Notes de cours – Analyse Complexe

Jérémi Dardé
Institut de Mathématiques de Toulouse

Version 1.4142, datée du 27 novembre 2018

Table des matières

Chapitre 0

Le corps des complexes – $\mathbb{C}$

0.1 Définitions et propriétés de $\mathbb{C}$

L'objectif de cette section est de présenter trois constructions de $\mathbb{C}$. Elles ont toutes en commun de nécessité une connaissance préalable de $\mathbb{R}$, et nécessite donc d'avoir construit $\mathbb{R}$...

Il faut également des connaissances basiques sur les structures algébriques standards.

0.1.1 En passant par $\mathbb{R}^2$

À faire...

0.1.2 En passant par $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

À faire...

0.1.3 En passant par $\dfrac{\mathbb{R}[X]}{X^2+1}$

À faire...

Chapitre 1

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

À faire

Chapitre 2

Fonctions holomorphes

Dans ce cours, on s'intéresse aux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$f : z \in \Omega \mapsto f(z) \in \mathbb{C}.$$

Ici, Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$. On notera de manière générique x et y les parties réelles et imaginaires de z :

$$z = x + \imath y, \quad x = \Re(z),\ y = \Im(z).$$

On note $\overline{z}$ le conjugué de z : $\overline{z} = x - \imath\, y$. On note $|z|$ le module de z, c'est-à-dire

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + \imath\, y)\,(x - \imath y)} = \sqrt{z\,\overline{z}}.$$

Enfin, pour z_0 dans $\mathbb{C}$ et $r \geq 0$, on note le disque ouvert de rayon r centré en z_0

$$\mathcal{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\},$$

et le disque épointé

$$\dot{\mathcal{D}}_r(z_0) = \mathcal{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < r\}.$$

2.1 Fonctions continues

Définition 2.1 (Limite)**.** *Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, et $z_0 \in \overline{\Omega}$. On dit que f tend vers $c \in \mathbb{C}$ quand z tend vers z_0, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in \dot{\mathcal{D}}_\eta(z_0) \cap \Omega$, $f(z) \in \mathcal{D}_\varepsilon(c)$. On note ceci*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c \text{ ou } f(z) \xrightarrow{z \to z_0} c.$$

Définition 2.2 (Fonctions continues)**.** *Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est continue en $z_0 \in \Omega$ si*

$$\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = f(z_0).$$

On dit que f est continue sur Ω si f est continue en tout z_0 de Ω. On note $C^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω.

De manière équivalente, f est continue en z_0 si

$$f(z) = f(z_0) + o(1),$$

ou encore

$$f(z) = f(z_0) + \varepsilon(z),$$

avec $\varepsilon(z)$ vérifiant $\lim\limits_{z\mapsto z_0} \varepsilon(z) = 0$.

Il est clair que toutes les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{C}$. Il en est de même de $f_1(z) = z$, puisque pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$, si on choisit $\eta = \varepsilon$, on a bien que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z - z_0| < \eta$, $|f_1(z) - f_1(z_0)| < \varepsilon$.

Les fonctions $\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont également continues sur $\mathbb{C}$ tout entier. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, on a par définition

$$|z - z_0| = \sqrt{\Re(z - z_0)^2 + \Im(z - z_0)^2},$$

et donc

$$|\Re(z - z_0)|,\ |\Im(z - z_0)| \leq |z - z_0|.$$

Par ailleurs, la fonction inverse $f(z) = \frac{1}{z}$, définie sur $\mathbb{C}_*$, y est continue. En effet, pour tout $z_0 \neq 0$ et tout $z \in \mathcal{D}_{|z_0|/2}(z_0)$, on a

$$|z_0| = |z_0 - z + z| \leq |z_0 - z| + |z| \leq \frac{|z_0|}{2} + |z| \Rightarrow \frac{|z_0|}{2} \leq |z|,$$

et donc

$$|f(z) - f(z_0)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \left|\frac{z_0 - z}{z\, z_0}\right| \leq \frac{2}{|z_0|^2}|z - z_0| \xrightarrow[z\to z_0]{} 0.$$

Proposition 2.1. *Si f et g sont continues en $z_0 \in \mathbb{C}$ (resp. sur Ω), alors $f + g$ est continue en z_0 (resp. sur Ω) et $f\,g$ est continue en z_0 (resp. sur Ω).*

De plus, si $g(z_0) \neq 0$ (resp. si g ne s'annule pas sur Ω), alors $\frac{1}{g}$ est continue en z_0 (resp. sur Ω).

Cette proposition implique par une récurrence directe que si f est continue en z_0, alors f^n l'est pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, on a z^n continue sur $\mathbb{C}$, et encore par la Proposition 2.1, tout polynôme de la variable complexe est continue sur $\mathbb{C}$.

Toujours par la Proposition 2.1, toute fonction rationnelle de la variable complexe est continue sur $\mathbb{C}$ privé de ses pôles.

Finalement, une autre conséquence de cette proposition est que $z \mapsto \bar{z}$ est continue sur $\mathbb{C}$, puisque $\bar{z} = \Re(z) - \imath\,\Im(z)$.

Démonstration de la Proposition 2.1. Le fait que $f + g$ soit continue en z_0 est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire, puisque

$$|(f + g)(z) - (f + g)(z_0)| = |f(z) - f(z_0) + g(z) - g(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)|.$$

Pour le produit, on s'en sort de la même manière, puisque

$$\begin{aligned}
|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &= |f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)| \\
&\leq |g(z)|\,|f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)|\,|g(z) - g(z_0)| \\
&= |g(z) - g(z_0) + g(z_0)|\,|f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)|\,|g(z) - g(z_0)| \\
&\leq |g(z) - g(z_0)|\,|f(z) - f(z_0)| + |g(z_0)|\,|f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)|\,|g(z) - g(z_0)|.
\end{aligned}$$

Enfin, si $g(z_0) \neq 0$, on note $\alpha = \frac{|g(z_0)|}{2} > 0$. Il existe $\eta_\alpha > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_{\eta_\alpha}(z_0)$, $|g(z) - g(z_0)| < \alpha$, ce qui implique en particulier $|g(z)| > \alpha$, et donc $g(z) \neq 0$. Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{D}_{\eta_\alpha}(z_0)$, on a

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\right| = \left|\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)\, g(z_0)}\right| \leq \frac{|g(z) - g(z_0)|}{2\,\alpha^2}.$$

Le résultat suit. □

Proposition 2.2. *Soit $g : \Omega_1 \mapsto \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ et $f : \Omega_2 \mapsto \mathbb{C}$. Si g est continue en $z_0 \in \Omega_1$ (resp. sur Ω_1) et f est continue en $g(z_0)$ (resp. sur Ω_2), alors $f \circ g$ est continue en z_0 (resp. sur Ω_1).*

Démonstration. Commençons par noter que $f \circ g$ est bien défini, puisque pour tout $z \in \Omega_1$, $g(z) \in \Omega_2$ et f est définie sur Ω_2. Notons $Z_0 = g(z_0) \in \Omega_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout Z dans $\mathcal{D}_\mu(Z_0) \cap \Omega_2$, $|f(Z) - f(Z_0)| < \varepsilon$.

Par ailleurs, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_\eta(z_0) \cap \Omega_1$, on a $|g(z) - g(z_0)| < \mu$. En particulier, pour tout z dans $\mathcal{D}_\eta(z_0) \cap \Omega_1$, $g(z)$ appartient à $\mathcal{D}_\mu(Z_0) \cap \Omega_2$, et donc

$$|f(g(z)) - f(g(z_0))| = |f(g(z)) - f(Z_0)| < \varepsilon.$$

Le résultat suit. □

2.2 Fonctions holomorphes

Nous allons maintenant nous tourner vers la notion nouvelle ici, à savoir la dérivabilité au sens complexe.

Définition 2.3 (Fonctions holomorphes)**.** *On dit que $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ est dérivable (au sens complexe) en $z_0 \in \Omega$ si il existe un complexe c tel que*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c.$$

Dans ce cas, on pose $f'(z_0) = c$, et on dit que $f'(z_0)$ est la dérivée de f en z_0. On a donc : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega$ tel que $0 < |z - z_0| < \eta$,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

On dit que f est holomorphe *sur Ω si f est dérivable en tout z_0 de Ω. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.*

Enfin, on pose

$$C^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{C},\ f \text{ dérivable},\ f' \in C^0(\Omega) \right\}.$$

De manière équivalente, f est dérivable en z_0 si il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + o(z - z_0),$$

soit encore il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant

$$\lim_{z \mapsto z_0} \varepsilon(z) = 0,$$

tels que

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0)\, \varepsilon(z).$$

Exercice 2.1 (Facile)**.** *Montrez que si $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in \Omega$, alors elle est continue en $z_0 \in \Omega$.*

Quelques exemples : la fonction constante $f(z) = c$, avec $c \in \mathbb{C}$ fixé, est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée $f' = 0$, puisque pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z \neq z_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0.$$

De même, la fontion $f(z) = z$ est bien évidemment holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, de dérivée $f'(z) = 1$, puisque pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z \neq z_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1.$$

Il en est de même pour $f(z) = z^n$ avec $n \in \mathbb{N}_*$, puisque pour tout $z,\ z_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$z^n = (z-z_0+z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^k (z-z_0)^{n-k} = z_0^n + (z-z_0)\, n\, z_0^{n-1} + (z-z_0) \underbrace{\left((z-z_0) \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k z_0^k (z-z_0)^{n-2-k} \right)}_{\varepsilon(z)}.$$

Comme attendu, on a $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

Exercice 2.2. *Montrez que $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_*$, avec pour tout $z \neq 0$, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.*

Correction
On peut par exemple écrire que pour tout $z \neq 0$ et $z_0 \neq 0$, on a

$$f(z) - f(z_0) = -\frac{z - z_0}{z\, z_0},$$

et donc si de plus $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -\frac{1}{z\, z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} -\frac{1}{z_0^2},$$

par continuité de f sur $\mathbb{C}_*$.

Exercice 2.3. *Montrez que $f_{\Re}(z) = \Re(z)$ et $f_{\Im}(z) = \Im(z)$ ne sont dérivables en aucun z_0 de $\mathbb{C}$.*

Correction
On va juste montrer le résultat pour $f_{\Re}$, la démonstration pour $f_{\Im}$ étant similaire. Soit $z_0 = x_0 + \imath y_0 \in \mathbb{C}$ et $\omega = t + \imath s \in \mathbb{C}_*$. On a

$$\frac{f_{\Re}(z_0 + \omega) - f_{\Re}(z_0)}{\omega} = \frac{t}{t + \imath s}.$$

On a donc, pour $t \neq 0$ et $s \neq 0$,

$$\frac{f_{\Re}(z_0 + t) - f_{\Re}(z_0)}{t} = 1 \text{ et } \frac{f_{\Re}(z_0 + \imath s) - f_{\Re}(z_0)}{\imath s} = 0,$$

f n'est donc pas dérivable.

Proposition 2.3. *Soit $f,\ g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Si f et g sont dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors*
- *$f + g$ est dérivable en z_0, de dérivée $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$,*
- *$f\, g$ est dérivable en z_0, de dérivée $(f\, g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$.*

Si de plus $g(z_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en z_0, de dérivée

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Démonstration. Si f et g sont dérivables en $z_0 \in \Omega$, on a, pour tout z dans Ω,

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0) + (z - z_0)\, \varepsilon_f(z),\ g(z) = g(z_0) + (z - z_0)\, g'(z_0) + (z - z_0)\, \varepsilon_g(z),$$

avec

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon_f(z) = \lim_{z \to z_0} \varepsilon_g(z) = 0.$$

On a alors

$$(f+g)(z) = f(z)+g(z) = f(z_0)+(z-z_0)\, f'(z_0)+(z-z_0)\,\varepsilon_f(z)+g(z_0)+(z-z_0)\, g'(z_0)+(z-z_0)\,\varepsilon_g(z)$$
$$= (f+g)(z_0) + (z-z_0)\,(f'(z_0)+g'(z_0)) + (z-z_0)\varepsilon_{f+g}(z),$$

avec

$$\varepsilon_{f+g}(z) = \varepsilon_f(z) + \varepsilon_g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0.$$

De même, on a

$$(f\,g)(z) = (f\,g)(z_0) + (z-z_0)\,\left(f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)\right) + (z-z_0)\,\varepsilon_{fg}(z),$$

avec

$$\varepsilon_{fg}(z) = f(z_0)\,\varepsilon_g(z) + (z-z_0)f'(z_0)\,g'(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)\,\varepsilon_g(z) + \varepsilon_f(z)\,g(z_0)$$
$$+ (z-z_0)\,\varepsilon_f(z)\,g'(z_0) + (z-z_0)\,\varepsilon_f(z)\,\varepsilon_g(z)$$

qui vérifie bien $\lim_{z\to z_0} \varepsilon_{fg}(z) = 0$.

Finalement, si g est dérivable en z_0, elle y est continue. Donc si $g(z_0) \neq 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathcal{D}_\eta(z_0)$. Pour tout $z \in \mathcal{D}_\eta(z_0)$, on a donc

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} - \frac{g(z)-g(z_0)}{g(z_0)\,g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} - (z-z_0)\frac{g'(z_0)+\varepsilon_g(z)}{g(z)\,g(z_0)}.$$

On a donc, pour tout $z \in \mathcal{D}_\eta(z_0)$, $z \neq z_0$,

$$\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\right) = -\frac{g'(z_0)+\varepsilon_g(z)}{g(z)\,g(z_0)} \xrightarrow[z\to z_0]{} -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

□

Exercice 2.4. *Montrez que $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.*

Correction

Supposons que f soit dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, comme pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, on aurait $z \mapsto \Re(z)$ dérivable en z_0 par la Proposition 2.3, ce que l'on sait ne pas être le cas...

Remarque 2.1. *Si f est holomorphe sur un ouvert Ω_1 de $\mathbb{C}$, et g est holomorphe sur un second ouvert Ω_2 de $\mathbb{C}$, alors $f+g$ est holomorphe sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$, ouvert qui est éventuellement vide.*

Corollaire 2.1. *Soit f et g appartenant à $H(\Omega)$. Alors*
- *$f+g \in H(\Omega)$, avec $(f+g)' = f'+g'$,*
- *$f\,g \in H(\Omega)$, avec $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$,*
- *$\dfrac{1}{g} \in H(\tilde{\Omega})$, avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, et $\tilde{\Omega} := \{z \in \Omega,\ g(z) \neq 0\}$.*

Il est donc clair que tout polynôme de la variable complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier, et que toute fraction rationnelle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de ses pôles.

Proposition 2.4. *Soit $g : \Omega_1 \mapsto \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ et $f : \Omega_2 \mapsto \mathbb{C}$. Si g est dérivable en z_0 (resp. sur Ω_1) et f est dérivable en $g(z_0)$ (resp. sur Ω_2), alors $f \circ g$ est dérivable en z_0 (resp. sur Ω_1), et on a*

$$(f\circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\,g'(z_0) \ \ (\textit{resp. } (f\circ g)' = (f'\circ g)\,g').$$

Démonstration. Notons $Z_0 = g(z_0) \in \Omega_2$. Si g est dérivable en z_0, on a , pour tout z dans Ω_1,

$$g(z) = g(z_0) + (z - z_0)\, g'(z_0) + (z - z_0)\, \varepsilon_g(z) = Z_0 + (z - z_0)\, g'(z_0) + (z - z_0)\, \varepsilon_g(z), \ \lim_{z \to z_0} \varepsilon_g(z) = 0.$$

Si f est dérivable en Z_0, on a, pour tout Z dans Ω_2,

$$f(Z) = f(Z_0) + (Z - Z_0) f'(Z_0) + (Z - Z_0)\varepsilon_f(Z), \ \lim_{Z \to Z_0} \varepsilon_f(Z) = 0.$$

On a donc, pour tout z dans Ω_1,

$$\begin{aligned} f(g(z)) = f(Z_0) + (g(z) - Z_0) f'(Z_0) + (g(z) - Z_0)\, \varepsilon_f(g(z)) = f(g(z_0)) + (z - z_0)\, g'(z_0)\, f'(g(z_0)) \\ + (z - z_0)\, \varepsilon_g(z)\, f'(g(z_0)) + (z - z_0)\, g'(z_0)\, \varepsilon_f(g(z)) + (z - z_0)\, \varepsilon_g(z)\, \varepsilon_f(g(z)). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon_g(z)\, f'(g(z_0)) + g'(z_0)\, \varepsilon_f(g(z)) + \varepsilon_g(z)\, \varepsilon_f(g(z)) = 0,$$

le résultat suit. $\square$

Exercice 2.5. *Soit $f \in H(\Omega)$, a, b deux réels, $a < b$, et $\gamma \in C^1(]a, b[; \Omega)$. Montrez que*

— *$f \circ \gamma :]a, b[\mapsto \mathbb{C}$ est C^1, de dérivée*

$$(f \circ \gamma)' = (f' \circ \gamma)\gamma',$$

— *$g : t \in]a, b[\mapsto \Re\left(f(\gamma(t))\right)$ est C^1, de dérivée*

$$g'(t) = \Re\left(f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\right),$$

— *$h : t \in]a, b[\mapsto \Im\left(f(\gamma(t))\right)$ est C^1, de dérivée*

$$h'(t) = \Im\left(f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\right).$$

Correction

Pour $t_0 \in]a, b[$, notons $z_0 = \gamma(t_0)$. Comme f est dérivable en z_0, on a

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon_f(z) = f(\gamma(t_0)) + f'(\gamma(t_0))(z - \gamma(t_0)) + (z - \gamma(t_0))\varepsilon_f(z),$$

avec $\lim_{z \to z_0 = \gamma(t_0)} \varepsilon_f(z) = 0$. En particulier, pour $t \in]a, b[$,

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0)) + f'(\gamma(t_0))(\gamma(t) - \gamma(t_0)) + (\gamma(t) - \gamma(t_0))\varepsilon_f(\gamma(t)).$$

Comme γ est dérivable en t_0, on a

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_\gamma(t),$$

avec $\lim_{t \to t_0} \varepsilon_\gamma(t) = 0$. Il vient

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = f'(\gamma(t_0))\left[\gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_\gamma(t)\right] \\ + \left[\gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_\gamma(t)\right] \varepsilon_f(\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_\gamma(t)). \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t),$$

avec

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\gamma(t) + \left[\gamma'(t_0) + \varepsilon_\gamma(t)\right] \varepsilon_f(\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_\gamma(t)),$$

qui vérifie $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = 0$. D'où le premier point.

On a de plus immédiatement

$$\begin{aligned}\Re\left(f(\gamma(t))\right) - \Re\left(f(\gamma(t_0))\right) = \Re\left[f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))\right] &= \Re\left[f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t)\right] \\ &= (t-t_0)\Re\left[f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)\right] + (t-t_0)\Re(\varepsilon(t)).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\to t_0} \Re(\varepsilon(t)) = 0$, le résultat suit. Le dernier point est identique.

Remarque 2.2. *Si f est holomorphe dans Ω et γ est C^1 sur $]a, b[$, il vient donc que $\Re(f\circ g)$ et $\Im(f\circ g)$ sont deux fonctions C^1 sur $]a, b[$, qui vérifient*

$$(\Re(f\circ g))' = \Re\left[(f\circ g)'\right], \quad (\Im(f\circ g))' = \Im\left[(f\circ g)'\right].$$

2.3 Conditions de Cauchy – Critère d'holomorphie

Soit $f : z \in \Omega \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ continue. Pour $z = x + \imath y$, on note

$$P(x, y) = \Re(f(x + \imath y)),\ Q(x, y) = \Im(f(x + \imath y)).$$

Par définition, $P : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $Q : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, avec

$$\tilde{\Omega} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + \imath y \in \Omega\right\},$$

et comme f est continue (comme fonction de la variable complexe), P et Q le sont (comme fonctions de deux variables réelles).

Proposition 2.5. *Soit $z_0 = x_0 + \imath y_0 \in \Omega$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- *f est dérivable en z_0,*
- *P et Q sont différentiables en (x_0, y_0), donc admettent des dérivées partielles en (x_0, y_0), et on a*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.1}$$

De plus, si f est dérivable en $z_0 = x_0 + \imath y_0$, on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \imath\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Démonstration. Supposons tout d'abord f dérivable en $z_0 = x_0 + \imath y_0$, de dérivée $f'(z_0) = \alpha + \imath\beta$. Soit $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x_0 + t + \imath(y_0 + s) \in \Omega$. On a part définition

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(t + \imath s),$$

avec $\varepsilon(\tilde{z}) \xrightarrow[\tilde{z}\to 0]{} 0$. On a donc

$$\begin{aligned}&P(x_0 + t, y_0 + s) + \imath Q(x_0 + t, y_0 + s) = P(x_0, y_0) + \imath Q(x_0, y_0) + (t + \imath s)(\alpha + \imath\beta) + (t + \imath s)\varepsilon(t + \imath s)\\ &= P(x_0, y_0) + (\alpha t - \beta s) + t\,\Re(\varepsilon(t + \imath s)) - s\Im(\varepsilon(t + \imath s)) + \imath\big(Q(x_0, y_0) + (\beta t + \alpha s) + t\,\Im(\varepsilon(t + \imath s)) + s\,\Re(\varepsilon(t + \imath s))\big).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Notons que

$$t\,\Re(\varepsilon(t + \imath s)) - s\Im(\varepsilon(t + \imath s)) = o(\|(t, s)\|).$$

En effet

$$|t\,\Re(\varepsilon(t + \imath s)) - s\Im(\varepsilon(t + \imath s))| \leq \sqrt{t^2 + s^2}\,|\varepsilon(t + \imath s))|.$$

De la même manière, on a

$$t\,\Im(\varepsilon(t+\imath s)) + s\,\Re(\varepsilon(t+\imath s)) = o(\|(t,s)\|).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans (2.2), on obtient alors

$$P(x_0+t, y_0+s) = P(x_0,y_0)+(\alpha\, t-\beta s)+o(\|(t,s)\|),\ Q(x_0+t, y_0+s) = Q(x_0,y_0)+(\beta t+\alpha s)+o(\|(t,s)\|),$$

ce qui montre que P et Q sont différentiables en (x_0, y_0), et de plus

$$\partial_x P(x_0,y_0) = \alpha = \partial_y Q(x_0,y_0), \quad \partial_y P(x_0,y_0) = -\beta = -\partial_x Q(x_0,y_0).$$

Supposons maintenant P et Q différentiables en $(x_0, y_0) \in \tilde{\Omega}$, avec des dérivées partielles vérifiant (2.1). Notons

$$\partial_x P(x_0,y_0) = \alpha, \quad \partial_y P(x_0,y_0) = -\beta.$$

Par définition, pour tout (t, s) tel que $(x_0 + t, y_0 + s) \in \tilde{\Omega}$, on a

$$P(x_0+t, y_0+s) = P(x_0,y_0)+\alpha t-\beta s+o(\|(t,s)\|), \quad Q(x_0+t, y_0+s) = Q(x_0,y0)+\beta t+\alpha s+o(\|(t,s)\|).$$

Notons $z_0 = x_0 + \imath y_0 \in \Omega$ et $\omega = t + \imath s$, avec $\|t, s\|$ assez petit pour que $z = z_0 + \omega \in \tilde{\Omega}$. On a immédiatement

$$f(z_0+\omega) = f(z_0) + (\alpha+\imath\beta)\,(t+\imath s) + o(\|(t,s)\|) = f(z_0) + \omega\,(\alpha+\imath\beta) + o(|\omega|).$$

On a donc, pour $\omega \neq 0$,

$$\frac{f(z_0+\omega)-f(z_0)}{\omega} = (\alpha+\imath\beta) + \frac{|\omega|}{\omega}\varepsilon(\omega) \xrightarrow[\omega\to 0]{} (\alpha+\imath\beta),$$

ce qui montre que f est dérivable en z_0, de dérivée $f'(z_0) = \alpha + \imath\beta$. □

Remarque 2.3. *Pour ne pas faire d'erreur de signe sur le critère de Cauchy, il suffit de se rappeler que $z \mapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, si $z = x + \imath y$, on a*

$$z^2 = x^2 - y^2 + \imath 2\,x\,y = P(x,y) + \imath Q(x,y),$$

et donc

$$\partial_x P = 2\,x = \partial_y Q \text{ et } \partial_y P = -2\,y = -\partial_x Q.$$

Remarque 2.4. *Il est intéressant de noter que si l'on connaît, par exemple, la partie réelle d'une fonction de $H(\Omega)$, alors on connaît sa partie imaginaire à une constante près grâce aux relations* (2.1), *et vice-versa.*

Par exemple, considérons $f \in H(\mathbb{C})$ tel que $\Re(f(z = x + \imath y)) = P(x, y) = x^3 - 3\,x\,y^2$. Posons $\Im(f(x + \imath y)) = Q(x, y)$. On a alors

$$\partial_x P = 3\,x^2 - 3\,y^2 = \partial_y Q \Rightarrow Q(x,y) = 3\,x^2\,y - y^3 + h(x),$$

et

$$\partial_y P = -6\,x\,y = -\partial_x Q = -6\,x\,y + h'(x) \Rightarrow h(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Au final, on a donc

$$f(z = x+\imath y) = P(x,y) + \imath Q(x,y) = x^3 - 3\,x\,y^2 + \imath(3\,x^2\,y - y^3 + c) = z^3 + \imath c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.6. *Soit* $P : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - 3\,x\,y^2 + 2\,x^2 - 2\,y^2 + 3\,x$*. Trouvez* $Q : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *tel que* $f(z = x + \imath\,y) = P(x, y) + \imath Q(x, y)$ *soit holomorphe sur* $\mathbb{C}$*.*

Grâce à la Proposition 2.5, il est très simple de retrouver que, par exemple, $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_*$, alors que $z \mapsto \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet, pour $z = x + \imath y \neq 0$, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \imath y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \imath \frac{y}{x^2 + y^2} = P(x, y) + \imath Q(x, y),$$

et donc pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}$,

$$\partial_x P(x_0, y_0) = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{2\,x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)}$$

et

$$\partial_y Q(x_0, y_0) = -\frac{1}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{2y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)},$$

l'autre relation se vérifiant par un calcul direct.

