Université Paul Sabatier
Licence L3 E (Mathématiques pour l'enseignement)
2018-2019
Algèbre 1

Chap. 3 : Combinatoire élémentaire.

Table des matières

1. Arrangements avec et sans répétition

On suppose que X et Y sont deux ensembles finis avec $|X| = k$ et $|Y| = n$.

1.1. **Parties d'un ensemble et applications.** Le cardinal de l'ensemble Y^X des applications de X dans Y ne dépend que de ceux de X et de Y, que ces derniers soient finis ou infinis (exercice facile). Les applications de $\{1, 2, \ldots, k\}$ dans Y sont parfois appelées les arrangements avec répétition de k éléments de Y.

Proposition 1.1. *Le nombre d'applications de X dans Y (ou d'arrangements avec répétition de k éléments de Y) est égal à n^k. Autrement dit :*

$$\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}.$$

Preuve : Il s'agit de k choix indépendants d'une valeur parmi n. Pour plus de détails, voir https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Arrangements_avec_répétition. □

Corollaire 1.2. *L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties (ou sous-ensembles) de X a pour cardinal 2^k. Autrement dit :*

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}.$$

Preuve : L'application de $\mathcal{P}(X)$ dans $\{0,1\}^X$ qui, à toute partie A de X, associe sa fonction indicatrice χ_A, est une bijection (revoir l'exercice du chapitre 1 sur cette bijection). □

1.2. **Arrangements, injections et bijections.** Un arrangement est une sélection d'objets qui tient compte de l'ordre (tirage sans remise de boules distinguables dans une urne, tiercés dans l'ordre, etc.) :

Définition 1.3. *Un arrangement (sans répétition) de k éléments de Y est un k-uplet d'éléments distincts de Y, autrement dit : une injection de $\{1, 2, \ldots, k\}$ dans Y.*

Une permutation de Y est une bijection de Y dans lui-même. L'ensemble des permutations de Y est noté S_Y ou, si $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$, S_n.

Le cardinal de l'ensemble des injections de X dans Y ne dépend que de ceux de X et de Y, que ces derniers soient finis ou infinis, et idem pour les bijections de X dans Y (exercices faciles). En outre, si X et Y sont deux ensembles *finis* de même cardinal, alors toutes les injections de l'un dans l'autre sont des bijections.

Définition 1.4. *Soient $|X| = k$ et $|Y| = n$. Le nombre d'injections de X dans Y, ou nombre d'arrangements de k éléments de Y, ou* **nombre d'arrangements de k objets parmi** *n, est noté A_n^k.*

Proposition 1.5. $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n, \\ \frac{n!}{(n-k)!} & \text{si } 0 \le k \le n. \end{cases}$

En particulier, $|\mathrm{S}_n| = A_n^n = n!$.

Preuve : Immédiat si $k > n$. Pour $k \le n$, compter les choix successifs de l'image de 1, puis l'image de 2, etc. jusqu'à k ou plus formellement, faire une récurrence sur k (pour les détails des deux méthodes, voir https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Arrangements_sans_répétition). □

Remarques 1.6.

1) *On a déterminé le nombre d'injections et le nombre de bijections. Le nombre de surjections ne se calcule pas aussi aisément (cf. § 3.2).*
2) *Les nombres $k!$ croissent très vite lorsque k augmente. La formule de Stirling donne une approximation de l'application factorielle :*
$$n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Exercice : 1.

2. Combinaisons sans et avec répétition

2.1. **Combinaisons sans répétition et coefficients binomiaux.** Une combinaison est une sélection d'objets qui ne tient pas compte de l'ordre (tiercés dans le désordre, ...).

Définition 2.1. *Soit $|Y| = n$. Une* **combinaison** *(sans répétition) de k éléments de Y est une partie de Y à k éléments. Le nombre de ces "combinaisons de k éléments parmi n" est le coefficient binomial noté $\binom{n}{k}$ (autrefois C_n^k).*

Proposition 2.2.
$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n, \\ \frac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \le k \le n. \end{cases}$$

Preuve : Le nombre A_n^k de k-arrangements dans Y est le produit de $\binom{n}{k}$ (nombre de parties de Y à k éléments) par $k!$ (nombre de bijections de $\{1, \dots, k\}$ dans une telle partie).

