

# Les outils Mathématiques de la Mécanique Quantique

Rapport de projet S6 L3-ESR

UNIVERSITÉ Paul Sabatier

Yves Guitton-Fumet - Hugo Uong

Mai 2017

## Table des matières

|      |  |    |
|------|--|----|
| I    | Introduction : les questions posées par la nouvelle physique | 2  |
| II   | Un paradoxe pour planter le décor : le chat de Schrödinger   | 4  |
| III  | Espaces de Hilbert et vecteur d'état                         | 5  |
| IV   | Observation du système                                       | 6  |
| V    | Interprétation probabiliste                                  | 7  |
| VI   | Évolution dans le temps                                      | 11 |
| VII  | La Réduction du paquet d'onde et l'effet Zénon Quantique     | 12 |
| VIII | Le Chat : le retour  | 15 |
| IX   | Interactions entre deux systèmes                             | 17 |
| X    | Conclusions  | 21 |
|      | ANNEXE 1 : Produits tensoriels, quelques basiques.           | 22 |
|      | ANNEXE 2 : Références.                                       | 25 |

## Première partie

# Introduction : les questions posées par la nouvelle physique

Au début du XXème siècle, apparurent en sciences physiques, une série de questions qui résistaient à l'explication dans le cadre des modèles classiques. Parmi ces questions, on peut citer en particulier :

Le rayonnement du corps noir, qui ne trouve de modélisation satisfaisante qu'en supposant un comportement discret des émissions d'énergie d'un corps soumis à un rayonnement. Cela conduisit Max Planck à bâtir en 1900 l'hypothèse de quantum d'énergie.

Les expériences sur l'effet photo électrique qui se manifeste par l'émission d'électrons par un matériaux métallique soumis à un rayonnement lumineux. Elles furent interprétés par Einstein en 1905 comme la preuve du caractère corpusculaire de la lumière dont les « grains » élémentaires (les photons) interagissaient avec la matière. Cette interprétation contredisait la conception communément admise de la nature ondulatoire de la lumière.

Bohr, en 1912, intégra ces idées dans un modèle de l'atome d'hydrogène prévoyant que l'émission et l'absorption de la lumière par la matière devait se faire selon des quantités discrètes et non pas continues. Des expériences menées par Frank et Hertz en 1914 confirmèrent précisément ce modèle.

Plus tard, les expériences autour des fentes d'Young apportèrent un grand nombre de résultats inexplicables dans le cadre classique. Ils conduisirent à postuler qu'au niveau microscopique, les particules de matière en théorie parfaitement localisées (électrons, atomes, molécules) peuvent se comporter comme le ferait une onde, qui a une « étendue » et peut ainsi former des figures d'interférence avec elle-même. Dans cette approche, pour donner une image simpliste, les particules ne sont pas « quelque part » avec certitude, mais plutôt elles sont « un peu partout » avec une certaine probabilité.

De manière également troublante, les expériences avec des fentes d'Young ont permis de montrer que la façon de réaliser une mesure sur une même particule pouvait déboucher sur des résultats différents. Ainsi une première mesure donnait des résultats aléatoires, mais une seconde mesure immédiate donnait toujours un résultat identique à la première quelle qu'ait été celle-ci, un peu comme si le fait d'interagir avec une particule « gelait » son état.

On pourrait citer de nombreux autres exemples. La question du formalisme mathématique nécessaire à la description, à la compréhension et à la modélisation de ces phénomènes se posa rapidement et de manière aigüe. Ainsi pendant le premier quart du siècle, on peut dire pour simplifier que deux approches parallèles, à priori très différentes, ont coexisté avant que l'on réalise qu'elles étaient non seulement compatibles mais en réalité totalement équivalentes.

La mécanique ondulatoire d'une part, dont Erwin Schrödinger fut un des plus emblématiques porte-drapeaux, sur la base des travaux fondateurs de Louis de Broglie, exploite d'idée de la dualité onde-corpuscule au terme de laquelle, très schématiquement, une particule microscopique (électron, atome, ...) peut être représentée par un système d'onde qui lui est associée. L'outil fondamental de cette approche est une équation aux dérivées partielles dont l'objet n'est pas de prédire la valeur de paramètres physiques, mais la distribution de probabilité des valeurs possibles pour ces paramètres, qui, grande nouveauté, ne sont plus continues, mais discrètes, et interprétées comme les valeurs propres d'un opérateur approprié décrivant le système étudié.

La mécanique dite matricielle d'autre part, largement développée par Werner Heisenberg et approfondie par Paul Dirac, cherche à éliminer de la modélisation toute grandeur qui ne peut être directement mesurée. Plutôt par exemple que de décrire une particule par sa position et sa vitesse, qui nous sont inaccessibles à la fois pour des raisons pratiques et des raisons fondamentales<sup>1</sup>, l'idée consiste à développer cette trajectoire selon une série de Fourier, et à utiliser le fait que les modes de Fourier dans le développement sont liés au spectre d'émission de l'atome lors des transitions électroniques, qui lui est observable expérimentalement. Cette démarche amène à construire, pour chaque grandeur physique qui caractérise l'atome mais ne peut être observée, une matrice de dimension infinie associée constituée uniquement d'éléments accessibles à la mesure.

L'objet de ce mémoire n'est bien sûr pas de décrire de manière exhaustive ces différents formalismes, dont la complexité et la profondeur justifient de nombreuses années d'études, mais de présenter succinctement différents outils mathématiques et concepts

---

1. La raison pratique est que nous n'avons pas d'appareil susceptibles de réaliser cette mesure, mais la raison plus fondamentale est qu'au niveau microscopique, la réalisation d'une mesure de position demande d'interagir avec la particule, en « l'éclairant » par exemple à l'aide d'une source lumineuse. En admettant que celle-ci soit la moins intense possible, il faudra à minima envoyer au moins un photon sur la particule, ce qui compte tenu des énergies en jeu de part et d'autre constitue une interaction significative qui va modifier la vitesse de la particule. Les relations dites d'Heisenberg quantifient ce phénomène pour toutes les variables couplées, pour lesquelles ce couplage crée un obstacle rédhibitoire à la connaissance simultanée des deux grandeurs. Par exemple dans le cas de la position et de la quantité de mouvement cette relation d'incertitude s'exprime comme  $\Delta x \cdot \Delta p > \frac{h}{2}$  où  $h$  est la constante de Planck réduite

importants de la Mécanique Quantique, en essayant modestement de montrer en quoi ils fournissent des clés pour traiter les questions physiques sous-jacentes, les modéliser, voire pour effectuer des prédictions inattendues sur des phénomènes non encore observés expérimentalement.