Par contre, pour $z = x + \imath y$ dans $\mathbb{C}$, on a $\bar{z} = x - \imath y = P(x, y) + \imath Q(x, y)$, ce qui montre directement que $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas dérivable, puisque

$$\partial_x P = 1 \neq \partial_y Q = -1.$$

Exercice 2.7. *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$*. Soit* f *holomorphe sur* Ω*, vérifiant* $f' = 0$ *sur* Ω*. Montrez que* f *est constante sur* Ω*.*

Exercice 2.8. *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$*, et* $f \in H(\Omega)$*. Montrez que les conditions suivantes sont équivalente :*

(i) f *est constante sur* Ω*,*

(ii) $\Re(f)$ *est constante sur* Ω*,*

(iii) $\Im(f)$ *est constante sur* Ω*,*

(iv) $|f|$ *est constante sur* Ω*.*

Corollaire : en déduire que toute fonction holomorphe à image dans $\mathbb{R}$ *est constante.*

Correction

Clairement, *(i)* implique *(ii)* et *(iii)* et *(iv)*. Les relations de Cauchy donnent très simplement que *(ii)* est équivalent à *(iii)*, et implique donc *(i)*.

On va donc montrer *(iv)* implique (ii). Supposons donc $|f|^2 = P^2 + Q^2 = \alpha^2$ dans Ω, avec $\alpha \geq 0$. Différentier cette équation par rapport à x et y donne

$$P\,\partial_x P + Q\,\partial_x Q = 0 \text{ et } P\,\partial_y P + Q\,\partial_y Q = 0.$$

En utilisant les relations de Cauchy, on en déduit

$$P\,\partial_x P = Q\,\partial_y P \text{ et } P\,\partial_y P = -Q\,\partial_x P.$$

On a donc

$$P^2\,(\partial_x P)^2 = Q^2\,(\partial_y P)^2 = (\alpha^2 - P^2)\,(\partial_y P)^2\,,$$

et

$$P^2\,(\partial_y P)^2 = Q^2\,(\partial_x P)^2 = (\alpha^2 - P^2)\,(\partial_x P)^2\,,$$

ce qui donne en additionnant les deux relations

$$P^2|\nabla P|^2 = (\alpha^2 - P^2)|\nabla P|^2 \Rightarrow |\nabla P|^2\,(2\,P^2 - \alpha^2) = 0. \tag{2.3}$$

Si $2\,P^2 = \alpha^2$ dans $\tilde{\Omega}$, le résultat est immédiat. Si ce n'est pas le cas, il existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in \tilde{\Omega}$ tel que $2\,P(\bar{x}, \bar{y})^2 \neq \alpha$. Posons alors

$$\tilde{\omega} = \left\{(x, y) \in \tilde{\Omega}, P(x, y) = P(\bar{x}, \bar{y})\right\}.$$

L'ensemble $\tilde{\omega}$ est non vide puisque $(\bar{x}, \bar{y}) \in \tilde{\omega}$, il est fermé par continuité de P. Montrons qu'il est ouvert : soit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\omega}$, on a $2\,P(\tilde{x}, \tilde{y})^2 = 2\,P(\bar{x}, \bar{y})^2 \neq \alpha^2$, donc par continuité de P il existe $r > 0$ tel que pour tout (x, y) dans la boule de rayon r centré en $(\tilde{x}, \tilde{y})$, on a $2\,P(x, y)^2 \neq \alpha$. Par (2.3), on a alors $\nabla P = 0$ sur cette boule qui est connexe, donc P est constante sur cette boule, d'où $P(x, y) = P(\tilde{x}, \tilde{y}) = P(\bar{x}, \bar{y})$ pour tout (x, y) dans la boule : la boule est dans $\tilde{\omega}$, et donc $\tilde{\omega}$ est ouvert.

On conclut alors par connexité de $\tilde{\Omega}$: $\tilde{\omega}$ est un ouvert fermé non vide de $\tilde{\Omega}$ connexe, on a donc $\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}$, ce qui implique en particulier *(ii)*.

Les relations (2.1) établissent un lien entre les fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$, et les fonctions harmoniques de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit f holomorphe dans Ω, avec

$$f(z) = f(x + \imath y) = P(x, y) + \imath\, Q(x, y)$$

avec $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ suivant les notations de cette section. Supposons que P et Q soient C^2 sur $\tilde{\Omega}$. Alors les relations (2.1) donnent

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

On a donc

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

dans $\tilde{\Omega}$, et un calcul similaire montre que $\Delta Q = 0$ dans $\tilde{\Omega}$ également : *P et Q sont harmoniques dans $\tilde{\Omega}$.*

Il se trouve que la réciproque est vraie, si $\tilde{\Omega}$ est simplement connexe :

Proposition 2.6. *Soit $P \in C^2(\tilde{\Omega})$, harmonique dans $\tilde{\Omega}$ simplement connexe. Il existe $f \in H(\Omega)$ tel que pour tout $z = x + \imath y \in \Omega$, $\Re(f(z)) = P(x, y)$.*

Pour démontrer ce résultat, on va avoir besoin du

Théorème 2.1 (Théorème de Poincaré)**.** *Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, et*

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

une forme différentielle de classe C^1 sur $\tilde{\Omega}$. Alors ω est fermée si et seulement si ω est exacte.

Une conséquence de ce théorème est que si on a deux fonctions a et b de classe C^1 sur $\tilde{\Omega}$, il existe une fonction f de classe C^2 sur $\tilde{\Omega}$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a,\ \frac{\partial f}{\partial y} = b,$$

si et seulement si $\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}$. C'est ce que nous allons utiliser dans la preuve de la Proposition 2.6.

Démonstration de la Proposition 2.6. Il suffit de montrer qu'il existe Q différentiable sur $\tilde{\Omega}$ et vérifiant les relations (2.1). On veut donc Q différentiable tel que

$$\partial_x Q = -\partial_y P \text{ et } \partial_y Q = \partial_x P.$$

Mais le Théorème de Poincaré nous dit directement qu'un tel Q existe, puisque $\tilde{\Omega}$ est simplement connexe et

$$-\partial_{yy} P = \partial_{xx} P,$$

P étant par hypothèse harmonique sur $\tilde{\Omega}$. Le résultat suit. $\square$

Corollaire 2.2. *Soit $P \in C^2(\tilde{\Omega})$, harmonique dans $\tilde{\Omega}$ ouvert quelconque de $\mathbb{R}^2$. Alors P est localement la partie réelle d'un fonction harmonique.*

Démonstration. Soit (x_0, y_0) dans $\tilde{\Omega}$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\tilde{\mathcal{O}}_0$, boule centrée en (x_0, y_0) de rayon η, soit contenue dans $\tilde{\Omega}$. Comme $\tilde{\mathcal{O}}_0$ est simplement connexe, le résultat suit. $\square$

2.4 Fonctions analytiques complexes

2.4.1 Séries de réels positifs

Cette partie est constituée de rappels de L2.

Lemme 2.1. *Soit $\rho \in [0, 1)$. On a*

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2\,\rho^n = \frac{\rho+\rho^2}{(1-\rho)^3}$.

Démonstration. *(i)* – on a

$$(1-\rho)\sum_{n=0}^{N} \rho^n = \sum_{n=0}^{N} \rho^n - \sum_{n=1}^{N+1} \rho^n = 1 - \rho^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1.$$

(ii) – on a

$$\begin{aligned}(1-\rho)\sum_{n=0}^{N} n\,\rho^n &= \sum_{n=0}^{N} n\,\rho^n - \sum_{n=0}^{N} n\,\rho^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} n\,\rho^n - \sum_{n=0}^{N} (n+1)\,\rho^{n+1} + \sum_{n=0}^{N} \rho^{n+1} \\ &= -(N+1)\,\rho^{N+1} + \rho\sum_{n=0}^{N} \rho^n \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\rho}{1-\rho}.\end{aligned}$$

(iii) – on a

$$\begin{aligned}(1-\rho)\sum_{n=0}^{N} n^2\,\rho^n &= \sum_{n=0}^{N} n^2\,\rho^n - \sum_{n=0}^{N} n^2\,\rho^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} n^2\,\rho^n - \sum_{n=0}^{N} (n+1)^2\,\rho^{n+1} + \sum_{n=0}^{N} 2\,n\,\rho^{n+1} + \sum_{n=0}^{N} \rho^{n+1} \\ &= -(N+1)^2\,\rho^{N+1} + 2\,\rho\sum_{n=0}^{N} n\,\rho^n + \rho\sum_{n=0}^{N} \rho^n \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2+\rho}{(1-\rho)^2}.\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 2.2. *On a*

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty.$$

Par ailleurs, il existe $L_1 < \infty$ et $L_2 < \infty$ tels que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} L_1, \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} L_2.$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}_*$. On note que

$$\sum_{n=0}^{2\,N} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=N+1}^{2\,N} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=N+1}^{2\,N} \frac{1}{2\,N+1} \geq \frac{N}{2N+1} \geq \frac{1}{3}.$$

La suite $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}$ est donc une suite croissante qui ne converge pas (puisqu'elle n'est pas de Cauchy), donc elle tend vers l'infini.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note

$$v_N = \sum_{n=0}^{2\,N+2} \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad w_N = \sum_{n=0}^{2\,N+1} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Il vient

$$v_{N+1} - v_N = \frac{(-1)^{2\,N+4}}{2\,N+5} + \frac{(-1)^{2\,N+3}}{2\,N+4} = \frac{1}{2\,N+5} - \frac{1}{2\,N+4} < 0,$$
$$u_{N+1} - u_N = \frac{(-1)^{2\,N+3}}{2\,N+4} + \frac{(-1)^{2\,N+2}}{2\,N+3} = \frac{1}{2\,N+3} - \frac{1}{2\,N+4} > 0,$$

et

$$v_N - u_N = \frac{(-1)^{2\,N+2}}{2\,N+3} = \frac{1}{2\,N+3} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Les suites (v_N) et (u_N) sont donc adjacentes, elles convergent vers la même limite L_1, qui est aussi la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Pour $n \in N$, $n > 1$, on a

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{N} < 2.$$

La suite $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^2}$ est croissante majorée, donc elle converge. $\square$

Lemme 2.3 (Règle de Cauchy)**.** *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On note*

$$V = \limsup_{n\to\infty} v_n^{\frac{1}{n}} \left(:= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} v_k^{\frac{1}{k}} \right).$$

Alors
- *si $V < 1$, la série $\sum v_n$ converge,*
- *si $V > 1$, la série $\sum v_n$ diverge grossièrement.*

Démonstration. Supposons d'abord $V < 1$, et prenons $\varepsilon > 0$ tel que $\rho := V + \varepsilon < 1$. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \geq M$, on ait

$$\sup_{k\geq n} v_k^{\frac{1}{k}} < V + \varepsilon = \rho,$$

ce qui implique en particulier que $v_n \leq \rho^n$ pour tout $n \geq M$. Comme la série $\sum \rho^n$ converge, la série $\sum v_n$ converge également.

Si maintenant $V > 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho = V + \varepsilon > 1$. Par un raisonnement similaire, on obtient que pour tout N, il existe $n \geq N$ tel que $v_n \geq \rho^n > 1$. On crée ainsi une sous-suite $V_{n(N)}$ dont tous les termes sont plus grands que 1 : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend donc pas vers 0. $\square$

Lemme 2.4 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs, non nuls à partir d'un certain rang. On note*

$$0 \le l = \liminf_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} \left(:= \lim_{n\to\infty} \inf_{p\ge n} \frac{v_{p+1}}{v_p} \right) \le L = \limsup_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} \le +\infty.$$

Alors
— *si* $L < 1$*, la série* $\sum v_n$ *converge,*
— *si* $l > 1$*, la série* $\sum v_n$ *diverge grossièrement.*

Avant de prouver ce résultat, notons que l'hypothèse *non nuls à partir d'un certain rang* assure simplement que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est bien défini pour n assez grand. De plus, on peut tout à fait s'en passer. En effet, si tous les v_n sont nuls pour n assez grand, alors la série est évidemment convergente, et sinon, comme

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{v\in\mathscr{P}_N} v,$$

où

$$\mathscr{P}_N = \{v_n, n \le N, v_n \neq 0\},$$

il suffit d'étudier la suite $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite en enlevant de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tous les termes nuls, série pour qui le quotient $\frac{\tilde{v}_{n+1}}{\tilde{v}_n}$ est toujours bien défini.

Démonstration du Lemme 2.4. Supposons $L < 1$, et soit $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $L < \rho < 1$. Il existe $N \ge 0$ tel que pour tout $n \ge N$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \le \rho \Leftrightarrow v_{n+1} \le \rho\, v_n,$$

ce qui implique par une récurrence immédiate

$$\forall n \ge N,\ v_n \le \rho^{n-N} v_N = \rho^n \frac{v_N}{\rho^N} = M\,\rho^n.$$

Comme la série $\sum M\rho^n$ converge, il en est de même pour la série $\sum v_n$.

Supposons $l > 1$, et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \rho < l$. Il existe $N \ge 0$ tel que pour tout $n \ge n$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge \rho > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

La suite est donc strictement croissante à partir de l'indice N, en particulier $u_n \ge u_N > 0$, et donc la suite ne peut pas tendre vers 0. □

Lemme 2.5 (Produit de Cauchy)**.** *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries complexes absolument convergentes. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}.$$

Alors $\sum c_n$ *est absolument convergente et*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Démonstration. Dans un premier temps, on a

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| = \sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{p=0}^{k} a_k\, b_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k} |a_k|\,|b_{n-k}| = \sum_{p=0}^{n}\left(|a_p| \sum_{k=0}^{n-p} |b_k|\right) \le \left(\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right),$$

ce qui montre que la série $\sum c_n$ est absolument convergente.

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Il vient

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p} = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=p}^{n} a_p b_{k-p} = \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{k=0}^{n-p} b_k = \sum_{p=0}^{n} a_p \, B_{n-p},$$

d'où l'on tire

$$C_n - A_\infty \, B_\infty = \sum_{p=0}^{n} a_p \left(B_{n-p} - B_\infty \right) + \left(A_n - A_\infty \right) B_\infty.$$

En particulier, on obtient

$$|C_n - A_\infty \, B_\infty| \leq \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |a_p| \, |B_{n-p} - B_\infty| + \sum_{p=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} |a_p| \, |B_{n-p} - B_\infty| + |A_n - A_\infty| \, |B_\infty|.$$

Clairement,

$$|A_n - A_\infty| \, |B_\infty| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ensuite, on a

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |a_p| \, |B_{n-p} - B_\infty| \leq \sup_{p \in \left\{0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right\}} |B_{n-p} - B_\infty| \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |a_p| \leq \sup_{p \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil} |B_p - B_\infty| \sum_{p=0}^{\infty} |a_p| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Enfin, si on note $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |B_n - B_\infty|$, on a

$$\sum_{p=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} |a_p| \, |B_{n-p} - B_\infty| \leq M \sum_{p=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} |a_p| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le résultat suit. □

Remarque 2.5. *Un lecteur attentif notera que l'on a en fait seulement besoin que l'une des deux séries soit absolument convergente pour obtenir la convergence de la série $\sum c_n$ vers le produit $A_\infty B_\infty$.*

2.4.2 Séries entières

Dans tout ce chapitre, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

Définitions – Régularité d'une série entière

Définition 2.4 (Série entière)**.** *On appelle série entière la série de fonction de la variable complexe z*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{2.4}$$

On peut bien évidemment parler de série entière centrée en z_0, de la forme

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mais comme par le changement de variable $Z = z - z_0$ on se ramène au cas précédent, nous allons concentrer notre étude sur les séries entières centrées en zéro.

Rappelons que (2.4) est une notation pour désigner la limite, si elle existe, de

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

Clairement, pour $z = 0$, la limite existe et $S(0) = a_0$. On note Ω_S l'ensemble des complexes tels que la limite existe, qui est donc un ensemble non vide. Se pose alors la question de caractériser un peu plus précisément Ω_S. Pour cela, on définit

$$R = \sup\{|z|,\, z \in \Omega_S\}\,. \tag{2.5}$$

Par définition, on a $\Omega_S \subset \overline{\mathcal{D}_R(0)}$... ce qui ne sert pas à grand chose, sauf si on remarque que l'on a aussi la proposition suivante.

Proposition 2.7. *La série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur $\mathcal{D}_R(0)$, et grossièrement divergente en dehors de $\overline{\mathcal{D}_R(0)}$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{D}_R(0)$, et $\rho = |z|$. Par définition de R, il existe $\tilde{z} \in C$, $|\tilde{z}| = \tilde{\rho} < R$ tel que $\sum a_n \tilde{z}^n$ converge. En particulier, $\lim_{n\to 0} a_n \tilde{z}^n = 0$, et donc il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n \tilde{z}^n| < 1$.

Ainsi, pour $n \geq N$, on a

$$|a_n z^n| = |a_n \tilde{z}^n| \frac{|z^n|}{|\tilde{z}^n|} < \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^n.$$

Or $\frac{\rho}{\tilde{\rho}} < 1$, et donc la série$\sum \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^n$ est convergente. On en déduit directement que la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente.

Soit maintenant $\tilde{z} \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}_R(0)}$, $\tilde{\rho} = |\tilde{z}|$. Supposons que $\sum a_n \tilde{z}^n$ ne soit pas grossièrement divergente, alors $|a_n \tilde{z}^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors, en reprenant le raisonnement précédent, on obtient sans difficulté que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $R < \rho = |z| < \tilde{\rho}$, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente, et c'est donc le cas pour la série $\sum a_n z^n$, en contradiction avec la définition. □

Ainsi, le réel R et le disque $\mathcal{D}_R(0)$ jouent un rôle fondamental dans l'étude des séries entières.

Définition 2.5. *Le réel $R \geq 0$, défini par (2.5), est appelé* rayon de convergence *de la série $\sum a_n z^n$. Le disque $\mathcal{D}_R(0)$ est appelé disque de convergence de la série.*

Lemme 2.6. *On a*

$$R = \sup\left\{ r \geq 0, \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}.$$

Démonstration. C'est immédiat, puisque pour tout $r < R$, $r \in \mathcal{D}_R(0)$ et donc la série $\sum a_n r^n$ converge absolument, alors que pour $r > R$, $r \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}_R(0)}$ et donc la série $\sum a_n r^n$ diverge grossièrement. □

Exercice 2.9. *On considère les séries entière*

$$\sum z^n, \quad \sum \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}, \quad \sum (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Calculez les rayons de convergence de ces trois séries. Que se passe-t-il sur le bord du disque de convergence ?

Proposition 2.8. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$. On pose $R = \min(R_a, R_b)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}.$$

La série entière $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R, et on a, pour tout $z \in \mathcal{D}_R(0)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du Lemme 2.5. □

Il n'est pas compliqué de voir qu'une série entière est continue sur son disque de convergence. En effet, on a la

Proposition 2.9. *Supposons $R > 0$. Pour tout ρ, $0 < \rho < R$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $\mathcal{D}_\rho(0)$.*

Démonstration. C'est direct, puisque d'un côté, on a $\sup\limits_{z \in \mathcal{D}_\rho(0)} |a_n z^n| = |a_n| \rho^n$, et d'un autre côté, comme $\rho < R$, la série $\sum |a_n| \rho^n$ est convergente. □

On en déduit directement, par les résultats connus sur les séries de fonctions, le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *La fonction $S : z \in \mathcal{D}_R(0) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue.*

Exercice 2.10. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence supérieures ou égaux à $R > 0$, et telles que pour tout $z \in \mathcal{D}_R(0)$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Montrez que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.11. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $z \in \mathcal{D}_R(0)$, on note*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Montrez que $\overline{S(z)} = S(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathcal{D}_R(0)$ si et seulement si $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.12 (IMPORTANT – Principe des zéros isolés)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ non nulle, et $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la série entière correspondante, dont on suppose le rayon de convergence R strictement positif. Montrez que il existe $r \in (0, R]$ tel que $S(z) \neq 0$ pour tout $z \in \dot{\mathcal{D}}_r(0)$.*

En déduire qu'une série entière S telle que l'origine soit un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de S est identiquement nulle.