Pour plus de détails, voir https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Combinaisons_sans_répétition. □

Remarque 2.3. *On démontre très facilement (exercice : par le calcul ou par un raisonnement combinatoire) :*
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Proposition 2.4. Formule de Pascal *Pour tous les entiers k et n tels que $0 < k < n$* [1]*,*
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Preuve : combinatoire (on fixe l'un des $n+1$ éléments et l'on compte séparément les parties à k éléments qui le contiennent et celles qui ne le contiennent pas) ou calculatoire (on utilise les expressions avec des factorielles), cf. respectivement, sur https ://fr.wikiversity.org/wiki/Sommation/ :
Exercices/Sommation_de_combinaisons#Exercice_6-3 et Formule_du_binôme#Lemme_préliminaire). □

Les coefficients binomiaux apparaissent ainsi dans le **triangle de Pascal** :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 3 & 6 & & \\ 1 & 4 & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

qui se construit aisément en utilisant la formule de la Proposition 2.4.

Théorème 2.5. Formule du binôme de Newton. *$\binom{n}{k}$ est le coefficient de $x^k y^{n-k}$ dans le développement du polynôme $(x+y)^n$. Autrement dit,*
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1. Ou plus généralement, pour tous entiers relatifs n et k, avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Preuve : par récurrence en utilisant la proposition 2.4 (cf. https ://fr.wikiversity.org/wiki/Sommation/Formule_du_binôme#Démonstration_de_la_formule_du_binôme)
ou par simple observation du développement de $(x+y)^n$ (cf. "Formule du binôme de Newton" sur Wikipédia). □

Exercices : 2, 3, 4, 5.

2.2. **Coefficients multinomiaux.** On a vu que $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ est le nombre de couples (A,B) de parties d'un ensemble Y à n éléments, complémentaires l'une de l'autre et telles que $|A|=k$ (donc $|B|=n-k$). Plus généralement, on peut s'intéresser aux "partitions calibrées" (ce sont presque des partitions, sauf que certaines parties peuvent être vides, et que les parties sont numérotées) :

Proposition 2.6. *Étant donnés r entiers naturels $k_1,\dots,k_r$ de somme $n=|Y|$, le nombre de r-uplets $(A_1,\dots,A_r)$ de parties de Y, disjointes deux à deux et telles que $|A_i|=k_i$, est le coefficient multinomial*

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r}:=\frac{n!}{k_1!\dots k_r!}.$$

Preuve : On choisit successivement $A_1\subset Y$ de cardinal k_1, $A_2\subset Y\setminus A_1$ de cardinal k_2, etc. donc

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r}=\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{n-1}}{k_n}.$$

Après expression en termes de factorielles et simplification, on obtient la formule annoncée. □

On peut alors généraliser la formule du binôme (en procédant, comme pour cette dernière, par récurrence ou examen direct) :

Proposition 2.7.

$$(X_1+\dots+X_r)^n=\sum_{k_i\ge 0,\sum k_i=n}\binom{n}{k_1,\dots,k_r}X_1^{k_1}\dots X_r^{k_r}.$$

Remarque 2.8. *En développant $(1+1+\dots+1)^n$, cette formule du multinôme donne $r^n=\sum_{k_i\ge 0,\sum k_i=n}\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$. Puisque $\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$ est le nombre d'applications f de Y dans $Z:=\{1,\dots,r\}$ tel que 1 ait k_1 antécédents, ..., r ait k_r antécédents et qu'on fait la somme sur toutes les possibilités $(k_1,\dots,k_r)$ (vérifiant nécessairement $\sum k_i=\left|f^{-1}(Z)\right|=|Y|=n$), on retrouve ainsi la formule de la proposition 1.1 : $|Z|^{|Y|}=\left|Z^Y\right|$.*

Exercice : 6.

2.3. **Combinaisons avec répétition.** Une combinaison avec répétition de k objets pris dans un ensemble Y de n objets discernables est une manière de piocher k fois de suite un objet dans Y, sans tenir compte de l'ordre des k choix et "avec remise", un même objet y pouvant donc être sélectionné $f(y)$ fois, avec $f(y)\in\mathbb{N}$:

Définition 2.9. *Une k-combinaison avec répétition dans l'ensemble Y est un multiensemble de k éléments de Y (non ordonnés, et comptés avec leurs répétitions éventuelles), autrement dit : une application $f:Y\to\mathbb{N}$ telle que $\sum_{y\in Y}f(y)=k$.*

Une telle combinaison peut aussi être vue comme une répartition de k objets indiscernables parmi n boîtes discernables (distribution de k bonbons à n enfants).