Enfin pour clore cette introduction, il faut remarquer que si la Mécanique Quantique appartient bien entendu à ce qu'il est convenu d'appeler les sciences dures (dans tous les sens du terme : capacité à expliquer et faire des prédictions, mais aussi au sens du niveau de difficulté des techniques mathématiques qu'elle met en oeuvre), les questionnements qu'elle suscite sur la nature ultime de la réalité physique qui nous entoure, ou sur les rapports entre cette réalité physique et l'abstraction des représentations mathématiques mises en oeuvre, sont une incitation puissante à la réflexion philosophique. Nous ne pouvons en faire abstraction totalement et pour tenter de mieux conjurer cet écueil ultérieurement, nous commencerons par nous y précipiter sciemment, avec le chat de Schrödinger.

## Deuxième partie

# Un paradoxe pour planter le décor : le chat de Schrödinger

Cette histoire que Schrödinger lui-même qualifie de « burlesque » (p 103 dans [4]) a été élaborée pour tenter d'illustrer, en la ramenant dans le domaine macroscopique, une conséquence pratique, essentielle, des postulats et du formalisme mathématique de la Mécanique Quantique.

Un des principes fondamentaux de la MQ est celui de la superposition des états, sur lequel nous reviendrons formellement plus tard. Il stipule que l'état d'un système quantique (par exemple un noyau radioactif) à un moment donné, est exactement la superposition (combinaison linéaire) d'un certain nombre d'états de base qui sont les seuls à être effectivement observés lors d'une mesure, et donc à avoir une réalité tangible. Les coefficients de la superposition représentent la probabilité qu'au bout du compte, tel ou tel état de base se manifeste. Ce principe semble un peu abstrait, mais son application au monde microscopique dont nous pouvons concevoir qu'il est fort différent de celui que nous expérimentons avec nos sens ordinaires, n'est pas extrêmement perturbant. Il est d'ailleurs à la base de très nombreuses expériences et n'a jamais été démenti. Or, que se passe-t'il si l'on essaie de transposer ce principe dans notre monde macroscopique ?

On enferme un chat vivant dans une enceinte close où a été disposé un noyau radioactif, susceptible de libérer, de manière aléatoire, et donc imprévisible, une particule  $\alpha$ . Ce noyau, par application du principe de superposition est à tout instant dans un état inconnu de l'observateur, mais qui combine les états « particule émise » et « particule non émise », avec les probabilités correspondantes (par exemple en dépendance de la constante de désintégration du noyau).

Un compteur Geiger est également installé dans la boîte et lorsqu'il détecte l'émission radioactive, il déclenche l'ouverture d'une capsule de cyanure et le chat meurt. Tant que la boîte est fermée, nous ne pouvons rien dire de l'état du chat. Et par conséquent, le chat n'est pour l'observateur extérieur, ni mort ni vivant, tout comme le noyau est encore à la fois intègre et désintégré. On pourrait en fait tout aussi bien dire que le chat est à la fois mort et vivant !

Voilà donc une expérience de la pensée qui pour le coup est perturbante car personne n'a encore vu de chat superposé ! Nous ne chercherons pas plus avant à discuter ce sujet, mais nous y reviendrons à la fin de ce mémoire en tentant a minima de repérer parmi les concepts qui auront été exposés d'ici là, ceux qui peuvent en favoriser la compréhension.

## Troisième partie

# Espaces de Hilbert et vecteur d'état

Le cadre mathématique général de la mécanique quantique est celui des espaces de Hilbert, c'est à dire les  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels complets munis d'une norme issue de son produit scalaire ou hermitien. On postule qu'un système quantique (atomes, molécules, particules, en nombre quelconque) est représenté par un espace de Hilbert. On notera  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$  un tel espace,  $N$  y représente le nombre de degrés de liberté du système.

Ce système quantique peut se trouver dans différents états. Un état donné est représenté par un vecteur d'état unitaire dans  $\mathcal{H} : \psi \in \mathbb{C}^N$  tel que  $\|\psi\| = 1$ . Ce vecteur n'exprime pas directement une position, une énergie ou une vitesse comme cela serait le cas en mécanique classique, mais permet d'affecter une probabilité à une position, une énergie ou une vitesse donnée au système comme nous le verrons ultérieurement.  $\mathcal{H}$  est en fait l'espace des états possibles du système.

Une conséquence immédiate de l'utilisation de ce cadre mathématique est que si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  représentent deux états du système, alors toute combinaison linéaire de ces deux états est également un état du système. C'est le principe de superposition :  $\psi = \lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2$  où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des constantes (dans  $\mathbb{C}$ , est encore un état possible du système.

Une autre conséquence de ce postulat est que tout vecteur d'état peut être écrit dans une base orthonormée  $(e_i)_{i=1\dots N}$ . Les éléments de cette famille pourraient être assimilés à des états unitaires « purs » et indépendants du système :

$$\psi = \sum_{i=1}^N \langle \psi | e_i \rangle$$

Et comme  $\|\psi\| = 1$ , on a immédiatement que :

$$\sum_{i=1}^N \langle \psi | e_i \rangle^2 = 1$$

Nous reviendrons ultérieurement plus en détails sur l'interprétation de cette relation, mais on peut d'ores et déjà remarquer qu'une interprétation du terme  $|\langle \psi | e_i \rangle|^2$  comme une probabilité associée à la projection du vecteur d'état sur chaque élément de la base  $(e_i)_{i=1\dots N}$  pourrait avoir du sens.

Enfin, si deux vecteurs d'état sont proportionnels, ils représentent le même état du système. Cela revient à ne considérer que les classes d'équivalence définies à rotation près.

## Quatrième partie

# Observation du système

A toute grandeur physique  $P$  caractéristique du système (une énergie, une quantité de mouvement, ...) on associe un opérateur hermitien  $A$  de l'espace des états. Ceci constitue une innovation majeure par rapport à la mécanique classique dans laquelle les grandeurs physiques sont simplement associées à des scalaires réels. On l'appelle « observable associé à  $P$  ».

Cet observable entre en jeu au moment de la réalisation d'une mesure sur le système. En effet la Mécanique Quantique postule qu'alors, les résultats possibles de la mesure de  $P$ ,

sont les valeurs propres de l'observable  $A$  associé à  $P$ .

Ce résultat est à valeur réelle car  $A$  est auto-adjointe [annexe 1]. Ce point est capital car il signifie en particulier que les résultats possibles d'une mesure sont quantifiés, ils appartiennent à un ensemble discret qui est celui des valeurs propres de l'observable, et non plus à un ensemble continu comme dans le monde macroscopique de la mécanique classique.

Notons au passage que ce postulat et la représentation mathématique qui l'accompagnent permettent de satisfaire les nombreuses observations expérimentales sur les états quantifiés des phénomènes physiques au niveau microscopique.

Considérons par exemple une observable correspondant à une grandeur physique donnée, décrite par la matrice suivante :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  Remarquons qu'elle est symétrique et donc que ses valeurs propres seront réelles. En effet les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$

Le postulat implique donc que les seuls résultats possibles de la mesure sont 1 et  $-1$ .