Correction
Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$. La série entière

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n$$

a pour rayon de convergence R, et vérifie de plus $G(0) = a_k \neq 0$. Comme G est continue sur $\mathcal{D}_R(0)$, il existe $r > 0$ tel que $G(z) \neq 0$ sur $\mathcal{D}_r(0)$. Mais pour tout $z \in \dot{\mathcal{D}}_r(0)$, on a

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^{n+k} = \frac{1}{z^k} S(z).$$

Le résultat suit.

Proposition 2.10. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, d_n = (n+1)a_{n+1}, \quad p_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\, p_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum d_n z^n$ et $\sum p_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Notons R_a, R_d et R_p les rayons de convergences respectifs des séries $\sum a_n z^n$,

$$\sum d_n z^n = \sum (n+1) a_{n+1} z^n, \text{ et } \sum p_n z^n = p_0 + z \sum \frac{a_n}{n+1} z^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r \geq 0$, on a

$$\frac{|a_n|}{n+1} r^n \leq |a_n| r^n \Rightarrow R_a \leq R_p,$$

et

$$|a_{n+1}| r^{n+1} \leq (n+1)|a_{n+1}| r^{n+1} \Rightarrow R_d \leq R_a.$$

Soit finalement $r < R_p$, et ρ tel que $r < \rho < R_p$. La série $\sum |p_n| \rho^n$ converge, et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \rho^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} \rho^n = 0.$$

Ainsi, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{|a_n|}{n} \rho^n \leq 1$. Pour $n \geq N$, il vient

$$(n+1)|a_{n+1}| r^{n+1} = \frac{|a_{n+1}|}{n+1} \rho^{n+1} \, (n+1)^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1} \leq (n+1)^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1}.$$

Comme la série $\sum n^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge, on obtient $R_p \leq R_d$. Le résultat suit. □

De ce résultat, on déduit facilement qu'une série entière est holomorphe sur son disque de convergence, et même bien mieux que ça.

Corollaire 2.4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On définit*

$$S : z \in \mathcal{D}_R(0) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n,$$

et

$$D : z \in \mathcal{D}_R(0) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \, a_n \, z^{n-1}.$$

On a
- *D est bien définie et continue,*
- *S est dérivable sur $\mathcal{D}_R(0)$,*
- *pour tout $z \in \mathcal{D}_R(0)$, $S'(z) = D(z)$.*

En particulier, $S \in C^1(\mathcal{D}_R(0))$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence $R > 0$. En particulier, pour tout ρ, $0 < \rho < R$, la série $\sum n a_n z^{n-1}$ est normalement convergente sur $\mathcal{D}_\rho(0)$. Comme de plus $(a_n z^n)' = n\, a_n z^{n-1}$, le résultat est une application directe du théorème de dérivabilité des séries de fonctions. $\square$

Corollaire 2.5. *Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. S est C^∞ sur son disque de convergence, et pour tout $z \in \mathcal{D}_R(0)$ et $k \in \mathbb{N}$,*

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=n-k+1}^{n} j \right) a_n\, z^{n-k}.$$

Démonstration. C'est une simple récurrence sur le modèle de la preuve précédente. $\square$

En particulier, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$S^{(k)}(0) = k!\, a_k,$$

de sorte que pour tout $z \in \mathcal{D}_R(0)$, on a

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Ainsi, une série entière est toujours égale à sa série de Taylor sur son disque de convergence.

Ces résultats ont pour nouvelle conséquence le fait qu'une série entière admet toujours une primitive sur son disque de convergence :

Proposition 2.11. *Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et $p_0 \in \mathbb{C}$ quelconque. Alors la série*

$$P(z) = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1},$$

admet R comme rayon de convergence, et pour tout $z \in \mathcal{D}_0(R)$,

$$P'(z) = S(z).$$

Calcul du rayon de convergence Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On rappelle que par définition,

$$R = \sup \left\{ |z|, z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge} \right\},$$

et que l'on a montré par ailleurs que

$$R = \sup \left\{ r \geq 0, \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}.$$

L'objectif ici est de donner des formules de calcul de R. Commençons avec un premier lemme.

Lemme 2.7 (Lemme d'Abel)**.**

$$R = \sup \left\{ r \geq 0, \sup \left\{ |a_n| r^n, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \right\}.$$

Démonstration. Notons $\tilde{R} = \sup \left\{ r \geq 0, \sup \left\{ |a_n| r^n, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \right\}$. Soit r, ρ tels que $r < \rho < \tilde{R}$. Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \rho^n < M$. On en déduit que

$$|a_n| r^n = |a_n| \rho^n \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho} \right)^n.$$

Comme la série $\sum M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge, il en est de même de la série $\sum |a_n| r^n$, et ce pour tout $r < \tilde{R}$. Donc $\tilde{R} \leq R$.

D'un autre côté, pour $r < R$, la série $\sum |a_n| r^n$ converge, donc la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, et a fortiori est bornée : $R \leq \tilde{R}$. □

Proposition 2.12 (Théorème d'Hadamard)**.**

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \left(= \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq n} |u_p|^{\frac{1}{p}} \right).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la règle de Cauchy pour les séries de réels positifs, puisque pour tout $r \geq 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n r^n|^{\frac{1}{n}} = r \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{r}{\tilde{R}},$$

où on a noté

$$\tilde{R} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

□

Remarque 2.6. *Évidemment, si la suite* $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite* l*, alors* $R = \frac{1}{l}$*.*

Proposition 2.13. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de complexes non nuls à partir d'un certain rang. On suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l.$$

Alors la série entière $\sum a_n z^n$ *a pour rayon de convergence* $R = \frac{1}{l}$*.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la règle de d'Alembert (Lemme 2.4). □

Fonction exponentielle complexe, et digressions

Proposition 2.14. *La série entière* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *a un rayon de convergence infini.*

Démonstration. Direct, puisque $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

On peut donc définir la fonction *exponentielle complexe*, notée exp, par

$$\exp : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

C'est une fonction entière, donc C^∞ sur $\mathbb{C}$ entier, vérifiant

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z),$$

et $\exp(0) = 1$.

Proposition 2.15. *Pour tout* z_1*,* z_2 *dans* $\mathbb{C}$*,* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$*.*

Démonstration. Par le Lemme 2.5, on a

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \exp(z_1+z_2).$$

□

Corollaire 2.6. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$*,* $\exp(z) \neq 0$ *et* $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$*.*

Démonstration. C'est direct, puisque $1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z)\,\exp(-z)$. $\square$

Proposition 2.16. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\exp(x) \in \mathbb{R}$*. De plus, la restriction de la fonction exponentielle aux réels, c'est-à-dire la fonction*

$$\exp : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R},$$

est strictement positive, strictement croissante, et vérifie $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$*.*

En particulier, $\exp$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $(0, \infty)$*.*

Démonstration. Il est clair que pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Comme $\exp(0) = 1 > 0$ et que la fonction exponentielle est continue et ne s'annule jamais, on a nécessairement $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme de plus $\exp'(x) = \exp(x) > 0$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme pour tout $x > 0$, $\exp(x) > 1 + x$, on a $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Enfin, comme pour tout $x > 0$, $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$, on obtient sans peine la dernière limite. $\square$

Proposition 2.17. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$*,* $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$*.*

Démonstration. C'est le résultat de l'exercice 2.11. $\square$

Proposition 2.18. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\exp(\imath t) \in \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Démonstration. On a

$$|\exp(\imath t)|^2 = \exp(\imath t)\overline{\exp(\imath t)} = \exp(\imath t)\,\exp(\overline{\imath t}) = \exp(\imath t)\,\exp(-\imath t) = \exp(\imath t + (-\imath t)) = \exp(0) = 1.$$

$\square$

On définit alors deux nouvelles fonctions réelles :

$$\cos : t \in \mathbb{R} \mapsto \Re(\exp(\imath t)) \in \mathbb{R}, \quad \sin : t \in \mathbb{R} \mapsto \Im(\exp(\imath t)) \in \mathbb{R}.$$

Par définition, pour tout t réel,

$$\exp(\imath t) = \cos(t) + \imath \sin(t).$$

En particulier, il vient $\cos(0) + \imath \sin(0) = \exp(0) = 1 = 1 + 0\imath$, et donc $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.

Proposition 2.19. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\cos(-t) = \cos(t), \quad \sin(-t) = -\sin(t),$$

et

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

Démonstration. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a

$$\cos(-t) + \imath \sin(-t) = \exp(-\imath t) = \exp(\overline{\imath t}) = \overline{\exp(\imath t)} = \overline{\cos(t) + \imath \sin(t)} = \cos(t) - \imath \sin(t),$$

et

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = |\exp(\imath t)|^2 = 1.$$

$\square$

Proposition 2.20 (Formules trigonométriques)**.** *Pour tout* t_1*,* t_2 *dans* $\mathbb{R}$*, on a*

$$\cos(t_1 + t_2) = \cos(t_1)\cos(t_2) - \sin(t_1)\sin(t_2), \quad \sin(t_1 + t_2) = \cos(t_1)\sin(t_2) + \sin(t_1)\cos(t_2).$$

Démonstration. On a d'un côté

$$\exp(\imath(t_1+t_2)) = \cos(t_1+t_2) + \imath \sin(t_1+t_2),$$

et d'un autre

$$\begin{aligned}\exp(\imath(t_1+t_2)) = \exp(\imath t_1)\ \exp(\imath t_2) &= [\cos(t_1) + \imath \sin(t_1)]\,[\cos(t_2) + \imath \sin(t_2)] \\ &= [\cos(t_1)\cos(t_2) - \sin(t_1)\sin(t_2)] + \imath\,[\cos(t_1)\sin(t_2) + \sin(t_1)\cos(t_2)]\,.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.21 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout t réel,*

$$\cos(t) = \frac{\exp(\imath t) + \exp(-\imath t)}{2}, \quad \sin(t) = \frac{\exp(\imath t) - \exp(-\imath t)}{2\,\imath}.$$

Démonstration. On a

$$\cos(t) = \Re(\exp(\imath t)) = \frac{\exp(\imath t) + \overline{\exp(\imath t)}}{2} = \frac{\exp(\imath t) + \exp(\overline{\imath t})}{2} = \frac{\exp(\imath t) + \exp(-\imath t)}{2},$$

le résultat pour sin étant obtenu de la même manière. □

Proposition 2.22. *Les fonctions* cos *et* sin *sont C^∞ sur $\mathbb{R}$, et vérifie*

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des formules d'Euler. □

Notons

$$\mathscr{C} = \{T \in (0,+\infty),\ \forall t \in (0,T), \cos(t) > 0 \text{ et } \sin(t) > 0\}$$

Proposition 2.23. *L'ensemble $\mathscr{C}$ est non vide et majoré.*

Avant de prouver cette proposition, un lemme très simple.

Lemme 2.8. *Soient t_0, T deux réels, $t_0 < T$, et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit f continue sur $[t_0, T[$, dérivable sur $]t_0, T[$, tel que pour tout $t \in]t_0, T[$, on ait $f'(t) \leq \beta$. Alors pour tout $t \in [t_0, T[$, $f(t) \leq f(t_0) + \beta(t - t_0)$.*

Démonstration. Soit $g : t \in [t_0, T[\mapsto f(t) - \beta t$, qui est clairement continue sur $[t_0, T[$ et dérivable sur $]t_0, T[$. Pour tout $t \in]t_0, T[$, $g'(t) = f'(t) - \beta \leq 0$, donc g est décroissante sur $[t_0, T[$, et donc pour tout $t \in [t_0, T[$,

$$g(t) \leq g(t_0) \Leftrightarrow f(t) - \beta t \leq f(t_0) - \beta t_0.$$

□

Démonstration de la Proposition 2.23. Montrons que $\mathscr{C}$ est non vide. Comme $\cos(0) = 1$ et cos est continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \eta]$, $\cos(t) \geq \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $t \in [0, \eta]$, $\sin'(t) = \cos(t) \geq \frac{1}{2}$, et donc pour tout $t \in (0, \eta]$, $\sin(t) > \sin(0) = 0$. Donc $\eta \in \mathscr{C}$. On note $\sin(\eta) = \alpha > 0$.

Supposons maintenant $\mathscr{C}$ non bornée. Il vient $\cos(t) \geq 0$ et $\sin(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, pour tout $t \geq \eta$, on a $\sin'(t) = \cos(t) \geq 0$, ce qui implique $\sin(t) \geq \sin(\eta) = \alpha > 0$. Mais alors, pour tout $t \geq \eta$, on a $\cos'(t) = -\sin(t) \leq -\alpha$, et donc par le Lemme précédent, pour tout $t \geq \alpha$,

$$\cos(t) \leq \cos(\eta) - \alpha(t - \eta).$$

En choisissant $t = \dfrac{2\cos(\eta)}{\alpha} + \eta > \eta$, on obtient

$$0 \leq \cos(t) \leq -\cos(\eta) < 0,$$

ce qui est clairement une contradition. Donc $\mathscr{C}$ est majoré. □

On a donc $\sup \mathscr{C} < +\infty$, et on note

$$\pi = 2\,\sup \mathscr{C}.$$

Notons que par définition, $\pi > 0$.

Proposition 2.24. *Pour tout $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on a*

$$\cos(t) > 0, \quad \sin(t) > 0.$$

De plus

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Enfin, cos *(resp.* sin*) est une bijection strictement décroissante (resp. strictement croissante) de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans* $[0, 1]$.

Démonstration. Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathscr{C}$ tels que $T_n < \frac{\pi}{2}$ et $\left|T_n - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2(n+1)}$. Soit alors $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $t \in (0, T_n)$, et comme $T_n \in \mathscr{C}$, cela implique directement que $\cos(t) > 0$ et $\sin(t) > 0$.

En particulier $\cos(T_n) > 0$ et $\sin(T_n) > 0$. Comme T_n tend vers $\frac{\pi}{2}$, et cos et sin sont continues, il vient $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$

Supposons alors $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Par continuité de cos et sin, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in \left(0, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$, $\cos(t) > 0$ et $\sin(t) > 0$, ce qui implique $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \in \mathscr{C}$, et donc $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \sup \mathscr{C} = \frac{\pi}{2}$: contradiction.

On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ou $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Comme pour tout $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin'(t) = \cos(t) > 0$, sin est strictement croissante sur $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Notons alors que comme $T_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\left|T_0 - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$, il vient $0 < T_0 < \frac{\pi}{2}$, et donc

$$\sin(0) = 0 < \sin(T_0) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

On en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, et par $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Finalement, comme pour tout $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos'(t) = -\sin(t) < 0$ et $\sin'(t) = \cos(t) > 0$, la fin de la démonstration est immédiate. □

Proposition 2.25. *Pour tout réel t, on a*

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t), \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t),$$

$$\cos(t + \pi) = -\cos(t), \quad \sin(t + \pi) = -\sin(t),$$

$$\cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(t), \quad \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos(t),$$

$$\cos(t + 2\,\pi) = \cos(t), \quad \sin(t + 2\,\pi) = \sin(t).$$

En particulier, les fonctions cos *et* sin *sont $2\,\pi$-périodiques, et $2\,\pi$ est leur plus petite période.*

Démonstration. Les huit relations sont une conséquence directe des Propositions 2.20 et 2.24. Il est clair que cos et sin sont 2π-périodiques.

Supposons finalement qu'il existe $T \in [0, 2\,\pi)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t + T) = \cos(t)$. Il vient en particulier que $\cos(T) = \cos(0) = 1$. Or, on sait que pour tout $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) < 1$. Donc $T \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos(t) = -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc $T \notin \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Pour $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos(t) = -\cos(t - \pi) < 0$. Enfin, pour $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\cos(t) = \sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) < 1$, donc $T \notin \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Ainsi, $T = 0$.

Enfin, si $T \in [0, 2\,\pi)$ est tel que $\sin(t + T) = \sin(t)$, on obtient en dérivant $\cos(t + T) = \cos(t)$, ce qui termine la preuve. □

Exercice 2.13. *Que valent les fonctions* cos *et* sin *en* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ *et* $\frac{\pi}{3}$ *?*

Proposition 2.26. *Soient u, v deux réels tels que $u^2 + v^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi)$ tel que $\cos(\theta) = u$ et $\sin(\theta) = v$.*

Démonstration. Clairement, $|u| \in [0,1]$ et $|v| \in [0,1]$. Supposons tout d'abord que $|u| \in (0,1)$ (et donc $v \in (0,1)$). Par la Proposition 2.24, il existe un unique $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tel que $\cos(\omega) = |u|$, ce qui implique en particulier $\sin(\omega) = |v|$, puisque $\cos(\omega)^2 + \sin(\omega)^2 = 1$ et $\sin(\omega) > 0$.

Soit maintenant $\theta \in [0, 2\pi)$ tel que $|\cos(\theta)| = |u|$. Si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par unicité on a $\omega = \theta$. Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, comme par les Propositions 2.19 et 2.25 $\cos(\pi - \theta) = \cos(\theta)$ et $\pi - \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il vient $\pi - \theta = \omega$ soit encore $\theta = \pi - \omega$. En faisant le même type de raisonnement pour θ dans $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et dans $\left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right]$, il vient que les seuls θ de $[0, 2\pi)$ solutions de l'équation $|\cos(\theta)| = |u|$ sont $\theta = \omega$, $\theta = \pi - \omega$, $\theta = \pi + \omega$, $\theta = 2\pi - \omega$.

En utilisant encore la Proposition 2.25, on obtient alors

$$\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|u|\\ |v|\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos(\pi-\omega)\\ \sin(\pi-\omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-|u|\\ |v|\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos(\pi+\omega)\\ \sin(\pi+\omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-|u|\\ -|v|\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos(2\pi-\omega)\\ \sin(2\pi-\omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|u|\\ -|v|\end{pmatrix}.$$

Le résultat suit pour $|u|, |v| \in (0,1)$.

Si maintenant $u = 0$, alors $|v| = 1$. Un raisonnement similaire au précédent nous donne que $\theta \in [0, 2\pi)$ vérifie $\cos(\theta) = 0$ et $|\sin(\theta)| = 1$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Comme $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, le résultat suit.

Enfin, si $|u| = 1$ et donc $v = 0$, toujours par le même type de raisonnement on obtient que $\theta \in [0, 2\pi)$ vérifie $|\cos(\theta)| = 1$ et $\sin(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Comme $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, le résultat suit. □

De cette proposition découle directement le

Corollaire 2.7. *On a*
- *l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\imath t) \in \mathbb{U}$ est une surjection $2\pi-$périodique,*
- *l'application $t \in [0, 2\pi) \mapsto \exp(\imath t) \in \mathbb{U}$ est une bijection.*

Corollaire 2.8. *La fonction* exp *est $2\pi\imath$-périodique.*

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\ \exp(2\pi\imath) = \exp(z)\ \exp(0) = \exp(z)$. □

Théorème 2.2. *La fonction* exp *est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}_*$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction* exp
(i) est une bijection de $\mathbb{R} + \imath[\theta, \theta + 2\pi)$ dans $\mathbb{C}_*$,
(ii) est une bijection de $\mathbb{R} + \imath(\theta, \theta + 2\pi)$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathscr{D}_\theta$, où

$$\mathscr{D}_\theta = \{z = r\ \exp(\imath\theta),\ r \geq 0\}.$$

Démonstration. Notons que l'on sait déjà que $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}_*$. On va montrer (i) : comme exp est $2\pi\imath$ périodique, il suffit de montrer le résultat avec $\theta = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}_*$, alors $z \neq 0$, et on a donc

$$z = |z|\,\frac{z}{|z|}.$$

Comme $|z| > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = |z|$ (Proposition 2.16). Comme $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, il existe $t \in [0, 2\pi)$ tel que $\exp(\imath t) = \frac{z}{|z|}$ (Corollaire 2.7). On a donc

$$z = \exp(x)\ \exp(\imath t) = \exp(x + \imath t),$$

ce qui montre que exp est surjective de $\mathbb{R} + \imath[0, 2\pi)$ dans $\mathbb{C}_*$. Finalement, soit $z_1 = t_1 + \imath y_1$ et $z_2 = x_2 + \imath t_2$ tels que $\exp(x_1 + \imath t_1) = \exp(z_1) = \exp(z_2) = \exp(x_2 + \imath t_2)$, il vient

$$\exp(x_1 - x_2) = \exp(\imath(t_2 - t_1)).$$

En particulier,
$$\exp(x_1 - x_2) = |\exp(x_1 - x_2)| = |\exp(\imath(t_2 - t_1))| = 1 = \exp(0),$$
ce qui implique puisque exp est une injection de $\mathbb{R}$ dans $(0, \infty)$, $0 = x_1 - x_2$, soit $x_1 = x_2$. On a donc $\exp(\imath(t_1 - t_2)) = 1 = \exp(\imath 0)$, ce qui implique par l'injectivité de $t \in [0, 2\pi) \mapsto \exp(\imath t) \in \mathbb{U}$ que $t_1 = t_2$. D'où $z_1 = z_2$: on a montré (i).

Le point (ii) est alors immédiat, puisque $\exp(\mathbb{R} + \imath\theta) = \mathscr{D}_\theta \setminus \{0\}$. □

Définition 2.6 (Argument - Détermination principale)**.** *Pour $z \in \mathbb{C}_*$, on appelle argument de z tout réel θ tel que $z = |z| \exp(\imath\theta)$.*

On appelle détermination principale de l'argument de z, notée $\mathrm{Arg}(z)$*, l'unique θ de $(-\pi, \pi]$ tel que $z = |z| \exp \imath\theta$.*

Notons que si θ est un argument de $z \neq 0$, alors $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ modulo 2π.

Finalement, on introduit le réel $e = \exp(1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, un simple calcul donne
$$e^n = \exp(1)^n = \underbrace{\exp(1) \times \ldots \times \exp(1)}_{n \text{fois}} = \exp(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{fois}}) = \exp(n).$$
Pour $z \in \mathbb{R}$, ceci pousse à introduire la notation e^z pour noter le complexe $\exp(z)$. On a alors, pour z_1, z_2 complexes,
$$e^{z_1 + z_2} = \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) = e^{z_1} e^{z_2}.$$
Attention : il faut bien comprendre que la première égalité résulte de la définition de e^z, la seconde est une propriété de la fonction exp, et la troisième de nouveau la défintion de e^z. Avec cette notation, on retrouve notamment le classique
$$z = |z| e^{\imath \mathrm{Arg}(z)}, \; z \neq 0.$$

Finissons cette partie en introduisant quelques autres séries entières usuelles. On peut tout d'abord étendre les fonctions cos et sin a tout le plan complexe, par extension des Formules d'Euler : on pose, pour $z \in \mathbb{C}$,
$$\cos(z) = \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath}.$$
Pour $z = t \in \mathbb{R}$, on retrouve les fonctions réelles cos et sin étudiées précédemment. Attention : on n'a pas du tout $\cos(z) = \Re(\exp(\imath z))$ et $\sin(z) = \Im(\exp(\imath z))$! Il s'agit par contre bien de deux séries entières de rayon de convergence infini, comme somme de deux séries entières de rayons de convergence infinis, que l'on peut expliciter : pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposition 2.27. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$.*

Démonstration. On a
$$\cos(z)^2 = \frac{1}{4}\left(\exp(2\imath z) + 2 + \exp(-2\imath z)\right)$$
et
$$\sin(z)^2 = \frac{-1}{4}\left(\exp(2\imath z) - 2 + \exp(-2\imath z)\right).$$
Le résultat suit. □

On définit également les fonctions
$$\cosh : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

et

$$\sinh : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il vient $\cos(z) = \cosh(\imath z)$, $\sin(z) = \imath \sinh(\imath z)$, $\cosh(z) = \cos(\imath z)$ et $\sinh(z) = -\imath \sin(\imath z)$. En particulier,

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = \cos(\imath z)^2 - (\imath \sin(\imath z))^2 = \cos(\imath z)^2 + \sin(\imath z)^2 = 1.$$

2.4.3 Fonctions analytiques

Définition et propriétés

Définition 2.7 (Fonction développable en série entière)**.** *Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de z_0 si il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, et $r \in (0, R]$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_r(z_0)$, on ait*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Exercice 2.14. *Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto z^n$ est analytique dans $\mathbb{C}$.*

Les propriétés que nous avons démontrées sur les séries entières impliquent directement que si f est développable en série entière au voisinage de z_0, f est localement C^∞, et localement égale à son développement de Taylor en z_0.

