{R}$ pour chacune des propriétés suivantes : réflexivité, symétrie, transitivité, et donner son diagramme sagittal.

2. Soit la relation dans $\mathbb{N}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $xy = 9$. Trouver la fermeture de $\mathcal{R}$ pour chacune des propriétés suivantes : réflexivité, symétrie, transitivité.

3. Mêmes questions avec la relation dans $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 15\}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $2x = 3y$.

4. Est-ce que toute propriété admet une fermeture ? (se poser la question avec l'antisymétrie).