## Cinquième partie

# Interprétation probabiliste

La mécanique classique nous a habitués à des modélisations totalement déterministes des phénomènes physiques. Pourvu que l'on dispose du bon modèle, le résultat d'une expérience peut être prédit de manière certaine. Là encore, la mécanique quantique repose sur une vision très différente, où l'on ne peut pas prévoir le résultat de l'expérience, mais où par contre on peut évaluer la probabilité d'obtenir un résultat donné, parmi un ensemble de résultats a priori connus d'avance, le spectre de l'observable.

Si l'on considère une valeur propre  $\lambda$  de l'observable  $A$ , la probabilité d'observer  $\lambda$  est donnée par la projection du vecteur d'état  $\psi$  sur le sous-espace propres associé à  $\lambda$ . Autrement dit :

$$\mathbb{P}(\lambda) = \|\psi_\lambda\|^2$$

Dans cette expression,  $\psi_\lambda$  désigne donc la projection orthogonale de  $\psi$  sur le sous espace propre associé à  $\lambda$ . Soyons plus précis : soit  $P_i$  projecteur orthogonal sur l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  de l'observable  $A$ , on vérifie en supposant qu'il y ait  $k$  valeurs



propres simples :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i, \quad \text{avec} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i = Id$$

En effet si  $(u_i)_{i=1 \dots k}$  est une base de vecteurs propres, on peut écrire tout vecteur d'état sous la forme :

$$\phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot u_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i \cdot \phi$$

On applique l'opérateur  $A$  sur le vecteur  $\phi$ , ce qui donne :

$$A \cdot \phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot A \cdot u_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \lambda_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i \cdot \phi$$

Et comme cela vaut pour tout  $\phi$  on en déduit :

$$A = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i$$

Par ailleurs, comme  $A$  est auto-adjointe, le théorème spectral nous indique qu'il existe une matrice de passage  $Q$ , également auto-adjointe et telle que :

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix} Q^* = Q \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot E_i \right) Q^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot (Q \cdot E_i \cdot Q^*)$$

les  $E_i$  sont les matrices nulles sauf pour les coefficients  $(i, i)$  qui valent 1. On obtient donc un moyen d'exprimer les projecteurs au moyen de la matrice de passage :

$$P_i = Q \cdot E_i \cdot Q^*$$

On constate également que  $P_i \cdot P_j = 0$  si  $i \neq j$  car  $Q \cdot Q^* = 1$  et  $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$ . Les  $P_i$  fournissent alors un moyen commode d'exprimer simplement la probabilité, en partant d'un état  $\psi$ , de mesurer chaque valeur propre :

$$\mathbb{P}(\lambda) = \|P_i \cdot \psi\|^2$$

Remarque : Commutativité des observables De manière générale, les observables ne commutent pas. Intuitivement cela devrait conduire au fait que la réalisation de deux mesures différentes sur un système donné ne doit pas donner les mêmes résultats selon l'ordre dans

lequel on effectue ces mesures. Pour vérifier cette idée, considérons deux observables qui ne commutent pas :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de chaque observable sont respectivement : pour  $A_1$  :  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$ , et pour  $A_2$  :  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_2 = 0$ . On commence par calculer les projecteurs de chaque observable :

$$\text{Pour } A_1 : P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } A_2 : P_{\mu_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mu_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observons successivement  $A_1$  puis  $A_2$  sur un vecteur d'état quelconque  $\psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . On suppose dans la suite que  $\psi$  est unitaire et que  $x > y > 0$ . Ce choix permet de fixer l'orientation modulo  $\pi$  des vecteurs directeurs des sous espaces propres, mais ne modifie pas ces espaces.

Après observation de  $A_1$ , on va obtenir comme résultats possibles :

- $\lambda_1$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\lambda_1) = \|P_{\lambda_1} \cdot \psi\|^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2$  avec  $\psi_{\lambda_1} = \frac{P_{\lambda_1} \cdot \psi}{\|P_{\lambda_1} \cdot \psi\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- $\lambda_2$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\lambda_2) = \|P_{\lambda_2} \cdot \psi\|^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2$  avec  $\psi_{\lambda_2} = \frac{P_{\lambda_2} \cdot \psi}{\|P_{\lambda_2} \cdot \psi\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Les vecteurs  $\psi_{\lambda_1}$  et  $\psi_{\lambda_2}$  sont les projections unitaires de  $\psi$  sur les espaces propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  par le phénomène de réduction du paquet d'onde.

Après mesure, le nouvel état initial du système est donc  $\psi_{\lambda_1}$  ou  $\psi_{\lambda_2}$  selon le résultat obtenu. Choisissons par exemple  $\psi_{\lambda_1}$  et appliquons lui l'observable  $A_2$ , on obtiendra comme résultats possibles :

- $\mu_1$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\mu_1) = \|P_{\mu_1} \cdot \psi\|^2 = \frac{1}{2}$  avec  $\psi_{\mu_1 \lambda_1} = \frac{P_{\mu_1} \cdot \psi_{\lambda_1}}{\|P_{\mu_1} \cdot \psi_{\lambda_1}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\mu_2$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\mu_2) = \|P_{\mu_2} \cdot \psi\|^2 = \frac{1}{2}$  avec  $\psi_{\mu_2 \lambda_1} = \frac{P_{\mu_2} \cdot \psi_{\lambda_1}}{\|P_{\mu_2} \cdot \psi_{\lambda_1}\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si l'observation de  $A_1$  avait été  $\lambda_2$  au lieu de  $\lambda_1$ , le résultat après  $A_2$  aurait été une projection sur les sous-espace dirigés par  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  avec la même probabilité de  $\frac{1}{2}$ . Les vecteurs sont identiques au signe près à ceux trouvés précédemment. Ils définissent donc les mêmes espaces que ceux qui sont possibles si le résultat est  $\lambda_1$  au lieu de  $\lambda_2$ . On répète ce processus en commençant par observer  $A_2$  puis  $A_1$ . Après  $A_2$ , on obtient :

- $\mu_1$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\mu_1) = \|P_{\mu_1} \cdot \psi\|^2 = y^2$  avec  $\psi_{\mu_1} = \frac{P_{\mu_1} \cdot \psi}{\|P_{\mu_1} \cdot \psi\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\mu_2$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\mu_2) = \|P_{\mu_2} \cdot \psi\|^2 = x^2$  avec  $\psi_{\mu_2} = \frac{P_{\mu_2} \cdot \psi}{\|P_{\mu_2} \cdot \psi\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Après mesure de  $A_2$ , le nouvel état initial du système est donc  $\psi_{\mu_1}$  et appliquons lui l'observable  $A_1$ , on obtiendra comme résultats possibles :