Définition 2.8 (Fonction analytique)**.** *On dit que $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ est analytique dans Ω si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω.*

Exercice 2.15. *Montrez que $z \in \mathbb{C}_* \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique.*

Exercice 2.16. *Soit f, g analytique sur Ω. Montrez que $f\,g$ est analytique sur Ω.*

Proposition 2.28. *Toute fonction analytique sur Ω est holomorphe sur Ω, et même C^∞ sur Ω.*

Démonstration. Direct. □

Proposition 2.29. *Une série entière de rayon de convergence strictement positif est analytique sur son disque de convergence.*

Démonstration. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et $z_0 \in \mathcal{D}_R(0)$.

Analyse : un calcul formel va nous mettre sur la voie. Comme clairement

$$z^n = (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} (z - z_0)^k,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} (z - z_0)^k \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} C_{n+k}^k z_0^n \right) (z - z_0)^k.\end{aligned}$$

Reste à justifier que tous les termes sont bien définis.

Synthèse : fixons dans un premier temps $k \in \mathbb{N}$, et considérons la série entière $\sum a_{n+k} C_{n+k}^k z^k$. Comme $C_{n+k}^k \sim_n \frac{n^k}{k!}$, il vient $\lim_{n\to\infty} (C_{n+k}^k)^{\frac{1}{n}} = 1$, ce qui implique en particulier

$$\limsup_{n\to\infty} |a_{n+k} C_{n+k}^k|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+k}| = \frac{1}{R}.$$

Ainsi, $\sum a_{n+k} C_{n+k}^k z^k$ est absolument convergente sur $\mathcal{D}_R(0)$, et en particulier elle est bien définie en z_0. On peut donc poser

$$b_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} C_{n+k}^k z_0^n.$$

Considérons maintenant la série $\sum b_k z^k$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \geq 0$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} |b_k| \rho^k = \sum_{k=0}^{N} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} C_{n+k}^k z_0^n \right| \rho^k = \sum_{k=0}^{N} \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} \right| \rho^k \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| C_n^k |z_0|^{n-k} \rho^k \\ = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\min(n,N)} C_n^k |z_0|^{n-k} \rho^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} C_n^k |z_0|^{n-k} \rho^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z_0| + \rho)^n.\end{aligned}$$

On en déduit que la série entière $\sum b_k z^k$ a un rayon de convergence R_b vérifiant $R_b \geq R - |z_0| > 0$. Finalement, pour tout z dans $\mathcal{D}_{R_b}(0)$, un calcul similaire donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + z)^n,$$

d'où l'on déduit $R_b = R - |z_0|$ et pour tout $z \in \mathcal{D}_{R-|z_0|}(z_0)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Le résultat suit. □

Ainsi, exp est une fonction analytique sur tout le plan complexe, on parle alors de fonction entière.

Définition 2.9 (Fonction entière)**.** *Une fonction $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ est dîte entière si elle est analytique sur $\mathbb{C}$.*

Zéros – Prolongement analytique

Proposition 2.30. *Soit Ω connexe, et f analytique sur Ω. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est nulle sur Ω,

(ii) f est nulle sur un ouvert ω contenu dans Ω,

(iii) il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout entier naturel n.

Démonstration. Clairement, $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Supposons donc (iii). On définit

$$\mathscr{H} = \left\{ z \in \Omega,\ f^{(n)}(z) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathscr{H}$ est non vide puisque $z_0 \in \mathscr{H}$, il est fermé par continuité de f et ses dérivées dans Ω. Montrons que $\mathscr{H}$ est ouvert : soit z dans $\mathscr{H}$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $\zeta \in \mathcal{D}_r(z)$, on a

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (\zeta - z)^k,$$

et donc $f(\zeta) = 0$ sur $\mathcal{D}_r(z)$ puisque f et toutes ses dérivées sont nulles en z. On a donc $\mathscr{H}$ ouvert fermé non vide dans Ω connexe, ce qui implique $\mathscr{H} = \Omega$. □

Exercice 2.17. *Soit λ, z_0 et a trois complexes. Montrez que l'équation*

$$f' = \lambda f, \quad f(z_0) = a,$$

admet une unique solution entière.

Correction
Clairement, $f(z) = a \exp(\lambda(z - z_0))$ est solution. Soit maintenant deux solutions f_1 et f_2, et posons $g = f_1 - f_2$. On a directement $g(z_0) = 0$, et comme $g' = f_1' - f_2' = \lambda(f_1 - f_2) = \lambda g$, il vient $g'(z_0) = 0$. Mais en dérivant de nouveau l'équation, on obtient $g'' = \lambda g'$ est donc $g''(z_0) = 0$. Par une récurrence immédiate, on obtient $g^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout entier naturel n. Par la proposition précédente, on en déduit $g = 0$ sur $\mathbb{C}$, donc $f_1 = f_2$.

Corollaire 2.9 (Prolongement analytique)**.** *Soit f et g analytiques sur Ω connexe. On suppose qu'il existe $\zeta \in \Omega$ et une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ de points de Ω vérifiant*
- $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \neq \zeta,$
- $\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta,$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ f(z_n) = g(z_n).$

Alors $f = g$ dans Ω.

Démonstration. $f - g$ est analytique dans Ω, et donc développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}_r(\zeta)$. Mais comme $f(z_n) - g(z_n) = 0$ pour tout n, et les z_n entre dans $\mathcal{D}_r(\zeta)$ pour n assez grand, il vient par le résultat de l'exercice 2.12 que $f - g$ est nulle dans $\mathcal{D}_r(\zeta)$, ce qui implique finalement que $f - g = 0$ dans Ω par la Proposition précédente. $\square$

Ainsi, si f et g sont analytiques dans Ω, et coïncident sur un ouvert de Ω, ou sur une courbe contenue dans Ω non réduite à un point, alors elles sont égales dans Ω.

Exercice 2.18 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit Ω connexe, f analytique dans Ω non nulle, et $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Montrez qu'il existe un unique $m \in \mathbb{N}_*$ et une unique fonction h analytique dans Ω vérifiant $h(z_0) \neq 0$ tels que*

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = (z - z_0)^m\, h(z).$$

L'entier m est appelé ***ordre de multiplicité*** *du zéro z_0.*

Exercice 2.19. *Existe-t-il f analytique sur $\mathcal{D}_1(0)$ tel que pour tout $n \geq 2$,*
- $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ *?*
- $f\left(\frac{1}{2\,n}\right) = f\left(\frac{1}{2\,n+1}\right) = \frac{1}{n}$

Si oui, quelles fonctions vérifient ces propriétés ?

Exercice 2.20. *Soit f et g analytique dans Ω connexe. On suppose que $f\,g = 0$ dans Ω. Montrez que $f = 0$ ou $g = 0$ dans Ω.*

Exercice 2.21. *Soit f une fonction entière non identiquement nulle. On note*

$$\mathscr{Z} = \{z \in \mathbb{C},\ f(z) = 0\}.$$

Montrez que $\mathscr{Z}$ est dénombrable.

Indication : on pourra commencer par montrer que pour $n \geq 1$, $\mathscr{Z} \cap \overline{\mathcal{D}_n(0)}$ est fini.

Exercice 2.22. *Déterminez les rayons de convergence des séries entières*

$$\sum \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \sum \frac{z^n}{(2-\imath)^{n+1}}.$$

Les séries $\sum \frac{z^n}{2^{n+1}}$ et $\sum \frac{(z-\imath)^n}{(2-\imath)^{n+1}}$ sont-elles des prolongements analytiques l'une de l'autre ?

Exercice 2.23. *On définit*

$$\mathscr{H} = \{f \textit{ fonction entière telle que } f'' + f = 0 \textit{ dans } \mathbb{C}\}.$$

et

$$\mathscr{L} : f \in \mathscr{H} \mapsto (f(0), f'(0)) \in \mathbb{C}^2.$$

— *Montrez que* $\mathscr{H}$ *est un espace vectoriel, contenant* cos *et* sin*,*
— *Montrez que* $\mathscr{L}$ *est une application linéaire,*
— *Montrez que* $\mathscr{L}$ *est surjective,*
— *Montrez que* $\mathscr{L}$ *est injective,*
— *En déduite que* $\mathscr{H} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

Chapitre 3

Intégration complexe – Formules de Cauchy

3.1 Intégration des fonctions complexes

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ – Chemin – Lacets

Définition 3.1. *Soit a, b deux réels, $a < b$, et $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$. On dit que γ est continue sur $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in [a, b]$, il existe un $\eta > 0$ tel que $\tilde{x}$ dans $[a, b]$ et $|\tilde{x} - x| < \eta$ implique $|\gamma(\tilde{x}) - \gamma(x)| < \varepsilon$.*

Rajouter continu par morceaux, C^1, C^1 par morceaux.

Définition 3.2. *Soient $a < b$ deux réels, et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ continue par morceaux. On définit*

$$\int_a^b g(s)\,ds := \int_a^b \Re(g(s))\,ds + \imath \int_a^b \Im(g(s))\,ds.$$

Notons que les deux intégrales de droite sont bien définies, comme intégrales de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Notons également que

$$\Re\left(\int_a^b g(s)\,ds\right) = \int_a^b \Re(g(s))\,ds, \quad \Im\left(\int_a^b g(s)\,ds\right) = \int_a^b \Im(g(s))\,ds.$$

Proposition 3.1 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tout $g : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ continue par morceaux, on a*

$$\left|\int_a^b g(s)\,ds\right| \leq \int_a^b |g(s)|\,ds.$$

Démonstration. C'est direct si on revient aux sommes de Riemann. On peut également procéder comme dans l'exercice suivant. □

Exercice 3.1. *Soit $g : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On cherche à montrer l'inégalité suivante :*

$$\left|\int_a^b g(s)\,ds\right| \leq \int_a^b |g(s)|\,ds.$$

Notons que l'inégalité est évidente si $\int_a^b g(s)\,ds = 0$. On suppose donc que $\int_a^b g(s)\,ds \neq 0$.

<u>Méthode 1</u> :

— *Montrez qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, *tel que*

$$\left| \int_a^b g(s)\, ds \right| = \lambda \int_a^b g(s)\, ds.$$

— *Montrez que*

$$\int_a^b \lambda\, g(s)\, ds = \int_a^b \Re\left(\lambda\, g(s)\right)\, ds.$$

— *En déduire le résultat.*

Méthode 2 :

— *Montrez que pour tout* z_1, z_2 *dans* $\mathbb{C}$,

$$\Re(z_1\, \overline{z_2}) \leq |z_1|\, |z_2|.$$

— *En déduire que pour tout* $z_1 \neq 0$, *on a*

$$\Re\left(\frac{z_1}{|z_1|} \overline{(z_2 - z_1)}\right) + |z_1| \leq |z_2|.$$

— *On choisit* $z_1 = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b g(s)\, ds \neq 0$ *et pour* s *dans* $[a, b]$, $z_2 = z_2(s) = g(s)$. *Montrez que*

$$\int_a^b \Re\left(\frac{z_1}{|z_1|} \overline{(z_2(s) - z_1)}\right)\, ds = 0.$$

— *En déduire le résultat.*

Exercice 3.2 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit* $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ *un chemin,* $\gamma \in C^1([a, b])$. *On note*

$$M = \sup_{t \in]a,b[} |\gamma'(t)|.$$

Montrez que

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq M\, |b - a|.$$

Correction

Posons $f : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t\, b + (1 - t)\, a)$. Clairement, $f \in C^1([a, b])$ et il vient pour tout $t \in [a, b]$,

$$f'(t) = (b - a)\gamma'(t\, b + (1 - t)\, a) \Rightarrow |f'(t)| \leq M\,(b - a),$$

et donc

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(s)\, ds \right| \leq \int_0^1 |f'(s)|\, ds \leq M\,(b - a).$$

Définition 3.3 (Chemin)**.** *Soit* a, b *deux réels,* $a \leq b$. *On appelle chemin une application* $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ *continue.* $\gamma(a)$ *est appelé origine du chemin,* $\gamma(b)$ *extrémité du chemin.*

L'image d'un chemin γ *est l'ensemble* $\Gamma : \{\gamma(t),\ t \in [a, b]\}$. *C'est une compact de* $\mathbb{C}$.

Quelques exemples : pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma_1 : t \in [0, 1] \mapsto t\, \beta + (1 - t)\, \alpha$ est le segment d'origine α et d'extrémités β.

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $\gamma_2 : t \in [0, 1] \mapsto z_0 + r\, e^{2\, \imath\, \pi\, t}$ est le cercle de centre z_0 de rayon r. Notons que pour ce chemin, on a $\gamma(0) = \gamma(1)$: on appelle un tel chemin un lacet.

Définition 3.4 (Lacet)**.** *On appelle lacet un chemin* $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ *tel que* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Soit $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un chemin, et σ une partition de $[a, b]$, c'est-à-dire un ensemble

$$\{t_1 = a < t_2 < \ldots < t_N = b\}.$$

On note

$$L_\sigma(\gamma) := \sum_{k=1}^{N-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|.$$

Exercice 3.3. *Soient a, b dans $\mathbb{C}$ et $\gamma : t \in [0,1] \mapsto t\, b + (1-t)\, a$. Soit σ une partition de $[0,1]$. Montrez que $L_\sigma(\gamma) = |b-a|$.*

Notons $\mathscr{S}_{[a,b]} = \{\sigma \text{ partition de } [a,b]\}$.

Définition 3.5 (Longueur d'un chemin)**.** *Soit $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$. On appelle longueur du chemin γ le réel*

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathscr{S}_{[a,b]}} L_\sigma(\gamma).$$

Si $L(\gamma) < \infty$, on dit que le chemin γ est rectifiable.

Remarque 3.1. *Il existe des chemins non rectifiables, donc de longueur infinis ! Nous verrons par contre que tout chemin continus et C^1 par morceaux est rectifiable.*

Soit σ_1, σ_2 deux partitions de $[a,b]$. On dit que σ_2 est plus fine que σ_1 si $\sigma_1 \subset \sigma_2$. Par simple inégalité triangulaire, si σ_2 est plus fine que σ_1, on a $L_{\sigma_1}(\gamma) \leq L_{\sigma_2}(\gamma)$.

En pratique, nous ne considèrerons que des chemins continus et C^1 par morceaux, c'est-à-dire tels qu'il existe une subdivision finie $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que γ soit $C^1[a_k, a_{k+1}]$ pour tout k dans $\{0, \ldots, n-1\}$ (en plus d'être toujours continu sur $[a,b]$). À partir de maintenant, tous les chemins que nous considérons sont donc continus et C^1 par morceaux.

Définition 3.6 (Chemin équivalent – Chemin opposé)**.** *Soit $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ et $\delta : [c,d] \mapsto \mathbb{C}$. γ et δ sont dits équivalents (resp. opposés) si il existe φ difféomorphisme de $[a,b]$ sur $[c,d]$ croissant (resp. décroissant) de $[c,d]$ sur $[a,b]$ tel que $\delta = \gamma \circ \varphi$.*

Par exemple : $\tilde{\gamma}_1 : t \in [a,b] \mapsto \gamma_1(1-t)$ est opposé à γ_1. Deux chemins équivalents ont la même image *parcourue dans le même sens*, deux chemins opposés ont la même image *parcourue en sens contraire*.

Attention : les deux chemins γ_2 et $\tilde{\gamma}_2 : t \in [0,1] \mapsto z_0 + r\, e^{4\,\pi\, i\, t}$ ne sont pas équivalents !

Proposition 3.2. *Soit $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux, alors γ est rectifiable et*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\gamma'(t)|\, dt.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord γ globalement C^1. Pour σ une partition de $[a,b]$, il vient

$$L_\sigma(\gamma) = \sum_{k=1}^{N-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = \sum_{k=1}^{N-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma'(s)\, ds \right| \leq \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'(s)|\, ds = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds,$$

d'où

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathscr{S}_{[a,b]}} L_\sigma(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds < \infty.$$

On a donc γ rectifiable.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme γ' est continue sur $[a,b]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine, et donc il existe $\mu > 0$ tel que pour tout t, $\tilde{t}$ dans $[a,b]$, $|\tilde{t} - t| < \mu$ implique

$$|\gamma'(\tilde{t}) - \gamma'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3\,(b-a)}$$

.

Par ailleurs, par définition de la borne sup et de l'intégrale de Riemann, il existe une subdivision $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ telle que

$$0 \leq L(\gamma) - L_\sigma(\gamma) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } \left| \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k)\, |\gamma'(t_k)| - \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut toujours supposer que $\max|t_{k+1}-t_k|<\mu$, quitte à remplacer σ par une subdivision plus fine. On a alors, pour tout $k\in\{0,\dots,N-1\}$,

$$
\begin{aligned}
|\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)-\gamma'(t_k)(t_{k+1}-t_k)| &= \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\gamma(s)-\gamma(t_k))\ ds\right| \\
&\le \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma(s)-\gamma(t_k)|\ ds \le \frac{\varepsilon(t_{k+1}-t_k)}{3\,(b-a)},
\end{aligned}
$$

d'où il vient

$$
\begin{aligned}
\left|L_\sigma(\gamma)-\sum_{k=0}^{N-1}|\gamma'(t_k)|(t_{k+1}-t_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{N-1}\left(|\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)|-|\gamma'(t_k)|(t_{k+1}-t_k)\right)\right| \\
\le \sum_{k=0}^{N-1}\Big||\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)|-|\gamma'(t_k)|(t_{k+1}-t_k)\Big| &\le \sum_{k=0}^{N-1}\left|\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)-\gamma'(t_k)(t_{k+1}-t_k)\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3\,(b-a)}\sum_{k=0}^{N-1}(t_{k+1}-t_k)=\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Pour tout $\varepsilon>0$, on a donc
$$\left|L(\gamma)-\int_a^b|\gamma'(s)|\,ds\right|\le\varepsilon,$$
ce qui donne le résultat pour les chemins C^1.

Enfin, si le chemin γ est C^1 par morceaux, soit $A=\{a_0=a<a_1<\ldots<a_n=b\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\gamma\in C^1([a_k,a_{k+1}])$ pour tout $k\in\{0,\dots,N-1\}$. Soit σ une subdivision quelconque de $[a,b]$, alors $\tilde\sigma=\sigma\cup A$ est une subdivision de $[a,b]$ contenant A et plus fine que σ, d'où

$$L_\sigma(\gamma)\le L_{\tilde\sigma}(\gamma)\le L(\gamma)\Rightarrow L(\gamma)=\sup_{\sigma\in\mathscr{S}_{[a,b]},\ A\subset\sigma}L_\sigma(\gamma).$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent sur chaque segment $[a_k,a_{k+1}]$. □

Exercice 3.4. *Soit $\gamma_1:[a,b]\mapsto\mathbb{C}$ et $\gamma_2:[c,d]\mapsto\mathbb{C}$ deux chemins équivalents ou opposés. Montrez que $L(\gamma_1)=L(\gamma_2)$.*

Correction
Supposons les deux chemins équivalents , il existe alors un difféomorphisme φ croissant de $[c,d]$ dans $[a,b]$ tel que $\gamma_2=\gamma_1\circ\varphi$. Nécessairement $\varphi(c)=a$ et $\varphi(d)=b$. On a alors

$$
\begin{aligned}
L(\gamma_2)=\int_c^d|\gamma_2'(t)|\,dt=\int_c^d|(\gamma_1\circ\varphi)'(t)|\,dt=\int_c^d|\gamma_1'(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,dt &= \int_c^d|\gamma_1'(\varphi(t))|\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_a^b|\gamma_1'(\tau)|\,d\tau=L(\gamma_1).
\end{aligned}
$$

Si les chemins sont opposés, comme $\varphi'\le0$ et nécessairement $\varphi(c)=b$ et $\varphi(d)=a$, le résultat est le même.

Intégrale le long d'un chemin

Définition 3.7. *Soit* $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ *un chemin* C^1 *par morceaux et* f *continue sur* Γ*. On appelle* intégrale de f le long de γ, *le nombre complexe*

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt. \tag{3.1}$$

On note cette intégrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Remarque 3.2. *Comme* γ *n'est pas* C^1 *mais seulement* C^1 *par morceaux, il faut comprendre* (3.1) *comme*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt,$$

expression parfaitement bien définie.