Théorème 2.10. *Soient m,n,k entiers. On suppose $n\ge 1$.*

1) *Le nombre de n-uplets d'entiers* strictement positifs *de somme m est égal à $\binom{m-1}{n-1}$.*
2) *Le nombre de n-uplets d'entiers* positifs ou nuls *de somme k est égal à $\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$.*
3) *Le nombre de k-combinaisons avec répétition dans ensemble fini de cardinal n est aussi égal à $\binom{n+k-1}{k}$.*

Preuve :

1) Ces n-uplets sont en bijection avec les parties de cardinal $n-1$ de l'ensemble $\{1,2,\dots,m-1\}$, par l'application qui à $(x_1,\dots,x_n)$ associe l'ensemble $\{x_1,x_1+x_2,x_1+x_2+x_3,\dots,x_1+x_2+\dots+x_{n-1}\}$.
2) Ces n-uplets $(z_1,\dots,z_n)$ sont en bijection avec les n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ d'entiers strictement positifs de somme $n+k$, en posant $x_i=z_i+1$. Ce point résulte donc du précédent.
3) Sans perte de généralité, l'ensemble de cardinal n considéré est $\{1,2,\dots,n\}$. Ce point résulte donc du précédent.

Pour plus de détails, voir https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Combinaisons_avec_répétition. □

Exercices : 7, 8, 9.

3. Le principe d'inclusion-exclusion (PIE)

3.1. **Le PIE (ou formule du crible).** Le *principe d'inclusion-exclusion* de De Moivre est aussi appelé *formule du crible.*

Le cardinal de $X \cup Y$ se déduit des cardinaux de X, Y et $X \cap Y$:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Le principe est simple : on compte les éléments de X, ceux de Y et l'on enlève ceux de l'intersection (pour ne pas les compter deux fois). Le principe se généralise au cas de trois ensembles : on compte les éléments de X, ceux de Y et ceux de Z puis on enlève ceux qu'on a comptés deux fois mais il faut alors rajouter ceux qu'on avait initialement comptés trois fois (c.-à-d. ceux qui sont dans les trois ensembles) :

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - \big(|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z| \big) + |X \cap Y \cap Z|.$$

Plus généralement :

Théorème 3.1. *Soient n ensembles finis $A_1, \dots, A_n$. Pour tout ensemble d'indices $I \subset \{1, \dots, n\}$, notons*

$$A_I := \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Alors,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\varnothing \neq I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} |A_I| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} |A_I| .$$

Preuve : La fonction (définie sur $A := \cup A_i$ à partir des fonctions indicatrices des A_i)

$$(1 - \chi_{A_1})(1 - \chi_{A_2}) \cdots (1 - \chi_{A_n})$$

est identiquement nulle car pour tout $x \in A$, au moins l'un des $\chi_{A_i}(x)$ est égal à 1. En développant ce produit, on en déduit que

$$0 = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \chi_{A_I} = 1 + \sum_{\varnothing \neq I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \chi_{A_I},$$

soit

$$1 = \sum_{\varnothing \neq I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \chi_{A_I}.$$

On conclut en faisant, de part et d'autre de cette égalité de fonctions, la somme des valeurs quand la variable parcourt A. □

Remarques 3.2.

- *L'énoncé du théorème reste valide pour $n = 0$, puisqu'une union indexée par $\varnothing$ est vide et qu'une somme indexée par $\varnothing$ est nulle.*
- *Si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties d'un ensemble fini de cardinal N dont les éléments sont considérés comme équiprobables, on obtient, en divisant l'égalité du théorème par N :*

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{\varnothing \neq I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} p(A_I) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} p(A_I) .$$

Cette formule est en fait valide pour un nombre fini d'événements $A_1, \dots, A_n$ d'un espace probabilisé quelconque (la démonstration est analogue à celle du théorème ci-dessus).

3.2. **Application au calcul du nombre de surjections.**

Proposition 3.3. *Soient p et q deux entiers tels que $0 \leq q \leq p$. Le nombre $S_{p,q}$ de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à q éléments est donné par :*

$$S_{p,q} = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} k^p.$$

Preuve : Supposons que $|X| = p$ et $|Y| = q$.