- $\lambda_1$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\lambda_1) = \|P_{\lambda_1} \cdot \psi_{\mu_1}\|^2 = \frac{1}{2}$  avec  $\psi_{\lambda_1 \mu_1} = \frac{P_{\lambda_1} \cdot \psi_{\mu_1}}{\|P_{\lambda_1} \cdot \psi_{\mu_1}\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- $\lambda_2$  avec la probabilité  $\mathbb{P}(\lambda_2) = \|P_{\lambda_2} \cdot \psi_{\mu_1}\|^2 = \frac{1}{2}$  avec  $\psi_{\lambda_2 \mu_1} = \frac{P_{\lambda_2} \cdot \psi_{\mu_1}}{\|P_{\lambda_2} \cdot \psi_{\mu_1}\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Dans ce cas, on voit que le vecteur initial est projeté avec même probabilité de  $\frac{1}{2}$  sur les sous-espaces dirigés par  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ . Ces deux espaces de projection possibles diffèrent de ceux trouvés lors de la mesure en sens inverse. Et de même que précédemment la réalisation de  $\mu_2$  au lieu de  $\mu_1$  n'aurait pas changé le résultat final.

Bilan :

- L'ordre dans lequel sont réalisées les observations a un impact significatif sur le résultat final : L'ensemble des espaces dans lesquels la réduction du paquet d'onde peut s'opérer est différent d'un cas à l'autre.
- Le choix du vecteur d'état initial joue partiellement sur le résultat final. Il a un impact directe seulement lors de la première étape d'observation, et uniquement sur la probabilité d'observer un état ou l'autre, mais pas sur la nature de ces états. A l'issue des deux mesures si les deux étapes sont bien indépendantes d'un point de vue probabiliste, la probabilité globale d'observer l'une ou l'autre des valeurs propres sera identique.

Réciproquement, si les deux observables commutent, le résultat final n'est pas affecté par l'ordre de réalisation des mesures. En effet, deux opérateurs matriciels qui commutent sont diagonalisables dans une même base et donc ils ont les mêmes sous espaces propres. Soient deux observables A et B qui commutent, et Q la matrice de passage entre la base canonique et celle dans laquelle les deux opérateurs sont diagonaux, on a simultanément :

$$\begin{cases} A = Q \cdot D_A \cdot Q^* \\ B = Q \cdot D_B \cdot Q^* \end{cases}$$

Et on a vu auparavant que les projecteurs  $P_i$  peuvent s'exprimer en fonction de Q et des matrices canoniques de  $E_i$  par  $P_i = Q \cdot E_i \cdot Q^*$ .

Donc comme  $Q \cdot Q^* = Id$  et  $E_i \cdot E_j = \delta_{ij} \cdot E_j$ , si on applique A puis B ou B puis A sur un vecteur d'état quelconque on obtient :

$$A \cdot B \cdot \psi = B \cdot A \cdot \psi = \left( \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot P_j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i \right) \cdot \psi$$

D'où :

$$A \cdot B \cdot \psi = B \cdot A \cdot \psi = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \mu_j \cdot \lambda_i \cdot (Q \cdot E_j \cdot Q^*) \cdot (Q \cdot E_i \cdot Q^*) \cdot \psi$$

Et enfin :

$$A \cdot B \cdot \psi = B \cdot A \cdot \psi = \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot \lambda_j \cdot P_j \cdot \psi$$

Et donc l'application de A puis B ou bien B puis A conduit à mesurer dans les deux cas les valeurs propres  $\mu_i \cdot \lambda_i$  correspondant aux mêmes espaces propres  $P_i$ , et cela avec des probabilités identiques :

$$\mathbb{P}(\mu_i \cdot \lambda_i) = \|P_i \cdot \psi\|^2$$

## Sixième partie

# Évolution dans le temps

L'évolution dans le temps du système quantique est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = -iH\psi(t)$$

$H$  est appelé Hamiltonien du système. C'est un opérateur quantique, à coefficients complexes auto-adjoint, qui peut dépendre du temps.

Tant que l'on n'intervient pas sur le système, l'évolution de celui-ci reste donc déterministe, et d'ailleurs, l'équation ci-dessus a une solution simple dans le cas où  $H$  ne dépend pas du temps :

$$\psi(t) = U(t).\psi(0) \quad \text{avec } U(t) = e^{iHt}$$

où  $U(t)$  est un opérateur linéaire et  $U.U^* = Id$

Une mesure réalisée à l'instant  $t = 0$  ayant donné  $\psi(0)$ , l'état initial est donc connu avec certitude.

## Septième partie

# La Réduction du paquet d'onde et l'effet Zénon Quantique

Une conséquence troublante du postulat examiné au §5 est que le processus de mesure a fait basculer le système d'un mode d'existence dans lequel les différents états possibles se superposent, sans qu'il en choisisse aucun, vers un mode totalement déterminé, où il a adopté un seul de ces états. Le système a été projeté sur un des sous espaces propres de l'observable.

Ainsi le nouveau vecteur d'état, après mesure, n'est plus  $\psi$  mais  $\psi_1 = \frac{P_k.\psi}{\|P_k.\psi\|}$  si l'on a observé  $\lambda_k$ . Une seconde mesure répétée immédiatement après la première redonnera la valeur  $\lambda_k$ , avec une probabilité égale à 1. Ce phénomène est appelé réduction du paquet d'onde. Il s'illustre dans le paradoxe de Zénon Quantique qui fera l'objet du prochain développement. Auparavant, illustrons la réduction du paquet d'onde par ce schéma tiré de [2]. Il montre qu'entre les mesures, le système subit une évolution parfaitement continue et déterministe ainsi que le laisse prévoir l'équation de Schrödinger, mais que la réalisation d'une observation va projeter ce système sur un des sous espaces propres de l'observable, de manière aléatoire.

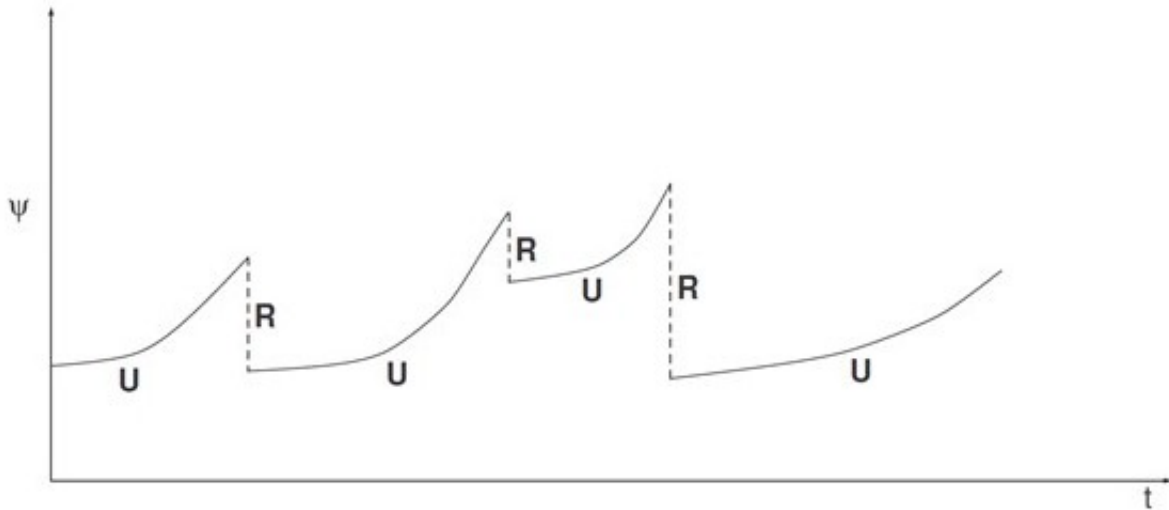


FIGURE 1 – Succession d'évolutions unitaires (U) et de réduction du paquet d'onde (R)