Proposition 3.3. *Soit* $\gamma_1 : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \mapsto \mathbb{C}$ *deux chemins équivalents ou opposés, et* f *continue sur* $\Gamma_1 (= \Gamma_2)$*. On a*

-a- *si* γ_1 *et* γ_2 *sont équivalents, alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

-b- *si* γ_1 *et* γ_2 *sont opposés, alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

Démonstration. On va juste montrer le point -*a*-. Soit φ le difféomorphisme croissant qui envoie $[c,d]$ sur $[a,b]$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Nécessairement, $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t)))(\gamma_1 \circ \varphi)'(t)\,dt = \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ = \int_a^b f(\gamma_1(\tau))\,\gamma_1'(\tau)\,d\tau = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.4 (Relation de Chasles)**.** *Soit* $\gamma_1 : [a,b] \mapsto \Omega$ *et* $\gamma_2 : [b,c] \mapsto \Omega$ *deux chemins tels que* $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$*. On définit*

$$\gamma : t \in [a,c] \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & si\ t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & si\ t \in [b,c]. \end{cases}$$

Alors pour tout f *continue sur* Γ,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Proposition 3.5. *Soit* $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ *un chemin et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur* Γ *qui converge uniformément sur* Γ *vers* f*. Alors*

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Démonstration. On a

$$\left|\int_a^b (f_n - f)(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |(f_n - f)(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \leq L(\gamma)\,\sup_\Gamma |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$

Nous allons maintenant démontrer un résultat qui nous servira dans peu de temps. Soit $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ un chemin, et ψ une fonction continue sur Γ. Pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, on définit

$$F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

qui est bien défini puisque $\zeta \in \Gamma \mapsto \zeta - z$ ne s'annule pas, et donc $\zeta \mapsto \dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ est continue sur Γ. F est même continue sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ par simple application du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre. Il se trouve que F est bien mieux que cela :

Théorème 3.1. *F est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$,*

$$F^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, et $0 < r < R$ tel que $\mathcal{D}_R(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Pour tout $z \in D_r(z_0)$ et $\zeta \in \Gamma$, on a

$$\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} \leq \frac{r}{R} < 1,$$

et donc

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k,$$

et donc

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty}(z - z_0)^k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Clairement, $f_n(\zeta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(z - z_0)^k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ converge uniformément vers $f(\zeta) = \dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$. D'après la proposition précédente, on a donc

$$F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma \sum_{k=0}^{n}(z - z_0)^k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(z - z_0)^k \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,dz,$$

soit

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,dz.$$

F est donc analytique sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et $z \in \mathcal{D}_r(z_0)$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ avec } a_k = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,dz,$$

et en particulier $F^n(z_0) = n!\,a_n$. Notons que

$$|a_k| \leq \sup_\Gamma |\varphi| \frac{L(\gamma)}{R^{k+1}},$$

et donc le rayon de convergence de la série est au moins R. $\square$

3.2 Formule de Cauchy dans le cas du cercle, et conséquences

Indice d'un point par rapport à un cercle

Proposition 3.6. *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $m \in \mathbb{Z}_*$ *et* $\gamma : t \in [0,1] \mapsto z_0 + r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, m\, t}$. *Pour tout* $z \notin \Gamma$, *on a*

$$\frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} m \text{ si } |z - z_0| < r \\ 0 \text{ si } |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Démonstration. Écrivons $z - z_0 = \rho e^{\imath\,\theta}$ et supposons $\rho < r$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\gamma(t) - z = re^{\imath\, 2\,\pi\, m\, t} - (z - z_0) = re^{\imath\, 2\,\pi\, m\, t} - \rho e^{\imath\,\theta} = re^{\imath\, 2\,\pi\, m\, t}\left(1 - \frac{\rho}{r} e^{\imath\,(\theta - 2\,\pi\, m\, t)}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{2\,\pi\,\imath\, m}{1 - \frac{\rho}{r} e^{\imath\,(\theta - 2\,\pi\, m\, t)}}.$$

Comme $\rho < r$, on a

$$\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{\imath\,(\theta - 2\,\pi\, m\, t)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^k e^{\imath k(\theta - 2\,\pi\, m\, t)},$$

et comme la série est normalement convergente sur $[0, 2\,pi]$, on en déduit

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\,\pi\,\imath\, m \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^k e^{\imath k(\theta - 2\,\pi\, m\, t)}\, dt = 2\,\pi\,\imath m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \int_0^{2\pi} e^{\imath k(\theta - 2\,\pi\, m\, t)}\, dt = 2\,\pi\,\imath\, m.$$

Supposons maintenant $r < \rho$. On a alors

$$\gamma(t) - z = re^{\imath\, 2\,\pi\, m\, t} - \rho e^{\imath\,\theta} = -\rho e^{\imath\theta}\left(1 - \frac{r}{\rho} e^{\imath(2\,\pi\, m\, t - \theta)}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = 2\,\pi\,\imath\, m\, \frac{r}{\rho} e^{\imath(2\,\pi\, m\, t - \theta)} \frac{1}{1 - \frac{r}{\rho} e^{\imath(2\,\pi\, m\, t - \theta)}} = 2\,\pi\,\imath\, m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1} e^{\imath\,(k+1)(2\,\pi\, m\, t - \theta)}.$$

Le résultat s'obtient alors comme précédemment. $\square$

Remarque 3.3. *Le côté surprenant de ce résultat est que la valeur de* $\displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ *dépend de* γ, *et de* z seulement par la position de z par rapport à Γ. *Nous verrons plus tard que cela s'étend à un lacet* γ *quelconque.*

Formule de Cauchy (I) On va maintenant travailler avec des fonctions mieux qu'holomorphe, précisément C^1... mais on va rapidement voir que cela ne change rien !

Lemme 3.1. *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ *et* $z_0 \in \mathcal{D}_R(z_0)$. *Soit* f *continue sur* $\mathcal{D}_R(z_0)$, $f \in C^1(\mathcal{D}_R(z_0) \setminus \{z_0\})$. *Pour* $0 < r < R$, *on note*

$$\gamma_r : t \in [0,1] \mapsto z_0 + re^{\imath\, 2\,\pi\, t}.$$

Alors

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 0.$$

Démonstration. Notons

$$G : r \in (0, R) \mapsto \int_{\gamma_r} f(z)\, dz.$$

On voit que

$$G(r) = 2\,\pi\,\imath \int_0^1 r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t} f(z_0 + r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t}) dt = 2\,\pi\,\imath \int_0^1 h(r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t})\, dt,$$

avec $h(z) = z\, f(z + z_0)$. On note que

$$r \in (0, R) \mapsto h(r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t})$$

est continue, puisque f est continue sur $\mathcal{D}_R(z_0)$, et dérivable sauf éventuellement en $r = |z_0|$, puisque $f \in H(\mathcal{D}_R(z_0) \setminus \{z_0\})$, et pour tout $r \neq |z_0|$, on a

$$\frac{\partial}{\partial r} h(r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t}) = e^{\imath\, 2\,\pi\, t}\, h'(r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t}).$$

On en déduit (par dérivation sous l'intégrale) que pour tout $r \neq |z_0|$, on a

$$G'(r) = 2\,\pi\,\imath \int_0^1 e^{\imath\, 2\,\pi\, t}\, h'(r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t})\, dt = \frac{1}{r} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} h(r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t})\, dt = 0,$$

donc G est constante sur $(0, R)$. Comme de plus

$$G(r) = 2\,\pi\,\imath \int_0^1 h(r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t})\, dt \xrightarrow[r \to 0]{} 0,$$

le résultat suit. $\square$

Théorème 3.2 (Formule de Cauchy). *Soit z_0, $R > 0$ et $f \in C^1(\mathcal{D}_R(z_0))$. Pour tout $r \in (0, R)$, on note*

$$\gamma_r : t \in [0, 1] \mapsto z_0 + r\, e^{\imath\, 2\,\pi\, t}.$$

Pour tout $z \in \mathcal{D}_r(z_0)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Démonstration. Notons

$$F : \zeta \in \mathcal{D}_R(z_0) \mapsto \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ si } \zeta \neq z,\ f'(z) \text{ sinon.}$$

F est continue sur $\mathcal{D}_R(z_0)$, et $F \in H(\mathcal{D}_R(z_0) \setminus \{z\})$. On déduit du lemme précédent que

$$\int_{\gamma_r} F(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Mais comme $|z - z_0| < r$, on déduit de la Proposition 3.6 que

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\,\pi\,\imath\, f(z).$$

Le résultat suit. $\square$

Une première conséquence à la fois immédiate et étonnante de cette formule est la proposition suivante :

Proposition 3.7. *Soit $f \in C^1(\Omega)$. Alors f est analytique sur Ω, et pour tout $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{D}_r(z_0) \subset \Omega$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta,$$

où

$$\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t}.$$

Démonstration. Soit z_0 dans Ω, et $R > 0$ tel que $\mathcal{D}_R(z_0) \subset \Omega$. Soit $r \in (0, R)$, la formule de Cauchy locale donne que pour tout $z \in \mathcal{D}_r(z_0)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

avec $\gamma_r : t \in [0, 1] \mapsto z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t}$. Le Théorème 3.1 donne alors le résultat. $\square$

On vient donc de montrer qu'une fonction C^1 de la variable complexe... est automatiquement C^∞ ! Il est bien évident que cette propriété est complétement fausse en analyse réelle.

Exercice 3.5. *Soit $\gamma : s \in [0, 1] \mapsto 2\, e^{2\, \pi\, \imath\, s}$. Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sin(t) = \frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{z\, t}}{z^2 + 1}\, dz.$$

Principe du maximum Soit f une fonction continue sur Ω. On dit que f vérifie la propriété de la moyenne dans Ω si pour tout z_0 dans Ω et $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{D}_r(z_0)} \subset \Omega$, on a

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t})\, dt.$$

Proposition 3.8. *Soit f continue dans Ω vérifiant la propriété de la moyenne. Si $|f|$ admet un maximum en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante dans un voisinage de z_0.*

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $\mathcal{D}_R(z_0)$, et $r \in (0, R)$. Si $f(z_0) = 0$ le résultat est évident. On suppose donc que $f(z_0) \neq 0$ et on définit

$$F(z) = \frac{f(z)}{f(z_0)}$$

qui est continue, vérifie la propriété de la moyenne, et par construction $|F(z)| \leq |F(z_0)| = 1$ pour tout z de Ω. Comme on a

$$1 = \int_0^1 F(z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t}) dt,$$

en prenant la partie réelle de l'égalité on obtient

$$1 = \int_0^1 \Re(F(z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t})) dt \Leftrightarrow \int_0^1 \left(1 - \Re(F(z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t}))\right)\, dt = 0.$$

Mais comme pour tout $z \in \Omega$, $\Re(F(z)) \leq |F(z)| \leq 1$, on a nécéssairement

$$1 = \Re(F(z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t})),\ \forall t \in [0, 1]$$

ce qui implique immédiatement que $\Im(F(z_0 + r\, e^{\imath\, 2\, \pi\, t})) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Comme cela est vrai pour tout r dans $(0, R)$, le résultat suit. $\square$

Théorème 3.3 (Principe du maximum – 1)**.** *Soit $f \in C^1(\Omega)$. Alors f possède la propriété de la moyenne.*

Si de plus Ω est connexe, et $|f|$ possède un maximum dans Ω, alors f est constante dans Ω.

Démonstration. Le premier point n'est qu'un changement de variable dans la formule de Cauchy locale. Pour le second, si $|f|$ possède un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante localement autour de z_0. Mais comme f vérifie le principe du prolongement analytique, f est alors constante dans Ω. □

Corollaire 3.1 (Principe du maximum – 2)**.** *Soit Ω ouvert connexe tel que $\overline{\Omega}$ soit borné, et $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Alors*

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Démonstration. C'est le résultat de l'exercice 3.6. □

Exercice 3.6. *Soit Ω ouvert connexe tel que $\overline{\Omega}$ soit borné, et $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Montrez que*

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Indication : si $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = |f(z_0)|$ avec $z_0 \in \Omega$, alors...

Exercice 3.7 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit $f \in C^1(\mathcal{D}_1(0))$, vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout z dans $\mathcal{D}_1(0)$. Montrez que pour tout z dans $\mathcal{D}_1(0)$, $|f(z)| \leq |z|$, et que $|f'(0)| \leq 1$.*

Montrez de plus que si il existe $z \in \mathcal{D}_1(0)$, $z \neq 0$, tel que $|f(z)| = |z|$, alors il existe $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ tel que $f(z) = a\,z$.

Que se passe-t-il si $|f'(0)| = 1$?

Correction

Définissons

$$g : z \in \mathcal{D}_1(0) \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} \text{ si } z \neq 0, \\ \\ f'(0) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Clairement, $g \in C^1(\dot{\mathcal{D}}_1(0))$. De plus, comme f est analytique sur $\mathcal{D}_1(0)$, il existe $r > 0$ tel que sur $\mathcal{D}_r(0)$, on a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = f'(0)\, z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Ainsi, sur $\dot{\mathcal{D}}_r(0)$, on a

$$g(z) = f'(0) + z\,\frac{f''(0)}{2} + z \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^{k-2} = g(0) + z\,\frac{f''(0)}{2} + z\,\varepsilon(z),$$

ce qui montre que $g \in C^1(\mathcal{D}_r(0))$. Donc $g \in C^1(\mathcal{D}_1(0))$.

Ainsi, pour tout $\rho \in (0,1)$, $g \in C^1(\mathcal{D}_r(0)) \cap C^0(\overline{\mathcal{D}_r(0)})$, et donc d'après le principe du maximum, pour tout $z \in \mathcal{D}_r(0)$,

$$|g(z)| \leq \max_{z \in \overline{\mathcal{D}_r(0)}} |g(z)| = \max_{|z|=r} |g(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

On obtient alors le résultat en faisant tendre r vers 1.

Exercice 3.8 (Phragmén-Lindelöf)**.** *Pour α dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, on pose*

$$\mathscr{S}_\alpha = \left\{ z = r\,e^{\imath\,\theta},\ r > 0,\ \theta \in]-\alpha, \alpha[\right\}.$$

1 - Dessinez $\mathscr{S}_\alpha$.

Soit $F \in H(\mathscr{S}_\alpha) \cap C^0(\overline{\mathscr{S}_\alpha})$, vérifiant de plus

- *$|F(z)| \leq 1$ pour tout $z = re^{\imath\alpha}$ et $z = re^{-\imath\alpha}$, $r \geq 0$,*
- *il existe $c > 0$ tel que pour tout z dans $\mathscr{S}_\alpha$, $|F(z)| \leq c\, e^{c\,|z|}$.*

L'objectif de l'exercice est de montrer qu'alors $|F(z)| \leq 1$ pour tout z dans $\mathscr{S}_\alpha$.

Pour $\varepsilon > 0$ et z dans $\overline{\mathscr{S}_\alpha}$, on pose $h(z) = F(z)e^{-\varepsilon\, z^2}$.

2 - Montrez que $h(z) \in H(\mathscr{S}_\alpha) \cap C^0(\overline{\mathscr{S}_\alpha})$.

3 - Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|e^{\imath\omega}$, on a

$$|e^{-\varepsilon\, z^2}| = e^{-\varepsilon\,|z|^2\left(\cos(\omega)^2 - \sin(\omega)^2\right)}.$$

4 - En déduire que pour tout $z \in \mathscr{S}_\alpha$,

$$|h(z)| \leq c\, e^{c\,|z| - \varepsilon |z|^2\left(\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2\right)}.$$

5 - En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathscr{S}_\alpha$ vérifiant $|z| \geq R$, on a $|h(z)| \leq \frac{1}{2}$.

6 - Par un raisonnement similaire, montrez que pour $r \geq 0$, on a

$$|h\left(re^{\imath\alpha}\right)| \leq 1 \text{ et } \left|h\left(re^{-\imath\alpha}\right)\right| \leq 1.$$

7 - En appliquant le principe du maximum à h sur $\mathscr{S}_\alpha \cap \{z \in \mathbb{C},\, |z| < R\}$, montrez que $|h(z)| \leq 1$ pour tout z dans $\mathscr{S}_\alpha$.

8 - En déduire que $|F(z)| \leq 1$ pour tout z dans $\mathscr{S}_\alpha$.

Corollaire 3.2 (Théorème de d'Alembert)**.** *Un polynôme non constant possède au moins une racine complexe.*

Démonstration. Soit P non constant. Supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Alors la fonction

$$f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{P(z)}$$

est C^1 sur $\mathbb{C}$. De plus, comme $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$, on a $|f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$, et donc $|f(z)|$ admet un maximum sur $\mathbb{C}$. Le principe du maximum implique que f est constante sur $\mathbb{C}$, et donc P aussi. Contradiction. $\square$

En combinant le Théorème de d'Alembert avec l'exercice 2.18, il est facile de montrez que tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ se factorise sous la forme

$$P(z) = c_0(z - z_0)^{m_0} \ldots (z - z_p)^{m_p},$$

où $c_0 \in \mathbb{C}$, $p \leq m$, $\{z_0, \ldots, z_p\}$ sont les racines de P et $\deg(P) = m_0 + \ldots + m_p$.

3.3 Primitives

Définitions et résultats

Définition 3.8. *Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. On dit que f admet une primitive globalement sur Ω si il existe $F \in H(\Omega)$ tel que $F' = f$ dans Ω.*

On dit que f admet une primitive localement sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et $F_{z_0} \in H(\mathcal{D}_r(z_0))$ tel que $F'_{z_0} = f$ dans $\mathcal{D}_r(z_0)$.

On a déjà vu qu'une série entière admet toujours une primitive sur son disque de convergence. On en déduit que les fonctions de $C^1(\Omega)$ admettent toujours une primitive localement, puisqu'on a vu qu'elles étaient analytiques.

Proposition 3.9. *Soit Ω connexe, f continue sur Ω, et F_1, F_2 deux primitives globales de f sur Ω. Alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $F_1 = F_2 + c$ dans Ω.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'exercice 2.7, puisque dans Ω, $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. □

Proposition 3.10. *Soit $f \in C^0(\Omega)$ et admettant une primitive globale sur Ω, notée F. Pour tout chemin $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, pour tout lacet γ contenu dans Ω,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. Il existe $F \in H(\Omega)$ tel que $F' = f$, donc

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(F(\gamma(t))\right)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Remarque 3.4. *Comme dans le cas réel, la valeur de l'intégrale d'une fonction admettant une primitive ne dépend pas du choix de la primitive.*

Exercice 3.9. *Montrez que $z \in \mathbb{C}_* \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}_*$.*

Proposition 3.11. *Soit Ω connexe. Alors f continue sur Ω admet une primitive sur Ω si et seulement si pour tout lacet $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. Il s'agit de prouver la partie seulement si de la propriété. Soit z_a, z_b dans Ω. Comme Ω est ouvert et connexe, il est connexe par arc, on peut alors montrer qu'il existe un chemin $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$ C^1 par morceaux tel que $\gamma(a) = z_a$ et $\gamma(b) = z_b$. Soit un second chemin $\tilde{\gamma}$ ayant la même propriété. Soit φ un difféo : $[b, c] \mapsto [a, b]$ $(b < c)$ décroissant et $\tilde{\gamma} = \delta \circ \varphi$, et enfin

$$\theta : t \in [a, c] \mapsto \begin{cases} \gamma(t) \text{ si } t \leq b \\ \delta(t) \text{ sinon .} \end{cases}$$

θ est un lacet, donc

$$0 = \int_\theta f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\delta f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{-\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz.$$

On en déduit que pour tout chemin γ, la quantité

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

ne dépend que de l'origine et de l'extrémité de γ, et pas du chemin les joignant. On définit donc, pour z_a, z_b dans Ω,

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

où γ est un chemin quelconque d'origine z_a et d'extrémité z_b.

On fixe maintenant $z_0 \in \Omega$, et on définit la fonction

$$F : z \in \Omega \mapsto \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d(\zeta).$$

Nous allons montrer que G est une primitive globale de f. Soit $z \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{D}_r(z) \in \Omega$. Soit h tel que $|z+h| < r$. En faisant un cycle contenu dans Ω et contenant z_0 et le segment $[z, z+h]$, on voit facilement que

$$F(z+h) - F(z) = \int_\delta f(\zeta)\,d\zeta,$$

où $\delta : t \in [0,1] \mapsto t(z+h) + (1-t)z$, d'où

$$F(z+h) - F(z) - h\,f(z) = \int_\delta (f(\zeta) - f(z))\,d\zeta.$$

Comme f est continue en z, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|\zeta - z| < \eta$ implique $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Donc si on choisit $|h| < \min(r, \eta)$, on a

$$|F(z+h) - F(z) - h\,f(z)| < |h|\varepsilon,$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 3.3. *Soit Ω ouvert quelconque de $\mathbb{C}$, et f continue sur Ω t.q. pour tout lacet γ contenu dans Ω,*

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Alors f est analytique dans Ω (et donc holomorphe dans Ω).

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$, et $r > 0$ t.q. $\mathcal{D}_r(z_0) \subset \Omega$. Comme $\mathcal{D}_r(z_0)$ est connexe et par hypothèse

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

pour tout γ contenu dans $\mathcal{D}_r(z_0)$, d'après la Proposition précédente, f admet une primitive F dans $\mathcal{D}_r(z_0)$. Comme f est continue sur $\mathcal{D}_r(z_0)$, F appartient à $C^1(\mathcal{D}_r(z_0))$, et est donc analytique dans $\mathcal{D}_r(z_0)$. Le résultat suit. □

Définition 3.9. *On appelle lacet triangulaire tout lacet γ défini sur $[a,b]$, injectif sur $[a,b[$, tel qu'il existe z_1, z_2 et z_3 tels que $\Gamma = Image(\gamma)$ soit le bord du triangle T de sommets z_1, z_2 et z_3.*

Dans le cas d'un ouvert Ω étoilé (et donc nécessairement connexe, puisque connexe par arc), on peut se contenter de lacets triangulaires pour obtenir le même résultat :

Proposition 3.12. *Soit Ω un ouvert étoilé, et f continue dans Ω. Alors f admet une primitive globalement dans Ω si et seulement si pour tout lacet triangulaire γ contenu dans Ω, on a*

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Démonstration. Une nouvelle fois, il suffit de démontrer la partie seulement si de la proposition. Notons que si γ lacet triangulaire est contenu dans Ω, alors le triangle T de frontière Γ est lui-même contenu dans Ω. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0. Alors pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z]$ est par définition contenu dans Ω. On note donc

$$\gamma_z : t \in [0,1] \mapsto t\,z + (1-t)\,z_0,$$

et

$$F : z \in \Omega \mapsto \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Soit $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{D}_r(z) \subset \Omega$. Soit h tel que $|h| < r$, alors $z + h$ est dans Ω, et il en est de même du segment $[z_0, z+h]$ et $[z, z+h]$. On peut donc considère un lacet triangulaire γ, contenu dans Ω, reliant z_0, $z+h$ et z (dans cet ordre). Par hypothèse, on a

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0,$$

ce qui donne facilement

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta)\,d\zeta,$$

avec $\tilde{\gamma} : t \in [0,1] \mapsto t\,(z+h) + (1-t)\,z,$, d'où

$$F(z+h) - F(z) - h\,f(z) = \int_{\tilde{\gamma}} (f(\zeta) - f(z))\,d\zeta.$$

Comme f est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|\zeta - z| < \eta$ implique $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Donc si on choisit $|h| < \min(r, \eta)$, on a

$$|F(z+h) - F(z) - h\,f(z)| < |h|\varepsilon,$$

ce qui termine la preuve. □

Exercice 3.10. *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un chemin triangulaire contenu dans Ω, et T le triangle de frontière Γ. Montrez que $T \subset \Omega$.*

Il se trouve que pour les fonctions holomorphes, on a toujours cette propriété d'intégrale nulle le long des lacets triangulaires :

Théorème 3.4 (Théorème de Goursat)**.** *Soit Ω non vide et $f \in H(\Omega)$. Pour tout lacet triangulaire γ de Ω délimitant un triangle T contenu dans Ω,*

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Pour démontrer ce Théorème, nous allons avoir besoin d'un petit résultat de géométrie, assez évident dans ce qu'il dit, mais pas forcément si direct que cela à démontrer. Nous consacrons la section suivante à prouver ce résultat, les lecteurs intéressés peuvent y consacrer du temps, les autres peuvent passer directement à la section suivant.