Pour tout $y \in Y$, soit A_y l'ensemble des applications de X dans Y qui ne prennent jamais la valeur y (ce n'est pas utile pour la suite mais entraînez-vous à l'écrire formellement – solution en note en bas de cette page : [2]) . Une surjection de X sur Y est alors une application de X dans Y qui n'est dans aucun A_y. On a donc

$$S_{p,q} = \left| Y^X \setminus \cup_{y \in Y} A_y \right| = q^p - \left| \cup_{y \in Y} A_y \right| .$$

2. $A_y = \{ f \in Y^X \mid f^{-1}(\{y\}) = \varnothing \}$.

Or d'après la formule du crible,

$$|\cup_{y\in Y} A_y| = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{Z\subset Y\\ |Z|=k}} |A_Z|\,,$$

où $A_Z := \cap_{y\in Z} A_y$ est l'ensemble des applications de X dans Y pour lesquelles aucun élément de Z n'a d'antécédent. Il y en a autant que d'applications de X dans $Y \setminus Z$, c'est-à-dire :

$$|A_Z| = (q - |Z|)^p$$

et en reportant :

$$\begin{aligned}
|\cup_{y\in Y} A_y| &= \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{Z\subset Y\\ |Z|=k}} (q-k)^p \\
&= \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} (q-k)^p \,|\{Z \subset Y \mid |Z| = k\}| \\
&= \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \binom{q}{k} (q-k)^p
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
S_{p,q} &= q^p - |\cup_{y\in Y} A_y| \\
&= q^p - \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \binom{q}{k} (q-k)^p \\
&= \sum_{k=0}^{q} (-1)^{k} \binom{q}{k} (q-k)^p \\
&= \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{q-j} j^p \\
&= \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} j^p.
\end{aligned}$$

□

Remarques 3.4.
- *Pour $q = 0$, cette formule donne $S_{p,0} = 0^p$. Effectivement, $S_{0,0} = 1$ (l'unique application de $\varnothing$ dans $\varnothing$ est bien surjective) et $S_{p,0} = 0^p$ si $p > 0$ (il n'y a pas d'application d'un ensemble non vide dans $\varnothing$).*
- *Pour $q = p$, les surjections sont les bijections donc $S_{p,p} = p!$.*
- *Les $\frac{S_{p,q}}{q!}$ sont appelés les nombres de Stirling de seconde espèce. C'est le nombre, pour un ensemble de cardinal p, de partitions en q sous-ensembles ou, ce qui revient au même, de relations d'équivalence ayant q classes.*

3.3. **Application au calcul de l'indicatrice d'Euler.** Pour un entier $n \geq 1$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[1, n]$ premiers avec n. L'application φ est appelée *indicatrice d'Euler*.

Théorème 3.5. *Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n. Alors,*

$$\varphi(n) = n \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Preuve : Pour tout $p \in P$, notons A_p l'ensemble des entiers de $[1, n]$ divisibles par p. Le principe d'inclusion-exclusion nous dit que :

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - |\cup_{p\in P} A_p| \\ &= n - \sum_{\varnothing \neq Q \subset P} (-1)^{|Q|-1} |\cap_{p\in Q} A_p| \\ &= n + \sum_{\varnothing \neq Q \subset P} (-1)^{|Q|} \frac{n}{\prod_{p\in Q} p} \\ &= n \sum_{Q\subset P} \frac{(-1)^{|Q|}}{\prod_{p\in Q} p} \\ &= n \sum_{Q\subset P} \prod_{p\in Q} \frac{-1}{p} \\ &= n \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

□

Exercices : 10, 11, 12.

4. Actions de groupes

La dernière section de ce cours n'a aucunement l'ambition d'échafauder ne serait-ce que les premières bribes de la théorie des groupes, mais seulement de la "regarder fonctionner" sur quelques exemples, qui nourriront l'intuition lors d'un futur cours sur cette théorie. On se limitera donc (comme les premiers explorateurs de ce vaste domaine) à des groupes de permutations d'un ensemble fini X.

Définition 4.1. *Un* ***groupe de permutations*** *de X est un ensemble $G \subset \mathrm{S}_X$ de permutations de X tel que :*
- $\mathrm{id}_X \in G$
- $\forall f, g \in G \quad g \circ f \in G$;
- $\forall g \in G \quad g^{-1} \in G$.