Zénon est un philosophe grec du cinquième siècle avant JC resté célèbre pour le paradoxe auquel il laissa son nom, et qui visait à démontrer par l'absurde l'indivisibilité du mouvement. Zénon imaginait une flèche tirée vers une cible et appliquait le raisonnement suivant : pour atteindre son but, la flèche doit d'abord parcourir la moitié du chemin qui sépare l'archer de la cible, mais pour atteindre cette première moitié, il faut d'abord que la flèche parcourt le premier quart du chemin, et ainsi de suite. Zénon arrivait à la conclusion que la flèche ne pouvait pas quitter l'arc, ce qui est notoirement contraire à l'expérience douloureuse que les archers anglais firent subir à la cavalerie française lors de la bataille d'Azincourt !

Appliqué à la mécanique quantique, ce paradoxe cesse d'en être un pour devenir au contraire une réalité expérimentale. En effet nous avons vu que le fait d'observer un système conduit au phénomène de réduction du paquet d'onde qui se traduit par le « gel » du système dans l'état dans lequel il a été mesuré, en d'autres termes une nouvelle mesure, réalisée immédiatement après la première, conduit à observer la même valeur, alors qu'avant la première mesure, le résultat ne pouvait pas être prédit autrement que par une probabilité. A la limite, la multiplication à l'infini des observations conduit à un gel permanent du système. C'est une conséquence « pratique » mais pas immédiatement intuitive du principe de réduction du paquet d'onde, qui a pu être testée expérimentalement.

Pour démontrer cet effet mathématiquement, il faut revenir à l'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution du système dans le temps :

$$\frac{d\psi}{dt} = -iH\psi$$

dont la solution générale si  $H$  ne dépend pas du temps est :

$$\psi(t) = U(t).\psi(0) \quad \text{avec } U(t) = e^{iHt}$$

Supposons maintenant que l'on réalise à  $t = 0$  une première mesure sur le système. D'après le principe de réduction du paquet d'onde, la mesure a pour effet de projeter le système dans un certain état qui correspond à l'espace propre associé à une certaine valeur propre de l'observable. Appelons  $\psi(0)$  la valeur observée. Un instant  $\Delta t$  plus tard on répète la même mesure, le système aura évolué à partir de l'état précédent  $\psi(0)$  (noté désormais  $\psi_0$ ) pour devenir :

$$\psi(\Delta t) = U(\Delta t).\psi_0$$

La probabilité de mesurer à nouveau  $\psi_0$  est alors donnée par :

$$\langle \psi_0 | \psi(\Delta t) \rangle^2 = \langle \psi_0 | U(\Delta t) . \psi_0 \rangle^2 = \langle \psi_0 | e^{iH\Delta t} . \psi_0 \rangle^2 \quad (1)$$

On développe le terme  $e^{iH\Delta t}$  comme une exponentielle de matrice par :

$$e^{iH\Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iH\Delta t)^k}{k!}$$

Et on ne retient que les premiers termes :

$$e^{iH\Delta t} = I - i\Delta t H - \frac{\Delta t^2}{2} H^2 + o(\Delta t^2)$$

ce qui donne en ré-injectant dans (1) :

$$\langle \psi_0 | \psi(\Delta t) \rangle^2 = |\langle \psi_0 | (I - i\Delta t H - \frac{\Delta t^2}{2} H^2 + o(\Delta t^2)) . \psi_0 \rangle|^2$$

soit :

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \psi(\Delta t) \rangle^2 &= |\langle \psi_0 | \psi_0 - i\Delta t H . \psi_0 - \frac{\Delta t^2}{2} H^2 . \psi_0 + o(\Delta t^2) . \psi_0 \rangle|^2 \\ \langle \psi_0 | \psi(\Delta t) \rangle^2 &= [\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle - iH\Delta t \langle \psi_0 | H . \psi_0 \rangle - \frac{\Delta t^2}{2} \langle \psi_0 | H^2 . \psi_0 \rangle + o(\Delta t^2) \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle]^2 \end{aligned}$$

Si l'on tient compte du fait que  $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$  et qu'on développe à l'ordre 2, il vient

$$\mathbb{P}[\psi(\Delta t) = \psi_0] = 1 - \Delta t^2 (|\langle \psi_0 | H \cdot \psi_0 \rangle|^2 - |\langle \psi_0 | H^2 \cdot \psi_0 \rangle|) + o(\Delta t^2)$$

Grace au passage en module, tous les termes de cette expression sont à valeurs réelles y compris  $o(\Delta t^2)$ , et elle est inférieure à 1, ce qui était attendu. Par ailleurs le terme  $\langle \psi_0 | H \cdot \psi_0 \rangle^2 - \langle \psi_0 | H^2 \cdot \psi_0 \rangle$  est constant car  $H$  est supposé indépendant du temps. On notera par la suite  $K = \langle \psi_0 | H \cdot \psi_0 \rangle^2 - \langle \psi_0 | H^2 \cdot \psi_0 \rangle$

On peut donc évaluer maintenant l'effet d'une répétition de la mesure au temps  $2\Delta t$ . On s'intéresse à la probabilité de mesurer deux fois de suite le système dans l'état  $\psi_0$ . Elle vaut :

$$\mathbb{P}[\psi(2\Delta t) = \psi_0 | \psi(\Delta t) = \psi_0] = \mathbb{P}[\psi(2\Delta t) = \psi_0 | \psi(\Delta t) = \psi_0] \cdot \mathbb{P}[\psi(\Delta t) = \psi_0]$$

Mais comme  $\mathbb{P}[\psi(2\Delta t) = \psi_0 | \psi(\Delta t) = \psi_0] = \mathbb{P}[\psi(\Delta t) = \psi_0]$  il vient immédiatement que

$$\mathbb{P}[\psi(2\Delta t) = \psi_0] = \mathbb{P}[\psi(\Delta t) = \psi_0]^2 = (1 - K \cdot \Delta t^2 + o(\Delta t^2))^2$$

On peut répéter ce processus sur une durée  $T$  en posant  $\Delta t = T/n$ , et à l'issue de  $n$  mesures on obtiendra la probabilité de mesurer toujours la même valeur  $\psi_0$

$$\mathbb{P}[\psi(n\Delta t) = \psi_0] = \left[ 1 - K \cdot \left(\frac{T}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{T}{n}\right)^2\right) \right]^n$$

Cette expression dans laquelle tous les termes sont réels est équivalente à  $\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n$  qui tend vers 1 quand  $n$  vers  $+\infty$ ,  $\forall x$ .