Notons le corollaire immédiat de ce Théorème :

Corollaire 3.4. *Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Alors toute fonction holomorphe sur Ω admet une primitive sur Ω.*

Un peu de géométrie Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère une suite de triangles $T_n = (z_{1,n}, z_{2,n}, z_{3,n})$, où $z_{1,n}$, $z_{2,n}$ et $z_{3,n}$ sont les sommets du triangle T_n que l'on considère fermé [1], construite de la manière suivante : pour T_n donné, on définit

$$m_{1,n} = \frac{z_{2,n} + z_{3,n}}{2},\ m_{2,n} = \frac{z_{1,n} + z_{3,n}}{2}, m_{3,n} = \frac{z_{1,n} + z_{2,n}}{2}.$$

Puis on définit quatre triangles

$$\Delta_{1,n} = (z_{1,n}, m_{2,n}, m_{3,n}),\ \Delta_{2,n} = (z_{2,n}, m_{1,n}, m_{3,n}),\ \Delta_{3,n} = (z_{3,n}, m_{1,n}, m_{2,n}),$$
$$\Delta_{4,n} = (m_{1,n}, m_{2,n}, m_{3,n}). \quad (3.2)$$

Enfin, T_{n+1} est égal à l'un de ces quatres triangles, n'importe lequel, avec la convention suivante : si $T_{n+1} = \Delta_{1,n}$, on pose $z_{1,n+1} = z_{1,n}$, $z_{2,n+1} = m_{3,n}$, $z_{3,n+1} = m_{2,n}$. Si $T_{n+1} = \Delta_{2,n}$, on pose $z_{1,n+1} = m_{3,n}, z_{2,n+1} = z_{2,n}$, $z_{3,n+1} = m_{1,n}$. Si $T_{n+1} = \Delta_{3,n}$, on pose $z_{1,n+1} = m_{2,n}, z_{2,n+1} = m_{1,n}$, $z_{3,n+1} = z_{3,n}$. Enfin, si $T_{n+1} = \Delta_{4,n}$, on pose $z_{1,n+1} = m_{3,n}$, $z_{2;n+1} = m_{1,n}$, $z_{3,n+1} = m_{2,n}$.

Lemme 3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$L(\partial T_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n L(\partial T_0).$$

Démonstration. Pour T_n donné, supposons que l'on ait $T_{n+1} = \Delta_{1,n}$, alors

$$\begin{aligned} L(\partial T_{n+1}) &= |z_{1,n+1} - z_{2,n+1}| + |z_{2,n+1} - z_{3,n+1}| + |z_{3,n+1} - z_{1,n+1}| \\ &= |z_{1,n} - m_{3,n}| + |m_{3,n} - m_{2,n}| + |m_{2,n} - z_{1,n}| \\ &= \left|z_{1,n} - \frac{z_{1,n} + z_{2,n}}{2}\right| + \left|\frac{z_{1,n} + z_{2,n}}{2} - \frac{z_{1,n} + z_{3,n}}{2}\right| + \left|\frac{z_{1,n} + z_{3,n}}{2} - z_{1,n}\right| \\ &= \frac{1}{2}|z_{1,n} - z_{2,n}| + \frac{1}{2}|z_{2,n} - z_{3,n}| + \frac{1}{2}|z_{3,n} - z_{1,n}| = \frac{1}{2}L(\partial T_n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les trois autres choix pour T_{n+1} se traitent de manière identique, et le résultat est alors une récurrence immédiate. $\square$

Lemme 3.3. *Il existe $z_\infty \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} z_{1,n} = \lim_{n\to\infty} z_{2,n} = \lim_{n\to\infty} z_{3,n} = z_\infty.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_\infty \in T_n$, et

$$|z_{1,n} - z_\infty|, |z_{2,n} - z_\infty|, |z_{3,n} - z_\infty| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n L(\partial T_0).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $z_{1,n+1} = z_{1,n}$ et donc $|z_{1,n+1} - z_{1,n}| = 0$. Soit $z_{1,n+1} = m_{3,n}$, et donc

$$|z_{1,n+1} - z_{1,n}| = \frac{1}{2}|z_{2,n} - z_{1,n}| \leq \frac{1}{2}L(\partial T_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} L(\partial T_0).$$

Soit $z_{1,n+1} = m_{3,n}$ et de la même manière $|z_{1,n+1} - z_{1,n}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} L(\partial T_0)$. On a donc, pour tout $p > q \geq 0$,

$$|z_{1,p} - z_{1,q}| = \left|\sum_{k=q}^{p-1} z_{1,k+1} - z_{1,k}\right| \leq \sum_{k=q}^{p-1} |z_{1,k+1} - z_{1,k}| \leq \left(\sum_{k=q}^{p-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) L(\partial T_0) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^q L(\partial T_0),$$

1. autrement dit, on considère que la frontière du triangle fait partie du triangle

ce qui montre que la suite $z_{1,n}$ est de Cauchy, et donc qu'elle converge vers $z_{1,\infty} \in \mathbb{C}$. En faisant $p \to \infty$, on obtient alors

$$|z_{1,\infty} - z_{1,q}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^q L(\partial T_0).$$

De même, on obtient que $z_{2,n}$ converge vers $z_{2,\infty}$ et $z_{3,n}$ verts $z_{3,\infty}$. Mais comme

$$|z_{1,n} - z_{2,n}| + |z_{2,n} - z_{3,n}| + |z_{3,n} - z_{1,n}| = L(\partial T_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n L(\partial T_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

on a nécessairement $z_{1,\infty} = z_{2,\infty} = z_{3,\infty}$, ce qui nous donne z_∞. Enfin, comme par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$, $z_{1,p}$ appartient à T_n qui est compact, on obtient directement que $z_\infty \in T_n$ pour tout n. □

Lemme 3.4. *On a*

$$\max_{z\in T_n} |z - z_\infty| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n L(\partial T_0).$$

Démonstration. Notons tout d'abord que l'on devrait a priori regarder le

$$\sup_{z\in T_n} |z - z_\infty|,$$

mais comme la fonction $z \mapsto |z - z_\infty|$ est continue sur $\mathbb{C}$ et T_n est compact, le sup est bien un max. Notons également que pour tout z de T_n, la demi-droite $[z_\infty, z)$ coupe ∂T_n en un point $\tilde{z}$, de telle sorte que le segment $[z_\infty, \tilde{z}]$ contient z, et donc $|z_\infty - z| \leq |z_\infty - \tilde{z}|$. On a donc

$$\max_{z\in T_n} |z_\infty - z| = \max_{z\in \partial T_n} |z_\infty - z|.$$

Finalement, comme pour tout $z \in [z_1, z_2]$, il existe un unique $t \in [0, 1]$ tel que $z = t\, z_1 + (1 - t)z_2$, on a

$$\max_{z\in[z_1,z_2]} |z-z_\infty|^2 = \max_{t\in[0,1]} |t\, z_1+(1-t)z_2-z_\infty|^2 = \max_{t\in[0,1]} t^2|z_1-z_2|^2+2\,t\,\Re\left((z_1 - z_2)\overline{(z_2 - z_\infty)}\right)+|z_2-z_\infty|^2,$$

et comme $g : t \in [0, 1] \mapsto t^2|z_1 - z_2|^2 + 2\,t\,\Re\left((z_1 - z_2)\overline{(z_2 - z_\infty)}\right) + |z_2 - z_\infty|^2$ est un polynôme réel de degré deux vérifiant $\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = \infty$, on a

$$\max_{t\in[0,1]} g(t) = \max(g(0), g(1)) = \max(|z_1 - z_\infty|^2, |z_2 - z_\infty|^2),$$

d'où l'on déduit directement

$$\max_{z\in\partial T_n} |z - z_\infty| = \max(|z_1 - z_\infty|, |z_2 - z_\infty|, |z_3 - z_\infty|).$$

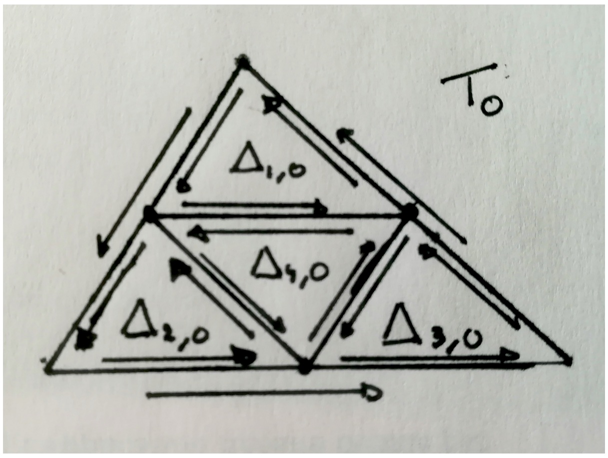
Le résultat est alors une conséquence du lemme précédent. □

Exercice 3.11. *Montrer que pour tout $z \in T_0$, il existe une suite de triangle T_n construite comme ci-dessus telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\tilde{z}\in T_n} |\tilde{z} - z| = 0.$$

Preuve du Théorème de Goursat Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 3.4.

Preuve du Théorème 3.4. Soit donc Ω un ouvert non vide, $f \in H(\Omega)$ et γ_0 un lacet triangulaire, que l'on suppose orienté dans le sens trigonométrique (le sens horaire se traite pareil, *mutatis mutandis*). On note T_0 le triangle image de γ_0, que l'on divise en quatre triangles $\Delta_{1,0}$, $\Delta_{2,0}$, $\Delta_{3,0}$ et $\Delta_{4,0}$ tels que définis par (3.2), et auxquels on associe quatres lacets triangulaire $\gamma_{1,0}$, $\gamma_{2,0}$, $\gamma_{3,0}$ et $\gamma_{4,0}$ orientés aussi dans le sens trigonométrique.



Il est facile de voir (mais pas forcément de démontrer rigoureusement) que par construction

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{1,0}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_{2,0}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_{3,0}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_{4,0}} f(\zeta)\,d\zeta,$$

ce qui implique en particulier qu'il existe un des lacets triangulaires $\gamma_{i,0} := \gamma_1$ correspondant au triangle $\Delta_i := T_1$ tel que

$$\left|\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta\right|.$$

En recommençant le processus dans T_1, on voit que l'on construit une suite de triangles T_n telle que décrite au chapitre précédent, auxquels correspondent des lacets triangulaires γ_n, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{\gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta\right| \geq \left(\frac{1}{4}\right)^n \left|\int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta\right|. \tag{3.4}$$

D'après le Lemme 3.4, il existe $z_\infty \in T_0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in T_n} |z - z_\infty| = 0.$$

Comme f est holomorphe en z_∞, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_\eta(z_0)$, on a

$$|f(z) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(z - z_\infty)| \leq \varepsilon |z - z_\infty|.$$

De plus, comme $z \mapsto 1$ et $z \mapsto (z - z_\infty)$ admettent dans Ω des primitives, à savoir respectivement $z \mapsto z$ et $z \mapsto (z - z_\infty)^2$, on déduit de la Proposition 3.10 que

$$\int_{\gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_n} \left(f(\zeta) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(\zeta - z_\infty)\right)\,d\zeta.$$

Enfin, par le lemme 3.4, pour n assez grand on a $\partial T_n \subset \mathcal{D}_\eta(z_\infty)$. On en déduit que pour n assez grand

$$\left|\int_{\gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta\right| = \left|\int_{\gamma_n} (f(\zeta) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(\zeta - z_\infty))\,d\zeta\right| \leq \left|\int_{\gamma_n} |f(\zeta) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(\zeta - z_\infty)|\,d\zeta\right|$$
$$\leq \varepsilon \sup_{z\in\partial T_n} |z - z_\infty|L(\partial T_n),$$

ce qui donne en appliquant les Lemmes 3.2 et 3.4

$$\left|\int_{\gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n L(\partial T_0)^2\,\varepsilon. \tag{3.5}$$

Ainsi, (3.4) et (3.5) donne

$$\left|\int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta\right| \leq L(\partial T_0)^2\,\varepsilon,$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne le résultat. □

Les fonctions holomorphes sont analytiques !

Théorème 3.5. *Soit $f \in H(\Omega)$. Alors f est analytique dans Ω.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $\mathcal{D}_r(z_0) \subset \Omega$. Comme $\mathcal{D}_r(z_0)$ est étoilé et $f \in H(\mathcal{D}_r(z_0))$, le Théorème de Goursat, et plus précisément son Corollaire 3.4 implique que f admet une primitive F dans $\mathcal{D}_r(z_0)$. Comme $F' = f \in C^0(\mathcal{D}_r(z_0))$, on a $F \in C^1(\mathcal{D}_r(z_0))$, et donc F est analytique dans $\mathcal{D}_r(z_0)$... et c'est donc aussi le cas de $f = F'$, ce qui termine la preuve. □

Nous venons donc de montrer que **les fonctions holomorphes sont analytiques**. Comme nous savions déjà que les fonctions analytiques sont holomorphes, il vient

$$\boxed{f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f \text{ analytique dans } \Omega}$$

Ainsi, pour une fonction de la variable complexe, être dérivable (sans hypothèse de régularité sur la dérivée) implique être C^∞. Étonnant, non ?

Notons que l'on peut maintenant modifier l'ensemble des énoncés des résultats du Chapitre 3.2, en remplaçant l'hypothèse C^1 par holomorphe, les résultats restant vrais. Ainsi, les fonctions holomorphes vérifient le principe du prolongement analytique et le principe du maximum.

Pour rappel, voici un résumé des étapes menant à ce résultat.

1. f analytique $\Rightarrow$ f holomorphe,
2. f est C^1 $\Rightarrow$ f analytique,
3. f holomorphe $\Rightarrow$ f admet une primitive localement F $\Rightarrow$ F est C^1 $\Rightarrow$ f est la dérivée d'une fonction analytique.

Rajouter remarque sur les fonctions harmoniques

Logarithme complexe

Proposition 3.13. *L'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est étoilé.*

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{O}$. Soit $\Im(z) \neq 0$, et alors pour tout $t \in [0, 1]$, $z_t = t + (1-t)z \in \mathcal{O}$, puisque

$$\Im(z_t) = \Im(t + (1-t)z) = (1-t)\Im(z) \neq 0 \text{ si } t \neq 1,$$

et $z_1 = 1 \in \mathcal{O}$. Soit $\Im(z) = 0$, ce qui implique $\Re(z) = z > 0$, et donc pour tout $t \in [0, 1]$, $z_t = t+(1-t)z \in \mathcal{O}$ puisque

$$\Im(z_t) = 0 \text{ et } \Re(z_t) = t + (1-t)z > 0.$$

On en déduit immédiatement que $\mathcal{O}$ est étoilé par rapport à 1. □

Conséquence immédiate de cette proposition : la fonction $z \in \mathcal{O} \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur $\mathcal{O}$, puisqu'elle y est holomorphe. On note L l'unique fonction holomorphe sur $\mathcal{O}$ telle que

$$L'(z) = \frac{1}{z} \text{ et } L(1) = 0.$$

Proposition 3.14. *Pour tout $x \in (0, \infty)$, $L(x) = \ln(x)$, où $\ln : x \in (0, +\infty) \mapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$ est l'unique primitive de $x \in (0, +\infty) \mapsto x^{-1}$ s'annulant en 0. Autrement dit, L est le prolongement analytique de* ln *sur $\mathcal{O}$.*

Démonstration. Soit $x > 0$ et $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto t\,x + (1 - t) \in \mathcal{O}$. Alors

$$L(x) = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{x-1}{1 + t(x-1)}\, dt = [\ln(1 + t(x-1))]_0^1 = \ln(x).$$

□

Exercice 3.12. *Montrez qu'il n'existe pas d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}_*$ vérifiant $\mathcal{O} \subsetneq \Omega$ tel que* ln *admette un prolongement analytique sur Ω.*

Exercice 3.13. *Montrez que pour tout $z \in \mathcal{O}$, $z = |z|e^{\imath\,\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a*

$$L(z) = \ln(|z|) + \imath\theta.$$

En déduire que L est une bijection de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R} + \imath\,]-\pi, \pi[$. A-t-on $L(z_1 z_2) = L(z_1) + L(z_2)$ pour tout z_1, z_2 dans $\mathcal{O}$?

Exercice 3.14. *Montrez que pour tout $z \in \mathcal{D}_1(0)$,*

$$L(1 + z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}.$$

Exercice 3.15. *Montrez que pour tout $z \in \mathcal{O}$, $z = x + \imath\,y$, on a*

$$L(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2\,\imath \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Exercice 3.16. *On note*

$$E : z \in \mathbb{R} + \imath\,]-\pi, \pi[\mapsto e^z \in \mathcal{O}.$$

Comme E est la restriction de exp *à un ouvert de $\mathbb{C}$, on a $E \in H(\mathbb{R} + \imath\,]-\pi, \pi[)$ et pour tout $z \in \mathbb{R} + \imath\,]-\pi, \pi[$, $E'(z) = \exp(z)$. De plus, il n'est pas difficile de voir que E est une bijection de $\mathbb{R} + \imath\,]-\pi, \pi[$ dans $\mathcal{O}$.*

Montrez que pour tout $z \in \mathbb{R} + \imath\,]-\pi, \pi[$, on a

$$L(E(z)) = z,$$

et pour tout $z \in \mathcal{O}$,

$$E(L(z)) = z.$$

Correction

Pour la première égalité, on peut noter que pour tout z dans $\mathbb{R} + \imath\,]-\pi, \pi[$, on a

$$(L \circ E)'(z) = E'(z) L'(E(z)) = \exp(z) \frac{1}{\exp(z)} = 1,$$

et donc $L(E(z)) = z + c$ comme $\mathbb{R} + \imath\,]-\pi,\pi[$ est connexe. Comme par ailleurs $L(E(0)) = L(1) = 0$, le résultat suit.

La seconde égalité peut s'obtenir en remarquant que si on note

$$F : z \in \mathcal{O} \mapsto \frac{E(L(z))}{z},$$

$F \in H(\mathcal{O})$ et $F' = 0$ dans $\mathcal{O}$, ou bien en utilisant le résultat de l'exercice 3.13.

Fonctions puissances – À faire.

3.4 Indice – Formule de Cauchy, cas étoilé

Indice d'un lacet par rapport à un point .

Définition 3.10 (Indice). *Soit γ un lacet, Γ l'image de γ et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. On appelle* indice du point z_0 par rapport au lacet γ *le nombre complexe $I_\gamma(z_0)$ défini par*

$$I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\imath\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

Il est clair que la fonction I_γ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ (continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre). Par ailleurs, dans le cas particulier où $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \tilde{z} + Re^{\imath\, 2\, m\, \pi\, t}$, avec $z \in C$, $R > 0$ et $m \in \mathbb{Z}_*$, on a déja obtenu

$$I_\gamma(z_0) = \begin{cases} m \text{ si } |z - z_0| < R \\ 0 \text{ si } |z - z_0| > R. \end{cases}$$

Cette propriété étonnante (valeur constante et entière de l'indice) est en fait un résultat général.

Exercice 3.17. *Soit Ω connexe et $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continue telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \in \alpha\,\mathbb{Z}$. Montrez que f est constante sur Ω.*

Proposition 3.15. *La fonction I_γ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, et à valeurs entières.*

Démonstration. On suppose que γ est défini sur $[a, b]$, et on pose

$$f : t \in [a, b] \mapsto \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds\right).$$

Comme

$$f'(t) = f(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0},$$

on a

$$\left(\frac{f}{\gamma - z_0}\right)' = \frac{f'(\gamma - z_0) - f\,\gamma'}{(\gamma - z_0)^2} = 0.$$

Donc la fonction

$$t \in [a, b] \mapsto \frac{f(t)}{\gamma(t) - z_0} \in \mathbb{C},$$

est constante, et en particulier

$$\frac{f(a)}{\gamma(a) - z_0} = \frac{f(b)}{\gamma(b) - z_0},$$

ce qui implique, puisque $\gamma(a) = \gamma(b)$, que

$$\exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds\right) = f(b) = f(a) = 1.$$

Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds = 2\imath\, m\, \pi.$$

Comme $I_\gamma(z_0)$ est de plus continue sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, le résultat suit. $\square$

Lemme 3.5. *Soit $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un lacet, $\Gamma = \gamma([a, b])$. $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a une unique composante connexe non bornée $\beth$, et pour tout $z \in \beth$, $I_\gamma(z) = 0$.*

Démonstration. Comme γ est continu, on peut définir

$$M = \max_{t \in [a,b]} |\gamma(t)|.$$

En particulier, $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \geq M + 1\}$ est connexe et vérifie

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z| \geq M + 1\} \cap \Gamma = \emptyset.$$

Soit $\beth_1$ et $\beth_2$ deux composantes connexes non bornées de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Alors il existe $z_1 \in \beth_1$ et $z_2 \in \beth_2$ tels que $|z_1| \geq M + 1$ et $|z_2| \geq M + 2$, donc z_1 et z_2 appartiennent à $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \geq M + 1\}$, donc $\beth_1 = \beth_2$.

Enfin, comme I_γ est constante sur $\beth$ qui est non borné, il suffit de faire tendre $|z|$ vers l'infini pour obtenir $I_\gamma = 0$ sur $\beth$. $\square$

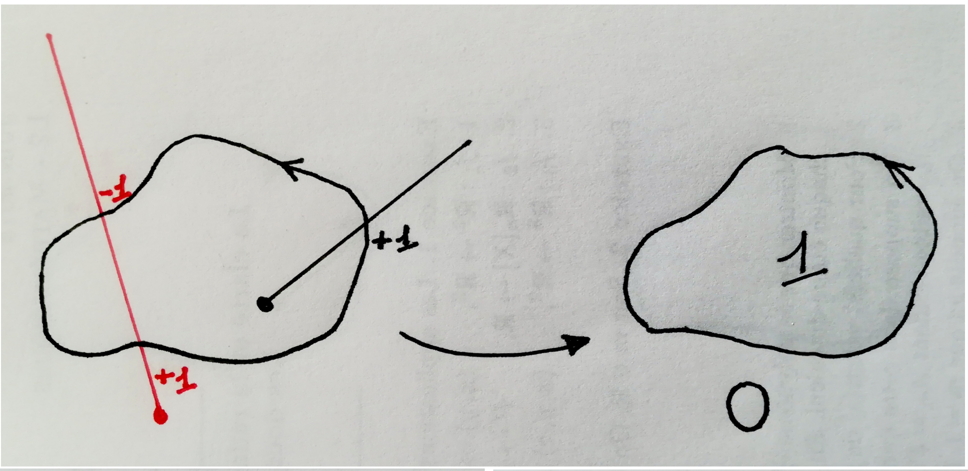
Exercice 3.18. *Soit $r : [0, 1] \mapsto (0, \infty)$ continue telle que $r(0) = r(1)$, et $\omega : [0, 1] \mapsto [-1, 1]$ continue et surjective telle que $\omega(0) = -1$, $\omega(1) = 1$ et pour tout t dans $(0, 1)$, $\omega(t) \in (-1, 1)$. On définit le chemin*

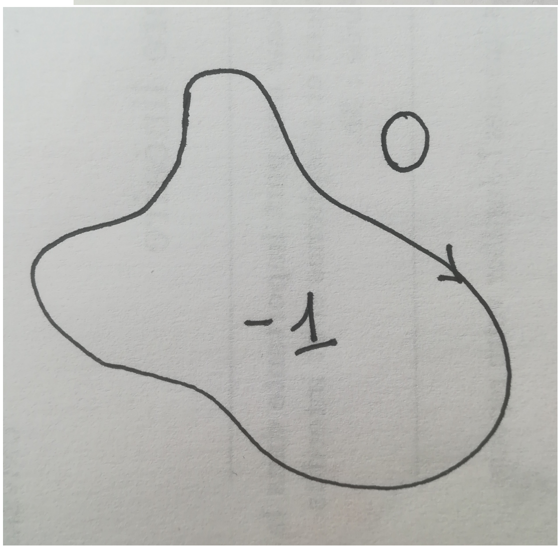
$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto r(t) e^{\imath\, \pi\, \omega(t)}.$$

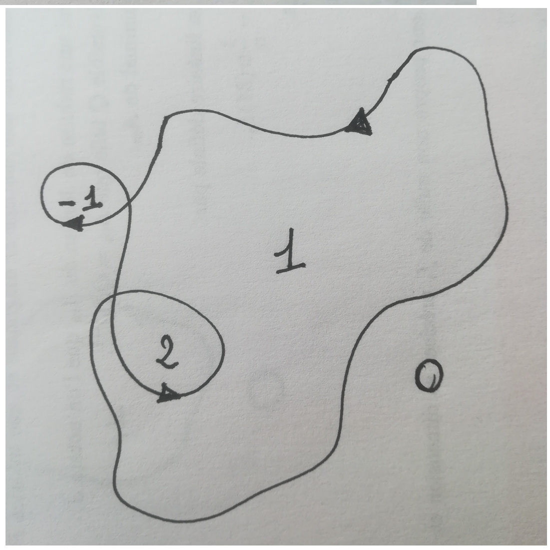
- *Faire un dessin.*
- *Calculez $I_\gamma(z)$ pour tout $z \notin \Gamma$. (Indication : pensez au logarithme complexe)*

En pratique, pour obtenir la valeur de l'indice, on procède comme suit : on choisit un point z_0 dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, on trace une demi-droite quelconque partant de ce point. À chaque intersection de cette demi-droite avec Γ, on ajoute un à l'indice si Γ est à cet endroit est parcouru dans le sens trigonométrique *par rapport à z_0*, on soustrait un si Γ est parcouru dans le sens horaire, on ajoute deux si Γ est parcouru deux fois dans le sens trigonométrique, etc, etc, en partant bien sûr de zéro. Le résultat est l'indice du point par rapport à γ, et donc la valeur de l'indice dans la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ contenant z_0.