*Le cardinal $|G|$ de G est appelé l'****ordre*** *de ce groupe.*
Un ***sous-groupe*** *de G est un groupe de permutations de X inclus dans G.*
*L'****orbite*** *d'un élément $x \in X$ "pour l'action de G sur X" (c.-à-d. : relativement à G) est l'ensemble*

$$Gx := G(x) = \{g(x) \mid g \in G\} \subset X.$$

Le ***stabilisateur*** *de x est le sous-groupe de G constitué des permutations qui fixent x :*

$$G_x := \{g \in G \mid g(x) = x\} \subset G.$$

Remarque 4.2. *L'ensemble S_X lui-même est le "plus gros" groupe de permutations de X et le singleton $\{\mathrm{id}_X\}$ est le "plus petit" (on les appelle les "sous-groupes triviaux" de S_X).*

Dans toute la suite, on suppose que G est un groupe de permutations d'un ensemble fini X.

Exemple 4.3. *Les groupes de permutations de $X = \{1, 2, 3\}$, c.-à-d. les sous-groupes du "groupe symétrique d'indice 3" (S_3), sont (outre les deux sous-groupes triviaux) : le "groupe alterné" A_3, constitué de l'identité et des deux permutations circulaires (123) et $(123)^{-1} = (321)$ et, pour chacune des trois transpositions $\tau = (12)$, (13) ou (23), le groupe $\{\mathrm{id}_X, \tau\}$. Le groupe S_3 (d'ordre $3! = 6$) a donc un sous-groupe d'ordre 6, un d'ordre 3, trois d'ordre 2 et un d'ordre 1. On remarque que les ordres des sous-groupes sont tous des diviseurs de l'ordre du groupe. C'est un fait général (théorème de Lagrange) qui ne nous sera utile que dans le cas où le sous-groupe considéré est un stabilisateur :*

Théorème 4.4. Formule des classes. *Pour tout $x \in X$, l'ordre du stabilisateur G_x divise l'ordre du groupe G, et le quotient de ces deux ordres est le cardinal de l'orbite Gx :*

$$|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Preuve : Considérons la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G associée à la surjection $G \to Gx$, $g \mapsto g(x)$. Calculons la classe d'équivalence $\overline{g}$ d'une permutation $g \in G$:

$$f \in \overline{g} \Leftrightarrow f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow \left(g^{-1} \circ f\right)(x) = x \Leftrightarrow g^{-1} \circ f \in G_x \Leftrightarrow \exists h \in G_x \quad f = g \circ h.$$

L'application $h \mapsto g \circ h$ réalise donc une surjection de G_x dans $\overline{g}$. Cette application étant par ailleurs injective (car g est simplifiable à gauche), on en déduit que $|\overline{g}| = |G_x|$. Ainsi, toutes les classes ont même cardinal (l'ordre de G_x) donc (lemme des bergers)

$$|G| = |G/\mathcal{R}| \times |G_x|.$$

Or par définition de $\mathcal{R}$, la surjection $G \to Gx$, $g \mapsto g(x)$ passe au quotient et donne une bijection $G/\mathcal{R} \to Gx$, $\overline{g} \mapsto g(x)$, donc $|G/\mathcal{R}| = |Gx|$. On peut conclure :

$$|G| = |Gx| \times |G_x|\,.$$

□

Exemple 4.5. *Pour* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *et* $G = \{g \in \mathrm{S}_4 \mid g(4) = 4\}$ *(d'ordre* 6*, comme* S_3*),* $G_1 = \{\mathrm{id}_X, (23)\}$ *et* $G1 = \{1, 2, 3\}$.