En conclusion : si l'intervalle de mesure tend vers zéro, la probabilité d'observer systématiquement l'état  $\psi_0$  tend vers 1. Et donc le système est "gelé". Loin d'être un simple paradoxe intellectuel, ce phénomène existe et a été confirmé expérimentalement. Il est même dans certains cas mis en oeuvre à dessein pour étudier certains systèmes quantiques.

## Huitième partie

# Le Chat : le retour

A présent que nous disposons de bases un peu plus solides, nous pouvons revenir sur le paradoxe du chat.

Si l'on repart du noyau radioactif, les principes de la MQ nous indiquent que lui est associé un vecteur d'état  $\psi_{noyau}$ , susceptible de se projeter sur deux sous-espaces distincts, le premier dans le quel le noyau est intègre, et dirigé par le vecteur  $e_0$  et le second



dans lequel le noyau a subi une désintégration avec émission d'une particule  $\alpha$  et dirigé par le vecteur  $e_1$ . Chacun de ces états a une probabilité que nous fixerons à  $1/2$  pour simplifier. On peut alors l'écrire :

$$\psi_{\text{noyau}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_{\text{intgre}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_{\text{dsintgr}}$$

Cette équation illustre le principe de superposition au terme duquel, tant qu'aucune mesure n'a été pratiquée, le noyau n'est ni dans un état ni dans l'autre, mais dans une combinaison linéaire des deux états possibles.

Par l'intermédiaire de la machine infernale installée dans la boîte (compteur Geiger + fiole de cyanure + déclencheur), le sort du chat est donc irrémédiablement lié à celui du noyau atomique. Le matou devient donc en quelque sorte un système quantique macroscopique qui réplique le noyau. Le vecteur d'état du chat peut s'écrire :

$$\psi_{\text{chat}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_{\text{vivant}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_{\text{mort}}$$

Il est absolument analogue à celui du noyau en remplaçant respectivement les états « intègre » et « désintégré » par « vivant » et « mort ».

Nous touchons la première difficulté conceptuelle mise en évidence par Schrödinger dans sa parabole : que signifie physiquement cet état de superposition ? Autant un esprit rationnel peut en se faisant un peu violence accepter de représenter un noyau atomique de cette manière compte tenu des échelles microscopiques, autant cela devient nettement plus difficile à avaler si l'on parle d'un chat... Un chat à la fois vivant et mort serait sans doute une curiosité mais le moins qu'on puisse dire est que l'idée même peut rester coincée au fond de la gorge...

Continuons ce curieux chemin. Ouvrons la boîte après un certain temps, ce qui revient métaphoriquement à réaliser la mesure de l'état du chat et donc du noyau. Nous savons par expérience, et la mécanique quantique ne dit pas autre chose, que nous ne pouvons observer qu'un seul état à la fois : le chat est ou bien mort ou bien vivant, le noyau est ou bien désintégré ou bien pas, mais certainement pas une pincée de l'un et un soupçon de l'autre en même temps. Selon le principe de réduction du paquet d'onde, le chat a été projeté orthogonalement dans un des espaces propres de l'observable. Drôle de destin pour un chat !

A ce stade, le principe du tiers exclu garde encore tous ses droits. On observe donc un état parfaitement défini. Si la raison est sauve, il reste cependant une question : comment le chat (noyau) a-t-il pu passer d'un état superposé vivant et mort (intègre et désintégré)

à un état défini vivant ou mort (intègre ou désintégré) ? Autrement dit, que signifie le principe de réduction du paquet d'onde selon lequel la mesure projette de manière aléatoire mais en suivant une certaine distribution de probabilité, l'état superposé vers un état non superposé ? Que se passe-t-il à ce moment-là ? comment se déroule cette projection concrètement ? Faut-il spécifiquement une mesure pour déclencher cette réduction ? etc. . .

La question posée par Schrödinger reste posée aujourd'hui encore. S'il n'est pas exclu, une fois arrivé à ce point, de sombrer dans le mysticisme, de nombreuses hypothèses ont été émises pour tenter de redonner à une théorie éminemment efficace par ailleurs des interprétations physiques plus confortables pour la raison. Citons en deux.

Il existerait des variables cachées, que nous ignorons par définition, mais dont la prise en compte permettrait de rétablir le déterminisme que notre ignorance a contraint à abandonner au profit d'une approche probabiliste. Des expériences récentes tendent à infirmer cette idée.

D'autres chercheurs plaident en faveur de l'existence de multi-univers parallèles dans chacun desquels se trouve réalisés une et une seule des potentialités du système, ces multivers étant toutefois dans des proportions qui respectent les probabilités données par l'observable.

Nous ne développerons pas plus avant ce sujet. Il a le mérite de mettre en évidence, pour clore ce chapitre quelque peu philosophique, que les questions inattendues soulevées par l'axiomatique quantique, sont peut-être à la fois le prix à payer mais aussi le gage de l'efficacité de cette théorie.

## Neuvième partie

# Interactions entre deux systèmes

Le principe de base pour modéliser l'interaction entre systèmes quantiques est le suivant pour deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  : Chaque système est décrit dans le cadre d'un espace de Hilbert qui lui est propre

- $S_1$  représenté par l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}$  de dimension  $n$ , de base  $\{e_i\}_{(i=1 \dots n)}$
- $S_2$  représenté par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension  $m$ , de base  $\{h_j\}_{(j=1 \dots m)}$

Le système global est décrit dans un nouvel espace de Hilbert qui n'est pas la simple addition de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  mais leur produit tensoriel  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  (cf annexe 1), construit de manière

à définir également un espace de Hilbert, de dimension  $n \times m$ .

Lorsque les deux systèmes sont mis en interaction, ils se comportent comme un système unique, doté de sa propre loi d'évolution qui est à nouveau une équation de Schrödinger gouvernée par un opérateur Hamiltonien global :

$$H_{total} = H_{\mathcal{E}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{H}} + H_{Interaction}$$

Le terme d'interaction est fondamental dans la mesure où il permet que le système global ne soit pas simplement la juxtaposition des deux systèmes initiaux, alors que les deux autres termes décrivent l'évolution de chaque composante du système sans interaction. En toute généralité, si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs sur  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , l'opérateur composé n'est pas le produit tensoriel des opérateurs,

$$U = e^{-itH_{tot}} \neq A \otimes B$$

Pour découvrir pas à pas ce qui se produit dans ce nouveau système, supposons tout d'abord que le terme d'interaction soit nul.