Quelques exemples (on suppose ici que le lacet est parcouru une unique fois) :







Exercice 3.19. *Pour $a > 0$ et $b > 0$, on pose définit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto a\cos(t) + \imath b\sin(t)$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin(t)^2}$.*

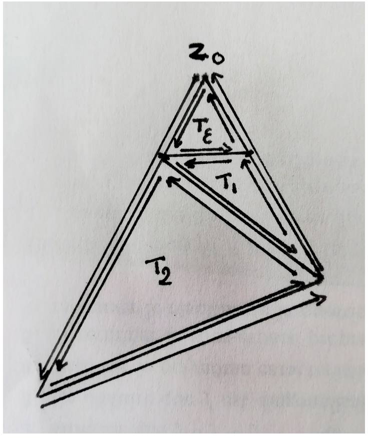
Formule de Cauchy (II)

Proposition 3.16. *Soit Ω un ouvert non-vide et $z_0 \in \Omega$. Soit f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Alors pour tout lacet triangulaire γ inclu dans Ω, tel que le triangle T de frontière Γ soit contenu dans Ω, on a*

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Démonstration. Soit γ un lacet triangulaire de Ω, que l'on suppose orienté dans le sens trigonométrique, et T le triangle correspondant. Si $z_0 \notin T$, le résultat est une conséquence du Théorème 3.4. Le seul cas d'intérêt est donc $z_0 \in T$.

Considérons tout d'abord le cas où z_0 est un sommet de T. On découpe le triangle T comme ci-dessous :



Dans cette construction, le triangle T_ε est supposé isocèle, les deux côtés issus de z_0 étant de longueur $\varepsilon > 0$. On note γ_ε, γ_1 et γ_2 les lacets triangulaires correspondant aux triangles T_ε, T_1 et T_2.

Par construction, on a

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Comme z_0 n'appartient ni à T_1, ni à T_2, on a

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta = 0,$$

et donc

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta)\,d\zeta.$$

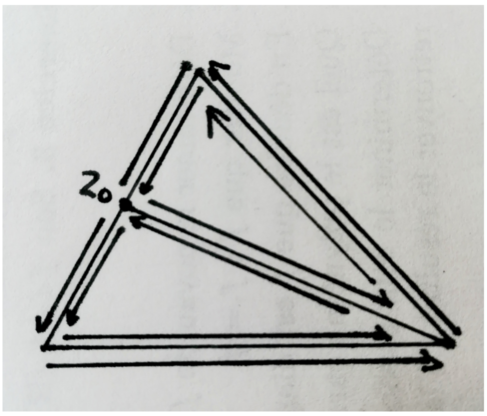
Soit $\eta > 0$ tel que $\overline{\mathcal{D}_\eta(z_0)} \subset \Omega$, et

$$M = \max_{z \in \overline{\mathcal{D}_\eta(z_0)}} |f(z)|,$$

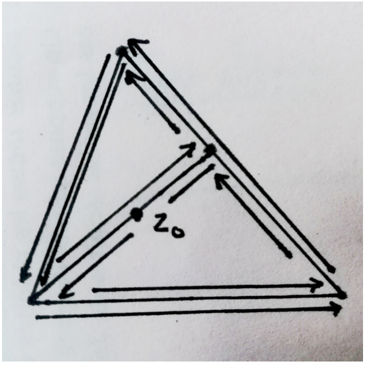
qui est bien défini puisque f est continu sur Ω. Pour ε assez petit, on a $T_\varepsilon \subset \overline{\mathcal{D}_\eta(z_0)}$, et donc

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta)\,d\zeta \right| \leq ML(\partial T_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

ce qui donne donc le résultat quand z_0 est un sommet de T. Si z_0 appartient à un côté de T sans être un sommet, on se ramène au cas précédent par la constructions ci-dessous.



Enfin, si z_0 est situé à l'intérieur de T, on se ramène au cas précédent par la construction ci-dessous. Le résultat suit...



$\square$

Corollaire 3.5. *Soit z_0 dans Ω et $f \in C^0(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Alors $f \in H(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $\eta > 0$ tel que $\mathcal{D}_\eta(z_0) \subset \Omega$. Comme $\mathcal{D}_\eta(z_0)$ est étoilé, tout lacet triangulaire γ contenu dans $\mathcal{D}_\eta(z_0)$ délimitant un triangle T vérifie $T \subset \mathcal{D}_\eta(z_0)$. Comme $f \in C^0(\mathcal{D}_\eta(z_0)) \cap H(\mathcal{D}_\eta(z_0) \setminus \{z_0\})$, on a d'après la Proposition précédente

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

pour tout lacet triangulaire γ contenu dans $\mathcal{D}_\eta(z_0)$. D'après la Proposition 3.12, f admet une primitive dans $\mathcal{D}_\eta(z_0)$, elle y est donc holomorphe. $\square$

Proposition 3.17 (Formule de Cauchy (II))**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ étoilé. Pour tout lacet γ contenu dans $\tilde{\Omega}$, pour tout $z \in \tilde{\Omega} \setminus \Gamma$, on a*

$$f(z)\, I_\gamma(z) = \frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Démonstration. Pour z dans $\tilde{\Omega} \setminus \Gamma$, on définit

$$F : \zeta \in \tilde{\Omega} \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ si } \zeta \neq z \\ f'(z) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par construction, F est continue dans $\tilde{\Omega}$, et holomorphe dans $\tilde{\Omega} \setminus \{z\}$. D'après le Corollaire 3.5, elle est donc holomorphe dans $\tilde{\Omega}$ qui est étoilé, donc elle y admet une primitive d'après le Corollaire 3.4. On en déduit

$$0 = \int_\gamma F(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)\, 2\,\imath\,\pi\, I_\gamma(z).$$

$\square$

Exercice 3.20 (Lemme de Jordan)**.** *Soit $R > 0$, et f définie sur $\{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0,\ |z| > R\}$, telle que $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$. Pour $\rho > R$, on note $\gamma_\rho : t \in [0, \pi] \mapsto \rho\, e^{\imath t}$. Montrez que*

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, e^{\imath z}\, dz = 0.$$

Indication : on pourra utiliser (après l'avoir montré) que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$.

Application : pour $\rho > 1$, *calculer*

$$\int_{-\rho}^{\rho} \frac{z\, e^{\imath z}}{z^2+1}\, dz + \int_{\gamma_\rho} \frac{z\, e^{\imath z}}{z^2+1}\, dz,$$

puis en déduire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, \sin(x)}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e}.$$

Exercice 3.21. *Par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent, calculer*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}.$$

3.5 Primitives et formule de Cauchy, cas général

Proposition 3.18 (Formule de Cauchy (III))**.** *Soit* Ω *un ouvert et* f *holomorphe dans* Ω. *Soit* γ *un lacet contenu dans* Ω *tel que pour tout* $z \notin \Omega$, $I_\gamma(z) = 0$. *Alors pour tout* $z \in \Omega \setminus \Gamma$, *on a*

$$f(z)\, I_\gamma(z) = \frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Proposition 3.19 (Existence de primitive)**.** *Si* Ω *est simplement connexe, et* f *est holomorphe dans* Ω, *alors* f *admet une primitive dans* Ω.

La notion de simple connexité n'est pas simple à définir : en gros, elle signifie que l'ouvert est sans trou. Il faut savoir qu'un ouvert simplement connexe est connexe par définition, que les ouverts étoilés sont simplement connexes, et qu'un ouvert connexe et borné est simplement connexe si et seulement si son complémentaire est connexe.

Chapitre 4

Singularités – Résidus

4.1 Singularités – Pôles

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $\dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$ le disque épointé de rayon r centré en z_0, c'est-à-dire

$$\dot{\mathcal{D}}_r(z_0) = \mathcal{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Définition 4.1 (Singularité isolée)**.** *Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. $z_0 \in \mathbb{C}$ est une singularité isolée de f si il existe $r > 0$ tel que f soit définie et holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$.*

Exercice 4.1. *Soit z_0 une singularitée isolée de $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Montrez que $z_0 \in \overline{\Omega}$.*

Exercice 4.2. *Soit Ω connexe, $f \in H(\Omega)$, f non nulle. Soit $\mathscr{Z}$ l'ensemble des zéros de f, et*

$$g : z \in H(\Omega) \setminus \mathscr{Z} \mapsto \frac{1}{f(z)}.$$

Soit $z_0 \in \mathscr{Z}$. Montrez que z_0 est une singularité isolée de g.

Cette définition peut semble un peu étrange, puisque si f est holomorphe sur Ω, alors tout z de Ω est une singularité isolée de f, quand bien même elle est analytique sur Ω. Il va donc nous falloir faire la différence entre de "vraies" singularités, et de fausses "singularités".

Définition 4.2 (Types de singularités)**.** *Soit $f \in \Omega$ et z_0 une singularité isolée de f. On dit que*
- *z_0 est une singularité fictive de f si*

$$(z - z_0)f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0.$$

- *z_0 est un pôle de f si ce n'est pas une singularité fictive de f et il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que*

$$(z - z_0)^{m+1}f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0.$$

  Dans ce cas, l'entier

$$m_0 = \min\left\{m \in \mathbb{N},\ (z - z_0)^{m+1}f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0\right\},$$

  est appelé ordre du pôle de f en z_0.
- *z_0 est une singularité essentielle de f si ce n'est ni une singularité fictive, ni un pôle de f.*

Avec cette définition, il est clair que si f est holomorphe dans Ω, alors tous les points de Ω sont des singularités fictives de Ω, ce qui est rassurant. Notons également que si z_0 est un pôle d'ordre m, alors nécessairement $m \geq 1$.

Proposition 4.1. *Soit f définie sur Ω, z_0 une singularité isolée de f, et $r > 0$ tel que f soit holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$. Les quatres propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) z_0 est une singularité fictive de f,
(ii) f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}_r(z_0)$,
(iii) f admet une limite finie en z_0,
(iv) f est bornée dans un voisinage de z_0.

Démonstration. Clairement, $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$. Il s'agit donc juste de montrer que (i) implique (ii).

Supposons donc (i), et définissons

$$h : z \in \mathcal{D}_r(z_0) \mapsto \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) \text{ si } z \neq z_0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par construction, h est continue sur $\mathcal{D}_r(z_0)$ et holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$. Nous savons donc (Corollaire 3.5) que h est holomorphe sur $\mathcal{D}_r(z_0)$. On a de plus

$$h(z_0) = \lim_{z \mapsto z_0} (z - z_0)^2 f(z) = 0, \quad h'(0) = \lim_{z \mapsto z_0} \frac{h(z)}{z - z_0} = \lim_{z \mapsto z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

En développant h en série entière au voisinage de z_0, il vient

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z - z_0)^n.$$

On en déduit que dans un voisinage de z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z - z_0)^n,$$

qui est bien une fonction holomorphe sur ce voisinage. Le résultat suit. $\square$

Proposition 4.2. *Soit f définie sur Ω, z_0 une singularité isolée de f, et $r > 0$ tel que f soit holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. z_0 est un pôle d'ordre m si et seulement si il existe h holomorphe sur $\mathcal{D}_r(z_0)$ vérifiant $h(0) \neq 0$ telle que*

$$\forall z \in \dot{\mathcal{D}}_r(z_0), \ f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Démonstration. La partie seulement si du corollaire est immédiate. Considérons donc la partie seulement si, et définissons

$$\tilde{h} : z \in \mathcal{D}_r(z_0) \mapsto \begin{cases} (z - z_0)^{m+1} f(z) \text{ si } z \neq z_0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par construction, $\tilde{h} \in C^0(\mathcal{D}_r(z_0)) \cap H(\dot{\mathcal{D}}_r(z_0))$, donc $\tilde{h} \in H(\mathcal{D}_r(z_0))$, et comme de plus $\tilde{h}(0) = 0$, il existe $k \geq 0$ et $h \in H(\mathcal{D}_r(z_0))$ vérifiant $h(0) \neq 0$ tel que

$$\tilde{h}(z) = (z - z_0)^{k+1} h(z).$$

Supposons $k \geq 1$, on aurait alors pour tout $z \in \dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$,

$$(z - z_0)^{k+1} h(z) = (z - z_0)^{m+1} f(z) \Rightarrow (z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^k h(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0,$$

en contradiction avec le fait que m est l'ordre du pôle z_0. Donc $k = 0$, d'où l'on déduit directement pour tout $z \in \dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$,

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}.$$

La preuve est achevée. $\square$

Corollaire 4.1. *Soit f définie sur Ω présentant un pôle en z_0. Alors*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Corollaire 4.2. *Soit f définie sur Ω, et z_0 une singularité isolée de f. Si $|f|$ n'admet pas de limite (finie ou infinie) en z_0, alors z_0 est une singularité essentielle de f.*

Exercice 4.3. *Soient*

$$f_1 : z \in \mathbb{C}_* \mapsto \frac{\sin(z)}{z}, \ f_2 : z \in \mathbb{C}_* \mapsto \frac{\sin(z)}{z^4}, \ f_3 : z \in \mathbb{C}_* \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Quelle est la nature de la singularité isolée 0 *pour ces trois fonctions ?*

Exercice 4.4. *Soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$ et z_0 un zéro de Q. Montrez que z_0 est une singularité isolée de la fraction rationnelle $R = \frac{P}{Q}$. Quelle est la nature de cette singularité ?*

Exercice 4.5. *On reprend les notations de l'exercice 4.2. Montrez que z_0 est un pôle de g.*

4.2 Fonctions méromorphes – Théorèmes des résidus (I)

Fonctions méromorphes

Définition 4.3 (Fonctions méromorphes)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est méromorphe sur Ω si tout point de Ω est une singularité isolée de f qui est soit une singularité fictive, soit un pôle de f.*

Notons que par définition, une fonction holomorphe sur Ω est méromorphe sur Ω. On a par ailleurs vu dans les exercices de la section précédente que si f est holomorphe sur Ω, alors $\dfrac{1}{f}$ est méromorphe sur Ω.

Exercice 4.6. *Soit f et g méromorphes sur Ω. Montrez que $f + g$, $f\,g$ sont méromorphes sur Ω. Que peut-on dire sur l'ensemble des pôles de $f + g$? De $f\,g$?*

Correction
Soit $z \in \Omega$. Il existe $r_1 > 0$ tel que f soit holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_{r_1}(z)$, et $r_2 > 0$ tel que g soit holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_{r_2}(z)$. Soit $r = \min(r_1, r_2)$, on a $f + g$ et $f\,g$ holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_r(z)$: tout point de Ω est une singularité isolée de $f + g$ et $f\,g$.

Toujours pour le même z : comme z est soit une singularité fictive, soit un pôle de f, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{\zeta \to z} (\zeta - z)^{m+1} f(\zeta) = 0.$$

De même, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{\zeta \to z} (\zeta - z)^{n+1} g(\zeta) = 0.$$

Notons $M = \max(m, n)$ et $N = m + n + 1$, il vient directement que

$$\lim_{\zeta \to z} (\zeta - z)^{M+1} \left(f(\zeta) + g(\zeta)\right) = 0, \quad \lim_{\zeta \to z} (\zeta - z)^{N+1} f(\zeta)\, g(\zeta) = 0.$$

Donc $f + g$ et $f\, g$ sont méromorphes dans Ω.

Quelques exemples de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \mapsto z^n$ ou $z \mapsto \sin(z)\, z^n$, $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$, $z \mapsto \exp(z)$.

Par contre $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ et $z \mapsto L(z)$ ne sont pas méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Proposition 4.3. *Soit f méromorphe sur Ω. Alors il existe un ensemble discret $\mathscr{P}$ contenu dans Ω tel que*

— *$f \in H(\Omega \setminus \mathscr{P})$,*

— *tout p élément de $\mathscr{P}$ est un pôle de f.*

Notons que l'ensemble $\mathscr{P}$ est éventuellement vide, et dans ce cas f est holomorphe sur Ω. Cette proposition est une conséquence des deux Lemmes suivants :

Lemme 4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts de $\mathbb{C}$ tels que $K_n \subset K_{n+1} \subset \Omega$ et*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega.$$

Démonstration. Il suffit de prendre

$$K_n = \overline{\mathcal{D}_n(0)} \cap \left\{ x \in \Omega,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n+1} \right\}.$$

□

Lemme 4.2. *Soit f méromorphe dans Ω et K un compact contenu dans Ω. Alors f a un nombre fini de pôles dans K.*

Démonstration. Par définition, tout z de K est une singularité isolée de f, donc il existe $r_z > 0$ tel que f soit holomorphe sur $\dot{\mathcal{D}}_{r_z}(z)$. Clairement,

$$K \subset \bigcup_{z\in K} \mathcal{D}_{r_z}(z),$$

et donc comme K est compact, il existe $z_0, \ldots, z_M$ tel que

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{M} \mathcal{D}_{r_{z_k}}(z_k).$$

Donc pour tout $z \in K$, il existe $k \in \{0, \ldots, M\}$ tel que $z \in \mathcal{D}_{r_{z_k}}(z_k)$, et si $z \neq z_k$, $z \in \dot{\mathcal{D}}_{r_{z_k}}(z_k)$ et donc f est dérivable en z. f est donc dérivable sur $\Omega \setminus \{z_0, \ldots, z_M\}$. Il suffit maintenant d'éliminer de $\{z_0, \ldots, z_M\}$ les points éventuels qui sont des singularités fictives de f, et on obtient le résultat. □

Résidus Soit f méromorphe sur Ω, et $\mathscr{P}$ l'ensemble de ses pôles dans Ω. On suppose $\mathscr{P}$ non vide. Soit $p \in \mathscr{P}$ un pôle de f, d'ordre $m \geq 1$, et $\tilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \setminus \{p\}$.

Proposition 4.4. *Il existe une unique fonction g méromorphe sur Ω, admettant $\tilde{\mathscr{P}}$ comme ensemble de pôle, et un unique m-uplet $\{a_{-1}, \ldots, a_{-m}\}$, tels que pour tout z dans $\Omega \setminus \mathscr{P}$,*

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-p)^k}.$$

De plus, pour tout $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}$, $\tilde{m}$ est l'ordre du pôle $\tilde{p}$ pour f si et seulement si $\tilde{m}$ est l'ordre du pôle $\tilde{p}$ pour g.

Démonstration. Comme p est un pôle de f d'ordre m, on a déjà vu qu'il existe $r > 0$ et h holomorphe dans $\mathcal{D}_r(p)$ vérifiant $h(p) \neq 0$ tels que pour tout z dans $\dot{\mathcal{D}}_r(p)$,

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-p)^m}.$$

Comme h est holomorphe dans $\mathcal{D}_r(p)$, elle y est analytique, et donc il existe $\rho > 0$ et une unique suite de complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec $b_0 \neq 0$ tels que pour tout z dans $\mathcal{D}_\rho(p)$,

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-p)^k,$$

d'où il vient que pour tout z dans $\dot{\mathcal{D}}_\rho(p)$,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-p)^m} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{z-p} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k}(z-p)^k. \tag{4.1}$$

La fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{p\} \mapsto \frac{b_0}{(z-p)^m} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{z-p}$$

est holomorphe, donc

$$g : z \in \Omega \setminus \tilde{\mathscr{P}} \mapsto \begin{cases} f(z) - \dfrac{b_0}{(z-p)^m} + \ldots + \dfrac{b_{m-1}}{z-p} \text{ si } z \neq p, \\ b_m \text{ sinon,} \end{cases}$$

est holomorphe dans $\Omega \setminus \mathscr{P}$ et comme par 4.1, on a pour tout $z \in \dot{\mathcal{D}}_r(z_0)$,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k}(z-p)^k \xrightarrow[z\to z_0]{} b_m,$$

g est continue dans $\Omega \setminus \tilde{\mathscr{P}}$. La fonction g est donc holomorphe dans $\Omega \setminus \tilde{\mathscr{P}}$. On a obtenu l'existence de la décomposition. Comme pour tout $p \in \tilde{\mathscr{P}}$, $z \in \Omega \setminus \mathscr{P}$, et tout $q \in \mathbb{N}$,

$$(z-\tilde{p})^{q+1}(f(z)-g(z)) = (z-\tilde{p})^{q+1}\left(\frac{b_0}{(z-p)^m} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{z-p}\right) \xrightarrow[z\to\tilde{p}]{} 0,$$

les pôles de f dans $\tilde{\mathscr{P}}$ sont les pôles de g, et ils sont du même ordre.