Remarque 4.6. *On déduit de la formule des classes que si deux points sont dans une même orbite* ω*, alors leurs stabilisateurs ont même ordre :* $|G|/|\omega|$*. En regardant les choses d'un peu plus près, on peut en fait expliciter une bijection très naturelle entre* G_x *et* $G_{g(x)}$ *(exercice ...).*

Théorème 4.7. Formule "de Burnside". *Notons* $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ *l'ensemble des orbites et pour toute permutation* $g \in G$*,* $\mathrm{Fix}(g)$ *l'ensemble des* ***points fixes*** *de* g *:*

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\} \subset X.$$

Alors, le ***nombre d'orbites*** *est :*

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|\,.$$

Remarque 4.8. *En particulier si l'action de* G *sur* X *est "transitive", c'est-à-dire si pour tout couple de points* $x, y \in X$*, il existe une permutation* $g \in G$ *telle que* $y = g(x)$*, alors* $\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = |G|$ *(cf. exercices 2 et 14).*

Preuve : En utilisant le fait que les orbites forment une partition de X (ce sont les classes d'équivalence de "x est en relation avec y si l'on peut passer de l'un à l'autre en appliquant une permutation appartenant à G"), puis la formule des classes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| &= |\{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}| \\
&= \sum_{x \in X} |G_x| \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} |G_x| \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{|G|}{|\omega|} \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} |G| \\
&= |\Omega||G|.
\end{aligned}$$

□

Exercices : 13, 14, 15.

5. Exercices

Exercice 1 : Une inversion d'une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ est un couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leq i < j \leq n$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ et l'on définit I_n comme le nombre total d'inversions dans le groupe symétrique S_n :

$$I_n := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} I(\sigma).$$

1. Démontrer la relation de récurrence : $I_n = nI_{n-1} + n!\,\frac{n-1}{2}$.
2. En déduire que $\dfrac{I_n}{n!} = \dfrac{n(n-1)}{4}$. Comment interpréter cette valeur ?
   (Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Exercices/
   Permutations#Permutations_sans_répétitions.)

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute permutation $f \in \mathrm{S}_n$, on note $\mathrm{Fix}(f) = \{i \in \{1,\ldots,n\} \mid f(i) = i\}$ l'ensemble des points fixes de f.

1. Pour un $i \in \{1,\ldots,n\}$ donné, combien y a-t-il de permutations $f \in \mathrm{S}_n$ qui fixent i ?
2. En déduire que $\sum_{f \in \mathrm{S}_n} |\mathrm{Fix}(f)| = n!$.

Exercice 3 : (Extrait de l'examen de juin 2018) On avance sur la droite réelle, dans le sens positif, en partant de 0. Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n le nombre de façons d'effectuer un trajet de longueur $n-1$ en faisant uniquement des pas de longueur 1 ou 2. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1) Démontrer que T_n est égal au n-ième nombre de Fibonacci F_n, défini par

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

2) Exprimer T_n comme une somme de coefficients binomiaux, en comptant le nombre $S_{n,k}$ de façons d'effectuer un trajet de longueur $n-1$ avec k pas de longueur 2 (et les autres de longueur 1).

Exercice 4 : Soient $m, n, r \in \mathbb{N}$. Montrer les propriétés suivantes de deux façons : par le calcul et par un raisonnement combinatoire.

1. Si $r \leq m$ alors $A_n^r A_{n-r}^{m-r} = A_n^m$;
2. $n\binom{n-1}{m-1} = m\binom{n}{m}$;
3. $\binom{n+m}{r} = \sum \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ (identité de Vandermonde) ;
4. $\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r} = \binom{n}{m}\binom{m}{r}$ puis $\sum \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}$ (posé à l'examen de janvier 2018) ;
5. $\sum_{k \leq m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$.
   (Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Exercices/
   Arrangements#Exercice_2-11 (question 1), Combinaisons#Exercice_4-1 (questions 2 à 5).)

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déduire de la fin de l'exercice précédent les formules :

$$(F_{n,m}) \qquad \sum_{0 \leq k \leq m} A_k^n = \frac{1}{n+1}\, A_{m+1}^{n+1}.$$

2. On pose $S_j(m) = \sum_{k=1}^{m} k^j$. Utiliser les formules $(F_{1,m})$, $(F_{2,m})$ et $(F_{3,m})$ pour calculer $S_1(m)$, $S_2(m)$ et $S_3(m)$.
   (Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/
   Sommation/Exercices/Calculs_élémentaires#Exercice_2-11.)

Exercice 6 :

1. Combien de mots sans répétition de lettre peut-on former avec les lettres du mot FACULTÉ ?
2. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot BAOBAB ? Et du mot MISSISSIPI ?
3. Combien de mots peut-on former en utilisant uniquement des lettres de BAZAR ?
   (Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Exercices/
   Permutations#Permutations_avec_répétitions (2), Arrangements#Exercice_2-13 (3).)