Alors  $H_{total} = H_{\mathcal{E}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{H}}$ , et on peut écrire la solution de l'équation de Schrödinger comme produit tensoriel de deux opérateurs liés respectivement à  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , le développement ci-dessous étant permis par la commutativité des termes  $H_{\mathcal{E}} \otimes I$  et  $I \otimes H_{\mathcal{H}}$  pour le produit d'opérateurs (cf annexe1).

$$U_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}} = e^{-itH_{tot}} = e^{-it(H_{\mathcal{E}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{H}})} = e^{-itH_{\mathcal{E}}} \otimes e^{-itH_{\mathcal{H}}} = U_{\mathcal{E}} \otimes U_{\mathcal{H}}$$

Sous l'hypothèse d'interaction nulle, l'état global du système peut être « factorisé » sous forme d'un produit de deux états caractéristiques de chaque composante de départ. Considérons donc un vecteur d'état de  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  sous la forme  $\phi \otimes \psi$ , et réalisons une mesure de l'état de  $\mathcal{H}$ . On prend une observable sur  $\mathcal{H}$  :

$$A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$$

et on l'étend à une observable sur  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ , en construisant  $Id_{\mathcal{E}} \otimes A$ . C'est un opérateur auto-adjoint car  $(Id_{\mathcal{E}} \otimes A)^* = Id_{\mathcal{E}} \otimes A^* = Id_{\mathcal{E}} \otimes A$ . Sa décomposition spectrale est donnée par :

$$Id_{\mathcal{E}} \otimes A = Id_{\mathcal{E}} \otimes \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i$$

On remarque que :

$$\sum_{i=1}^k Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i = Id_{\mathcal{E}} \otimes \sum_{i=1}^k P_i = Id_{\mathcal{E}} \otimes Id_{\mathcal{H}} = Id_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}}$$

Les produits  $Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i$  fournissent donc une base de projecteurs de  $Id_{\mathcal{E}} \otimes A$  sur  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ . La probabilité d'observer la valeur propre  $\lambda_i$  lors de la mesure en partant de l'état  $\phi \otimes \psi$  du système global est donc :

$$\mathbb{P}(\lambda_i) = \|Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i(\phi \otimes \psi)\|^2$$

Et en revenant au produit scalaire

$$\mathbb{P}(\lambda_i) = \langle Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i(\phi \otimes \psi) | Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i(\phi \otimes \psi) \rangle = \langle \phi \otimes P_i\psi | \phi \otimes P_i\psi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle \langle P_i\psi | P_i\psi \rangle$$

Et au final :

$$\mathbb{P}(\lambda_i \text{ sur } \mathcal{H}) = \langle \mathcal{E} \otimes \mathcal{H} | \mathcal{E} \otimes \mathcal{H} \rangle = \langle P_i\psi | P_i\psi \rangle = \mathbb{P}(\text{observer } \lambda_i \text{ sur } \mathcal{H})$$

Et par ailleurs, la réduction du paquet d'onde projette le système global sur le sous espace dirigé par :

$$\frac{Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i(\phi \otimes \psi)}{\|Id_{\mathcal{E}} \otimes P_i(\phi \otimes \psi)\|} = \frac{\phi \otimes P_i\psi}{\|\phi \otimes P_i\psi\|} = \phi \otimes \frac{P_i\psi}{\|P_i\psi\|}$$

Ce résultat signifie que sans interaction entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , toute mesure d'une observable de  $\mathcal{H}$  sur le système global  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  donne en probabilité le même résultat qu'une observation directe sur  $\mathcal{H}$ , et que la réduction du paquet d'ondes s'opère en projetant le système global sur un sous espace qui est le produit tensoriel de  $\phi$  vecteur d'état sur  $\mathcal{E}$  qui n'a pas changé, par la projection de  $\psi$  vecteur d'état de  $\mathcal{H}$ , sur le sous espace  $P_i\psi$  associé à  $\lambda_i$ . Tout se passe comme si chaque composante continuait à « vivre sa vie » indépendamment de l'autre. Le modèle est conforme à ce qu'attendait l'intuition. Les états sont dits « non-intriqués ».

Par contre, si l'état du système global ne peut pas être factorisé en fonction des deux composantes initiales, le résultat est différent. Le système est dit intriqué.

Si un système comporte par exemple deux particules qui interagissent, on démontre que la mesure d'un observable propre à une des deux particules, est directement influencée par le résultat d'une mesure réalisée sur l'autre particule. Ce phénomène peut être mis à profit pour construire des systèmes d'interactions successives entre un système principal que l'on veut étudier mais que l'on ne souhaite pas perturber par des mesures, et des systèmes dits auxiliaires, que l'on fait interagir avec le système principal, et sur lequel on peut se permettre de pratiquer une mesure destructrice.

Ainsi, supposons un système  $S$  que l'on souhaite étudier, et une chaîne  $\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_n$  de systèmes auxiliaires que l'on fait interagir tout à tour avec  $S$ . Décrivons la première interaction et la mesure consécutive.

Le vecteur d'état initial, avant interaction, est donné par  $\phi_0 \otimes \psi$ . A l'issue de l'interaction, le système est décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_1$ , le vecteur d'état a évolué et il est devenu  $U(\phi_0 \otimes \psi)$  qui n'est par hypothèse pas factorisable en raison de l'intrication des deux particules.

Réalisons maintenant une mesure sur la particule  $\mathcal{E}_1$ , à l'aide d'une observable  $A = \sum_i \lambda_i \cdot P_i$  qui est étendue à une observable de  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_1$  par :

$$Id_S \otimes A = \sum_i \lambda_i \cdot (Id_S \otimes P_i)$$

Alors :

$$\mathbb{P}(\lambda_i) = \|Id_S \otimes P_i \cdot U(\phi_0 \otimes \psi)\|^2$$

Et par réduction du paquet d'onde l'état du système global évolue :

$$U(\phi_0 \otimes \psi) \rightarrow \frac{Id_S \otimes P_i \cdot U(\phi_0 \otimes \psi)}{\|Id_S \otimes P_i \cdot U(\phi_0 \otimes \psi)\|} = \frac{V_i \phi_0}{\|V_i \phi_0\|} \otimes y_i$$

Après mesure,  $\mathcal{H}_S$  est dans l'état  $\phi_1 = \frac{V_i \phi_0}{\|V_i \phi_0\|}$  avec une probabilité  $\|V_i \phi_0\|^2$

En répétant ce processus d'interactions successives et de mesure d'un système auxiliaire, on peut donc suivre l'évolution de S sans jamais l'observer directement.