L'unicité de la décomposition se montre de manière classique : supposons que nous ayons g_1, g_2 méromorphe dans Ω et holomorphe dans $\Omega \setminus \tilde{\mathscr{P}}$, et $(a_{-1}, \ldots, a_{-m})$, $(b_{-1}, \ldots, b_{-m})$ tels que pour tout z dans $\Omega \setminus \mathscr{P}$, on ait

$$f(z) = g_1(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-p)^k} = g_2(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{-k}}{(z-p)^k}.$$

On a alors pour tout z dans $\Omega \setminus \mathscr{P}$

$$(a_{-m} - b_{-m}) = (z-p)^m \left(g_2(z) - g_1(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b_{-k} - a_{-k}}{(z-p)^k}\right) \xrightarrow[z\to p]{} 0,$$

et donc $a_{-m} = b_{-m}$. On continue de proche en proche pour obtenir le résultat. $\square$

Définition 4.4 (Partie singulière – Résidu)**.** *Soit f méromorphe dans Ω, p un pôle d'ordre m de f. On appelle partie singulière de f en p, notée $\mathcal{S}_{f,p}$, l'unique fonction*

$$\mathcal{S}_{f,p} : z \in \mathbb{C} \setminus \{p\} \mapsto \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-p)^k}$$

définie dans la Proposition 4.4.

On appelle résidu de f en p, noté $Res(f,p)$, le complexe a_{-1}, coefficient de $\dfrac{1}{z-p}$ dans la partie singulière de f en p.

Le résidu d'une fonction méromorphe en un pôle va jouer un rôle très important dans la suite, il est donc primordial de savoir le calculer rapidement. On a la formule suivante :

Proposition 4.5. *Soit f méromorphe sur Ω, et p un pôle d'ordre m de f. Alors*

$$Res(f,p) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to p} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-p)^m f(z)\right).$$

Démonstration. On écrit

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-p} + \ldots + \frac{a_{-m}}{(z-p)^m} + g(z),$$

et donc on a

$$(z-p)^m f(z) = (z-p)^{m-1} a_{-1} + (z-p)^{m-2} a_{-2} + \ldots + a_{-m} + (z-p)^m g(z),$$

en dérivant $m-1$ fois, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-p)^m f(z)\right) &= a_{-1}\,(m-1)! + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} \frac{d^k}{dz^k} \left[(z-p)^m\right] g^{(m-1-k)}(z) \\
&= a_{-1}\,(m-1)! + (z-p) \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} \frac{m!}{(m-k)!} (z-p)^{m-k-1} g^{(m-1-k)}(z).
\end{aligned}$$

Le résultat suit. $\square$

Dans le cas d'un pôle d'ordre 1, c'est relativement simple, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 4.7 (IMPORTANT)**.** *Soit f holomorphe sur Ω, non nulle, $g = \frac{1}{f}$ et p un pôle d'ordre 1 de g. Montrez que*

$$Res(g,p) = \frac{1}{f'(p)}.$$

Soit f_1, f_2 holomorphe sur Ω, f_1 et f_2 non nulles, $g = \frac{f_1}{f_2}$, et p un pôle d'ordre 1 de g. Montrez que

$$Res(g,p) = \frac{f_1(p)}{f_2'(p)}.$$

Exercice 4.8 (BEAUCOUP MOINS IMPORTANT)**.** *Soit f holomorphe sur Ω, non nulle, $g = \frac{1}{f}$ et p un pôle d'ordre 2 de g. Montrez que*

$$Res(g,p) = -18 \frac{f''(p)}{(f^{(3)}(p))^2}.$$

Correction
On note que $f(z) = (z-p)^2 h(z)$ avec $h(p) \neq 0$ et h holomorphe dans un voisinage de p. En particulier

$$f'(z) = 2(z-p)h(z) + (z-p)^2 h'(z),$$

et donc

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-p)^2}{f(z)}\right] = \frac{2(z-p)f(z) - (z-p)^2 f'(z)}{f(z)^2} = -\frac{h'(z)}{h(z)^2} \xrightarrow[z \to p]{} -\frac{h'(p)}{h(p)^2}.$$

Si on développe h en série entière au voisinage de p, soit

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, (z-p)^k,$$

on a $h(p) = b_0$ et $h'(p) = b_1$. Mais

$$f(z) = (z-p)^2 h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-p)^{k+2},$$

et donc $b_0 = \frac{f''(p)}{2}$ et $b_1 = \frac{f^{(3)}(p)}{6}$. Au final

$$\mathrm{Res}(g,p) = -\frac{h'(p)}{h(p)^2} = -\frac{b_1}{b_0^2} = -\frac{f''(p)}{2} \frac{36}{(f^{(3)}(p))^2} = -18 \frac{f''(p)}{(f^{(3)}(p))^2}.$$

Exercice 4.9. *Calculez les résidus de* $\dfrac{1}{z^4+1}$ *en toutes les racines de* z^4+1.

Théorème des résidus

Proposition 4.6. *Soit f méromorphe dans Ω, $\mathscr{P}$ l'ensemble des pôles de f, et ω un ouvert borné tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Alors la fonction*

$$\mathscr{R}_{f,\omega} : z \in \omega \setminus (\mathscr{P} \cap \omega) \mapsto f(z) - \sum_{p \in \mathscr{P} \cap \omega} \mathscr{S}_{f,p}(z),$$

est bien définie, et se prolonge en une fonction holomorphe dans ω.

Démonstration. Notons que l'ensemble $\mathscr{P} \cap \omega$ est fini, ce qui est une conséquence directe du Lemme 4.2 puisque $\overline{\omega}$ est compact. Ainsi $\mathscr{R}_{f,\omega}$ est bien définie.

Par ailleurs, $\mathscr{R}_{f,\omega}$ est clairement holomorphe sur $\omega \setminus (\mathscr{P} \cap \omega)$. Finalement, pour $p \in \mathscr{P} \cap \omega$, on a d'un côté en reprenant les notations de la Proposition 4.4, $f - \mathscr{S}_{f,p} = g$ dérivable en p, et d'un autre côté pour tout $\tilde{p} \in \mathscr{P} \cap \omega$, $\tilde{p} \neq p$, $\mathscr{S}_{f,\tilde{p}}$ est dérivable en p. Le résultat suit. □

Lemme 4.3. *Soit $p \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}_*$. Pour $\{a_{-1}, \ldots, a_{-m}\}$ m complexes quelconques, on définit*

$$\mathscr{S} : z \in \mathbb{C} \setminus \{p\} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-p)^k}.$$

Soit γ un lacet tel que $p \notin \Gamma$. Alors

$$\int_\gamma S(\zeta)\, d\zeta = 2\,\imath\,\pi\, a_{-1} I_\gamma(p).$$

Démonstration. Notons tout d'abord que pour tout $k \in \{2, \dots, m\}$, la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{p\} \mapsto \frac{a_{-k}}{(z-p)^k}$$

admet pour primitive globale sur $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{p\} \mapsto \frac{-1}{k-1} \frac{a_{-k}}{(z-p)^{k-1}},$$

et donc

$$\int_\gamma \frac{a_{-k}}{(\zeta - p)^k} d\zeta = 0.$$

D'où

$$\int_\gamma S(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{\zeta - p}\, d\zeta + \sum_{k=2}^m \int_\gamma \frac{a_{-k}}{(\zeta-p)^k}\, d\zeta = 2\,\imath\,\pi\, a_{-1} I_\gamma(p).$$

□

Théorème 4.1 (Théorème des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert simplement connexe, f méromorphe dans Ω, $\mathscr{P}$ l'ensemble des pôles de f. Soit γ un lacet contenu dans Ω tel que et $\Gamma \cap \mathscr{P} = \emptyset$. Alors*

$$\frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{p \in \mathscr{P}} Res(f,p)\, I_\gamma(p).$$

Démonstration. Soit ω un ouvert borné simplement connexe vérifiant $\Gamma \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Soit $p \in \mathscr{P}$ vérifiant $p \notin \omega$. Alors p est nécessairement dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, et donc $I_\gamma(p) = 0$, ce qui montre que l'on a l'égalité

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \mathrm{Res}(f,p)\, I_\gamma(p) = \sum_{p \in \mathscr{P} \cap \omega} \mathrm{Res}(f,p)\, I_\gamma(p).$$

Comme de plus $\mathscr{P} \cap \omega$ est un ensemble fini puisque $\overline{\omega}$ est compact (Lemme 4.2), la somme est bien définie.

On considère maintenant la fonction $\mathscr{R}_{f,\omega}$ telle que définie dans la Proposition 4.6. Comme elle est holomorphe dans ω simplement connexe, elle admet une primitive dans ω (Proposition 3.19), et donc

$$\int_\gamma \mathscr{R}_{f,\omega}(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

ce qui nous donne immédiatement

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \left(\sum_{p \in \mathscr{P} \cap\, \omega} \mathscr{S}_{f,p}(\zeta) \right) d\zeta = \sum_{p \in \mathscr{P} \cap\, \omega} \int_\gamma \mathscr{S}_{f,p}(\zeta)\, d\zeta.$$

Le résultat est alors une conséquence immédiate des définition de la partie de f, $\mathscr{S}_{f,p}$, et du résidu de f en p, $\mathrm{Res}(f,p)$, (voir Définition 4.4), et du Lemme 4.3. □

Remarque 4.1. *Un lecteur attentif notera que l'on n'a pas besoin de l'hypothèse Ω simplement connexe, qui peut être remplacée par l'hypothèse plus faible : il existe ω simplement connexe borné vérifiant*

$$\gamma \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega.$$

Exercice 4.10. *Soit* $\mathrm{sinc} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & si\ x \neq 0, \\ 1 & sinon. \end{cases}$

a. Montrez que $\mathrm{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$.

On peut donc définir la transformée de Fourier de sinc : $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(x)\, e^{-\imath x\, \xi}\, dx$.

b. Montrez que $\hat{f}$ *est paire.*

On suppose $\xi \geq 0$, *et on définit* $f : z \in \mathbb{C}_* \mapsto \frac{\sin(z)}{z} e^{-\imath\, z\, \xi}$.

c. Montrez que f *peut-être étendue en une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *tout entier, que nous noterons toujours* f.

d. Pour $A > 0$, *on note* $\gamma_A : t \in [-1, 1] \mapsto A\, t$. *Montrez que*

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{A\to\infty} \int_{\gamma_A} f(z)\, dz.$$

Pour $A > 1$, *on définit*

$$\tilde{\gamma}_A : t \in [-1, 1] \mapsto \begin{cases} 2\,(A-1)\,t + A - 2 & \textit{si } t \leq -\frac{1}{2}, \\ \exp\left(\imath\left(t - \frac{1}{2}\right)\pi\right) & \textit{si } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 2\,(A-1)\,t + 2 - A & \textit{si } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$\gamma_+ : t \in [0, \pi] \mapsto \exp(\imath t)$ *et* $\gamma_- : t \in [0, \pi] \mapsto \exp(-\imath\, t)$.

e. Représentez sur un même dessin γ_A, $\tilde{\gamma}_A$, γ_+ *et* γ_-.

f. Montrez que

$$\int_{\gamma_A} f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}_A} f(z)\, dz = \frac{1}{2\,\imath}\left[\int_{\tilde{\gamma}_A} \frac{\exp(\imath(1-\xi)z)}{z}\, dz - \int_{\tilde{\gamma}_A} \frac{\exp(-\imath(1+\xi)z)}{z}\, dz\right].$$

g. En choisissant astucieusement des lacets d'intégration, calculez

$$\lim_{A\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_A} \frac{\exp(\imath(1-\xi)z)}{z}\, dz \;\; \textit{et} \;\; \lim_{A\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_A} \frac{\exp(-\imath(1+\xi)z)}{z}\, dz.$$

h. En déduire $\hat{f}(\xi)$ *pour tout* ξ.

Application : calcul d'intégrale

Fractions rationnelles

Soit R une fraction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{P}$ l'ensemble (fini) de ses pôles. On cherche à calculer

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(t)\, dt.$$

Fixons $r > 0$. On définit les deux chemins

$$\gamma_1 : t \in [-1, 1] \mapsto t\, r, \quad \gamma_2 : t \in [0, \pi] \mapsto r\, e^{\imath t},$$

et le lacet γ, union des deux chemins, que l'on peut paramatrer comme suit :

$$\gamma : t \in [-1, 1] \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2\,t + 1) \text{ si } t \in [-1, 0] \\ \gamma_2(\pi\, t) \text{ si } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Comme la fraction rationnelle R a un nombre fini de pôles, pour r assez grand elle n'en a pas sur Γ. Notons $\mathscr{P}_r = \{p \in \mathscr{P}, |p| < r, \Im(p) > 0\}$. Par le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{\gamma} R(\zeta)\, d\zeta = 2\,\imath\,\pi \sum_{p\in\mathscr{P}_r} \mathrm{Res}(R, p). \tag{4.2}$$

On a bien évidemment
$$\int_\gamma R(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_1} R(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_2} R(\zeta)\,d\zeta.$$
D'une part,
$$\int_{\gamma_1} R(\zeta)\,d\zeta = \int_{-1}^{1} R(t\,r)\,r\,dt = \int_{-r}^{r} R(t)\,dt \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} R(t)\,dt.$$
Si d'autre part
$$\int_{\gamma_2} R(\zeta)\,d\zeta = \int_0^\pi R(r\,e^{\imath t})\,r\,e^{\imath t}dt \xrightarrow[r\to\infty]{}= 0,$$
il vient, en passant à la limite $r \to \infty$ dans (4.2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)\,dt = 2\,\imath\,\pi \sum_{p\in\mathscr{P},\Im(p)>0} \mathrm{Res}(R,p).$$

Exemple : considérons $R(t) = \dfrac{t^2}{1+t^6}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $r > 1$ et $t \in [0,\pi]$, on a
$$|R(r\,e^{\imath t})| = \frac{r^2}{|1+r^6 e^{6\,\imath t}|} \le \frac{r^2}{r^6-1},$$
il vient
$$\left|\int_{\gamma_2} R(\zeta)\,d\zeta\right| \le \pi\frac{r^3}{r^6-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,$$
et donc
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)\,dt = 2\,\imath\,\pi \sum_{p\in\mathscr{P}_+} \mathrm{Res}(r,p),$$
où l'on a noté $\mathscr{P}_+$ l'ensemble des pôles de R de partie imaginaire strictement positive. Notons
$$R(z) = \frac{z^2}{P(z)},\ P(t) = 1+z^6 = \prod_{k=0}^{5}(z-p_k),$$
avec p_k les pôles de R, tous d'ordre 1, donnés par
$$p_k = e^{i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{\imath\,\frac{k\,\pi}{3}} = e^{\imath\,\frac{\pi}{6}(1+2\,k)},\ k\in\{0,\ldots,5\}\,.$$
Parmi ces pôles, seuls p_0, p_1 et p_2 ont une partie réelle strictement positive, d'où
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{1+t^6}\,dt = 2\,\imath\,\pi\left(\frac{p_0^2}{P'(p_0)} + \frac{p_1^2}{P'(p_1)} + \frac{p_2^2}{P'(p_2)}\right).$$
En se rappelant que par définition, $p_k^6 = -1$, on obtient sans peine
$$\frac{p_0^2}{P'(p_0)} = \frac{1}{6}\frac{p_0^2}{p_0^5} = -\frac{p_0^3}{6} = -\frac{\imath}{6},$$
et de la même manière
$$\frac{p_1^2}{P'(p_1)} = \frac{\imath}{6},\quad \frac{p_2^2}{P'(p_2)} = -\frac{\imath}{6},$$
d'où au final
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{1+t^6}\,dt = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 4.11. *Montrez que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 4.12. *Montrez que pour tout $n \geq 2$,*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Indication : prendre pour lacet d'intégration l'union des chemins

$$\gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto r\,t,\ \ \gamma_2 : t \in [0,1] \mapsto r\,e^{2\,\imath \frac{\pi}{n}\,t},\ \ \gamma_3 : t \in [0,1] \mapsto r\,(1-t)e^{2\,\imath \frac{\pi}{n}}.$$

Exercice 4.13. *On considère une fraction rationnelle $R = \frac{P}{Q}$ vérifiant $\deg(P) + 2 \leq \deg(Q)$, et P, Q non nuls premiers entre eux. On suppose que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et on note $a_0, \ldots, a_N$ les racines de Q de parties imaginaires strictement positives. Montrez que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = 2\,\imath\,\pi \sum_{k=0}^{N} \operatorname{Res}(R, a_k).$$

Application : montrez que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2},\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{3\,\pi}{8}.$

Fraction rationnelle de cos **et** sin

On considère une fraction rationnelle de deux variables $R(x,y)$ sans pôle sur le cercle unité, et l'intégrale

$$I = \int_0^{2\,\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt.$$

Comme on a

$$\cos(t) = \frac{e^{\imath t} + e^{-\imath t}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{\imath t} - e^{-\imath t}}{2\imath},$$

on peut réecrire l'intégrale

$$I = \int_0^{2\,\pi} R\left(\frac{e^{\imath t} + e^{-\imath t}}{2}, \frac{e^{\imath t} - e^{-\imath t}}{2\imath}\right)dt = \int_0^{2\,\pi} R\left(\frac{e^{2\,\imath t}+1}{2e^{\imath t}}, \frac{e^{2\,\imath t}-1}{2\imath e^{\imath t}}\right)\frac{1}{\imath e^{\imath t}}\imath e^{\imath t} dt,$$

soit encore, en posant

$$\gamma : t \in [0, 2\,\pi] \mapsto e^{\imath\,t},$$

qui vérifie évidemment $\gamma'(t) = \imath e^{\imath\,t}$,

$$I = \int_0^{2\,\pi} R\left(\frac{\gamma(t)^2+1}{2\,\gamma(t)}, \frac{\gamma(t)^2-1}{2\imath\gamma(t)}\right)\frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma R\left(\frac{z^2+1}{2\,z}, \frac{z^2-1}{2\,\imath\,z}\right)\frac{dz}{z} = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta,$$

avec

$$f : z \mapsto \frac{1}{z}R\left(\frac{z^2+1}{2\,z}, \frac{z^2-1}{2\,\imath\,z}\right)$$

qui par définition est une fraction rationnelle, et donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas, si on note $\mathscr{P}_{\mathcal{D}_1(0)}$ l'ensemble des pôles de f situés sur le disque unité, on a par le Théorème des résidus

$$I = 2\,\imath\,\pi \sum_{p \in \mathscr{P}_{\mathcal{D}_1(0)}} \operatorname{Res}(f, p).$$

Exemple : on considère l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\rho + \sin(t)},$$

où ρ est un paramètre réel vérifiant $|\rho| > 1$. On a donc

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\rho + \frac{e^{\imath t} - e^{-\imath t}}{2\imath}} = 2\int_0^{2\pi} \frac{\imath e^{\imath t}\, dt}{2\,\imath\,\rho\, e^{\imath t} + e^{2\,\imath t} - 1} = 2\int_\gamma \frac{d\zeta}{2\,\imath\,\rho\zeta + \zeta^2 - 1}.$$

On a $P(z) = 2\,\imath\,\rho\zeta + \zeta^2 - 1 = (z - z_+)\,(z - z_-)$, $z_\pm = \imath\left(-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}\right)$. Si $\rho > 1$, on a $z_+ \in \mathcal{D}_1(0)$ et $z_- \notin \mathcal{D}_1(0)$, et donc

$$I = 4\,\imath\,\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{P}, z_+\right) = \frac{4\,\imath\,\pi}{P'(z_+)} = \frac{2\,\imath\,\pi}{\imath\,\rho + z_+} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\rho^2 - 1}}.$$

Si $\rho < -1$, alors $z_- \in \mathcal{D}_1(0)$ et $z_+ \notin \mathcal{D}_1(0)$, et donc

$$I = 4\,\imath\,\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{P}, z_-\right) = \frac{4\,\imath\,\pi}{P'(z_-)} = \frac{2\,\imath\,\pi}{\imath\,\rho + z_-} = \frac{-2\,\pi}{\sqrt{\rho^2 - 1}}.$$

Exercice 4.14. *Calculez* $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin(t)^2}\, dt$.

Correction
On a

$$1 + \sin(t)^2 = 1 + \left(\frac{e^{\imath t} - e^{-\imath t}}{2\,\imath}\right)^2 = -\frac{e^{-2\,\imath\,t}}{4}\left(e^{4\imath t} - 6e^{2\imath t} + 1\right).$$

Il vient

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin(t)^2}\, dt = 2\,\imath \int_0^{\pi} \frac{2\,\imath e^{2\,\imath t}}{e^{4\imath t} - 6e^{2\imath t} + 1}\, dt = 2\,\imath \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 6\,z + 1},$$

avec $\gamma : t \in [0, \pi] \mapsto e^{2\,\imath\,t}$. On a

$$z^2 - 6\,z + 1 = (z - z_1)\,(z - z_2), \quad z_1 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad z_2 = 3 + 2\,\sqrt{2}.$$

Le théorème des résidus donne

$$\frac{1}{2\,\imath\,\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 6\,z + 1} = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2 - 6\,z + 1}, z_1\right) = \frac{1}{2\,z_1 - 6} = -\frac{1}{4\,\sqrt{2}}.$$

D'où au final

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + \sin(t)^2} = 2\,\imath \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 6\,z + 1} = (2\,\imath)\,(2\,\imath\,\pi)\left(-\frac{1}{4\,\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 4.15. *Montrez que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\,t)}{5 - 4\,\cos(t)}\, dt = \frac{\pi}{12}.$$

Exercice 4.16. *Montrez que* $\int_0^{2\,\pi} \frac{1}{3 - 2\,\cos(t) + \sin(t)} dt = \pi$.

Correction
On a

$$3-2\,\cos(t)+\sin(t)=3-e^{\imath\,t}-e^{-\imath\,t}+\frac{e^{\imath\,t}+e^{-\imath\,t}}{2\,\imath}=\frac{e^{-\imath\,t}}{2\,\imath}\left(6\,\imath\,e^{\imath\,t}+(1-2\,\imath)e^{2\,\imath\,t}-(1+2\,\imath)\right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{3-2\,\cos(t)+\sin(t)}=\frac{2\,\imath\,e^{\imath\,t}}{6\,\imath\,e^{\imath\,t}+(1-2\,\imath)e^{2\,\imath\,t}-(1+2\,\imath)}.$$

On pose alors $\gamma : t\in[0,2\,\pi]\mapsto e^{\imath\,t}$ et $P(z)=(1-2\,\imath)\,z^2+6\,\imath\,z-(1+2\,\imath)$. Il vient

$$\int_0^{2\,\pi}\frac{dt}{3-2\,\cos(t)+\sin(t)}=2\int_\gamma\frac{dz}{P(z)}.$$

On a

$$P(z)=(z-z_1)\,(z-z_2),\quad z_1=\frac{\imath}{2\,\imath-1},\quad z_2=\frac{5\,\imath}{2\,\imath-1}.$$

Comme on a

$$|z_1|=\frac{1}{\sqrt{5}}<1,\quad |z_2|=\sqrt{5}>1,$$

et

$$P'(z_1)=2\,(1-2\,\imath)z_1+6\,\imath=4\,\imath,$$

il vient

$$\int_\gamma\frac{dz}{P(z)}=2\,\imath\,\pi\mathrm{Res}\left(\frac{1}{P},z_1\right)=2\,\imath\,\pi\frac{1}{P'(z_1)}=\frac{\pi}{2}.$$

4.3 Séries de Laurent – Théorème des résidus (II)

À faire peut-être un jour...