Exercice 7 : (Extrait de l'examen de janvier 2018) Papa fait 3 galettes : une grosse, une moyenne et une petite. Il y répartit n fèves identiques. Il veut en mettre au moins trois dans la grosse, au moins deux dans la moyenne et au moins une dans la petite. Combien a-t-il de possibilités ?

Exercice 8 :

1. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro ?
2. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants ? (à présent, un enfant peut ne rien recevoir).
3. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins deux euros ?
4. De combien de manières peut-on distribuer n pièces de 1 euro à k garçons et j filles de sorte que chaque fille ait au moins un euro ?

(Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Exercices/Combinaisons#Exercice_4-3.)

Exercice 9 : Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une urne contient n boules distinctes et l'on veut sélectionner k boules. Cette sélection peut se faire de quatre manières différentes (avec ou sans remise de la boule qui vient d'être tirée, en tenant compte ou non de l'ordre dans lequel les k boules ont été sélectionnées). Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le nombre de sélections possibles.

	avec ordre	sans ordre
avec remise		
sans remise		

2. Soient $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ et $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$. On considère les ensembles :
$U = \{f \in Y^X \mid f \text{ est injective}\}$;
$V = \{f \in Y^X \mid f \text{ est croissante (au sens large)}\}$;
$W = \{f \in Y^X \mid f \text{ est strictement croissante}\}$.
Vérifier que $\left|Y^X\right|$, $|U|$, $|V|$ et $|W|$ remplissent les cases du tableau de la question 1.
(Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Exercices/Combinaisons#Exercice_4-4.)

Exercice 10 : (Extrait de l'examen de janvier 2018) Soient A, B, C, D quatre ensembles tels que $|A| = 18$, $|B| = 23$, $|C| = 21$, $|D| = 17$, $|A \cap B| = 9$, $|A \cap C| = 7$, $|A \cap D| = 6$, $|B \cap C| = 12$, $|B \cap D| = 9$, $|C \cap D| = 12$, $|A \cap B \cap C| = 4$, $|A \cap B \cap D| = 3$, $|A \cap C \cap D| = 5$, $|B \cap C \cap D| = 7$ et $|A \cap B \cap C \cap D| = 3$. Quel est le cardinal de $A \cup B \cup C \cup D$?

Exercice 11 :

1. Soient $N, d \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'entiers (strictement positifs) inférieurs ou égaux à N qui sont des multiples de d ?
2. Dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, on enlève tous les multiples de 2, 3, 5 et 7. Quel est le cardinal de l'ensemble obtenu ?
3. Toujours dans $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, quel est le cardinal de l'ensemble obtenu une fois qu'on a enlevé tous les multiples de 8, 12 et 15 ?

(Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/
Formule_du_crible/Exercices/Application_de_la_formule_du_crible#Exercice_1-3.)

Exercice 12 : Un dérangement d'un ensemble X est une permutation de X sans point fixe ($f \in \mathrm{S}_X$ et $f(x) \neq x$ pour tout $x \in X$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $d(n)$ le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments.

1. Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour montrer que

$$d(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Indication : on utilisera les ensembles $A_i := \{f \in \mathrm{S}_X \mid f(i) = i\}$, pour $i \in X$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n)$ est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{\mathrm{e}}$.

(Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/
Formule_du_crible/Dénombrement_des_dérangements.)

Exercice 13 : Utiliser la formule des classes pour résoudre les deux questions suivantes.

1. Un groupe d'ordre 35 opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a-t-il d'orbites ?
2. Un groupe d'ordre $143 = 11 \times 13$ opère sur un ensemble de 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

(Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/
Théorie des groupes/Exercices/Action_de_groupe#Problème_5.)

Exercice 14 : Utiliser la formule des classes pour déterminer l'ordre du groupe des rotations du cube et celui du tétraèdre régulier. Même question pour leurs groupes d'isométries.

(Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/
Théorie des groupes/Exercices/Action_de_groupe#Problème_6.)

Exercice 15 :

1. Faire l'inventaire des rotations du cube, sachant qu'il y en a 24 (en comptant l'identité).
2. À l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorer les faces d'un cube à rotation près, avec au plus 3 couleurs à sa disposition.

(Solution : https ://fr.wikiversity.org/wiki/
Théorie des groupes/Exercices/Action_de_groupe#Problème_7.)