## Dixième partie

# Conclusions

La mécanique quantique est née au début du siècle dernier de l'incapacité des physiciens à faire entrer dans les modèles classiques un certain nombre de phénomènes observés sur des systèmes mettant directement en jeu le monde microscopique des particules élémentaires et de la lumière.

Une axiomatisation poussée et la mise en œuvre d'outils mathématiques très abstraits ont permis de grands progrès dans la modélisation et la prédiction. Citons par exemple :

- la quantification des phénomènes microscopiques qui est restituée par le rôle prépondérants des observables matriciels dont seules les valeurs propres peuvent être effectivement observées
- la dualité onde corpuscule dont rend compte la fonction d'onde, qui est capable d'assigner en même temps une certaine étendue à une particule et une probabilité de position à une onde

Et en parallèle, les postulats de la mécanique quantique ont parfois débouché sur des prédictions étonnantes :

- Le principe de superposition des états, directement issu de la structure d'espace vectoriel choisie pour développer la théorie, et l'approche probabiliste lié à la fonction d'onde amènent directement au paradoxe du chat de Schrödinger, à la fois mort et vivant tant qu'on ne le regarde pas.
- Le principe de réduction du paquet d'onde, qui est à la source de l'effet Zenon quantique est également troublant même si des expériences récentes ont montré sa réalité physique.

La mécanique Quantique est emblématique d'une démarche scientifique qui a accumulé les succès depuis plus de cent ans, en se fondant sur l'enrichissement mutuel entre une pratique expérimentale pointue et une axiomatisation exigeante.

# ANNEXE 1 : Produits tensoriels, quelques basiques.

## Définition :

Le produit tensoriel  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  de deux espaces de Hilbert  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  de dimension  $n$  et  $m$  est un espace de Hilbert de dimension  $n \times m$ .

Une base de  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  est construite à partir de  $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \{e_i\}_{i=1\dots n}$  et  $\mathcal{B}_{\mathcal{H}} = \{h_i\}_{i=1\dots m}$  des bases de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ .

Par définition, un élément de cette base  $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ , s'écrit  $t_{ij} = e_i \otimes h_j$ .

La famille  $(t_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$  est orthonormale par construction  $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$  et  $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$  le sont.

## Distributivité

Le produit tensoriel est distributif sur l'addition :

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \text{ et } \forall z \in \mathcal{H}, (x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$$

## Produit scalaire

Sur cet espace le produit scalaire est défini à partir des produits scalaires de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  : pour tous  $x_1, x_2$  dans  $\mathcal{E}$  et tous  $y_1, y_2$  dans  $\mathcal{H}$ , on pose par définition :

$$\langle x_1 \otimes x_2 | y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1 | x_2 \rangle \langle y_1 | y_2 \rangle$$

Sur la base de cette définition, le produit tensoriel  $u \otimes v$  de deux vecteurs appartenant à  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  s'écrit :

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot h_j$$

Et donc :

$$u \otimes v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j e_i \otimes h_j$$

## Ecriture générale d'un élément de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$

Un élément s'écrit en général,

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \cdot e_i \otimes h_j$$

**Remarque :** les produits  $u \otimes v$  engendrent  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  mais une somme  $u \otimes v + w \otimes z$  n'est pas nécessairement de la forme  $x \otimes y$

### Produit d'opérateurs

Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs sur  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  respectivement. On définit un opérateur sur  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  qui agit sur  $x \otimes y$  où  $x \in \mathcal{E}$  et  $y \in \mathcal{H}$  par :

$$A \otimes B(x \otimes y) = Ax \otimes By$$

Cette définition est transposable au cas général de  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  :

$$A \otimes B(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \cdot Ae_i \otimes Bh_j$$

### Ecriture d'un opérateur dans $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$

De même qu'un vecteur de  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  n'est pas nécessairement le produit tensoriel de deux vecteurs de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , les opérateurs sur  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  ne sont pas uniquement ceux que décrit le § précédent. La forme la plus générale est donnée par :

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j,k,l} \alpha_{ij}^{kl} \cdot E_{ij} \otimes H_{kl}$$

Dans laquelle les  $\alpha_{ij}^{kl}$  sont scalaires, et les  $E_{ij}$  et  $H_{kl}$  sont les matrices canoniques respectivement sur  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , le produit tensoriel de ces matrices étant défini comme ci-dessus. Alors en développant :

$$\mathcal{A} = \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{kl} \cdot E_{ij} \right) \otimes H_{kl} = \sum_{k,l} M_{kl} \otimes H_{kl}$$

Et donc  $\mathcal{A}$  peut être vu comme une « hyper-matrice » carré  $m \times m$  dans laquelle les coefficients sont eux mêmes des matrices  $n \times n$  du type :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m,1} & \cdots & M_{m,m} \end{bmatrix}$$



## Non commutativité du produit tensoriel

Le produit tensoriel n'est pas une opération qui commute en général. Dans le cas simple  $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ , on voit bien que pour tout  $1 \leq i, j \leq n$  tels que  $i \neq j$ , on a  $e_i \otimes e_j \neq \otimes e_i$ . Si ce n'était pas le cas, la famille  $(e_i \otimes e_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  ne serait pas libre.

Par exemple en prenant  $n = m = 2$ , ce qui donnera  $\dim(\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}) = 4$ . On regarde les deux produits  $I_{\mathcal{E}} \otimes A$  et  $A \otimes I_{\mathcal{E}}$  où  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  est un opérateur  $2 \times 2$  de  $\mathcal{H}$ . Ces deux produits sont représentés par des matrices  $4 \times 4$ . On a :

$$I_{\mathcal{E}} \otimes A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Et de même :

$$A \otimes I_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Cependant, ceci ne dit rien de la commutativité, au sens du produit d'opérateurs, entre éléments de  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ . Si  $A$  commute avec  $C$  dans  $E$ , et  $B$  avec  $D$  dans  $H$ , au sens du produit matriciel, alors  $A \otimes B$  commute avec  $C \otimes D$  dans  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ , i.e :  $A \otimes B \cdot C \otimes D = C \otimes D \cdot A \otimes B$

## ANNEXE 2 : Références.

1. « Introduction to Quantum Mechanics and Quantum Bayes law ». Clément Pellegrini Institut de Mathématiques de Toulouse. Laboratoire de Statistique et Probabilité, Université Paul Sabatier. Bosantouval March 2015.
2. « Introduction à la mécanique quantique ». Cours d'ouverture, EPF 3eme année. Fabien Besnard. 6 février 2013.
3. « Mécanique quantique ». Emmanuel Humbert. 74p. 2002. <hal-00660265>
4. « Physique quantique et représentation du monde ». Erwin Schrödinger. Editions du Seuil. Mars 1992.
5. « La physique nouvelle et les quanta ». Louis de Broglie. Editions Flammarion. 1937.