**Projets des stages/memoires L3**

**Année 2018/19**

Vadim Schechtman

## 1. IDENTITÈ CYCLOTOMIQUE DE GAUSS ET CORPS FINIS

Il s'agit d'une identité remarquable dans l'anneau des séries formelles à une variable, trouvée par Gauss.

Elle implique la formule explicite pour le nombre de polynômes irréductibles de degré donné sur un corps fini, et, en particuliers, l'existence de corps finis de tous cardinaux $p^n$.

Cette preuve va par rapport à la formule du produit d'Euler pour la fonction zeta de l'anneau $\mathbb{F}_p[t]$.

Cette identité simple et profonde est liée aux nombreux résultats combinatoires et algébriques, dont "la formule de colliers" (ou "algebra of necklaces"), cf . [MR].

Pour une $q$-deformation de l'identité cyclotomique, cf. [GS], 3.2.

[GS] V.Gorbounov, V.Schechtman, Homological algebra and divergent series, arXiv:0712.3670.

[MR] Metropolis, N.; Rota, Gian-Carlo (1984), (a) "The cyclotomic identity", in Greene, Curtis, Combinatorics and algebra (Boulder, Colo., 1983). Proceedings of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference held at the University of Colorado, Boulder, Colo., June 511, 1983., Contemp. Math., 34, Providence, R.I.: American Mathematical Society, pp. 19 - 27. (b) Witt vectors and the algebra of necklaces, *Adv. Math.* **50** (1983), 95 - 125.

[M] C.Moreau, Sur les permutations circulaires distinctes, *Nouv. Ann. Math.*, **11** (1872), 309 - 314.

[S] V.Schechtman, Sujets d'Arithmétique, Cours M1 2008, https://www.math.univ-toulouse.fr/ schechtman/enseignement.html

## 2. GROUPES DE COXETER, SYSTÉMES DE RACINES,

## ET THÉORÈME DE CHEVALLEY

Le théorème classique nous dit que l'anneau de polynômes à $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$ invariants par rapport au groupe symétrique $S_n$ est l'anneau de polynômes en fonctions symétriques invariantes

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n,\ \ldots, \sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Le théorème de Chevalley généralise cette assertion, en replaçant $S_n$ par un groupe fini engendré par les reflexions d'un espace euclidien $V = \mathbb{R}^n$.

Ces groupe sont des exemples de groupes de Coxeter. Le plus jolis parmis eux sont liées aux systèmes distingués finis de vecteurs dans $V$, les systèmes de racines, que jouent le rôle prédominant dans nombreux domaines de l'algèbre de la combinatoire, et de la géométrie.

[B] N.Bourbaki, Lie, Chapitres 4 - 6.

[H] J.Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups