

L3 ESR 2017-18, S6

# UE option Graphes

Notes de cours

## Partie 2 : Graphes

Etienne Fieux

30 avril 2018



# Table des matières

<b>I Graphes : Introduction</b>	<b>1</b>
I.1 Premières notions . . . . .	1
I.2 Quelques graphes basiques . . . . .	3
I.3 Chaînes et cycles . . . . .	5
I.4 Connexité . . . . .	6
I.5 Exercices . . . . .	7
<b>II Arbres</b>	<b>11</b>
II.1 Caractérisations . . . . .	11
II.2 Dénombrements . . . . .	13
II.3 Exercices . . . . .	16
II.4 Correction de l'exercice 7 . . . . .	18
<b>III Parcours dans un graphe</b>	<b>23</b>
III.1 Parcours eulériens . . . . .	23
III.2 Parcours hamiltoniens . . . . .	25
III.3 Exercices . . . . .	27
<b>IV Trois théorèmes pour conclure</b>	<b>30</b>
IV.1 Réseaux et Théorème de Ford-Fulkerson . . . . .	30
IV.1.1 Graphes orientés . . . . .	30
IV.1.2 Réseaux et flots . . . . .	30
IV.1.3 Coupes dans un flot . . . . .	32
IV.1.4 Théorème de Ford-Fulkerson . . . . .	33
IV.2 Connexité et théorèmes de Menger . . . . .	34
IV.2.1 Version « arêtes » . . . . .	34
IV.2.2 Version « sommets » . . . . .	35
IV.2.3 $k$ -connexité dans un graphe . . . . .	37
IV.3 Appariements (ou couplages) et Théorème de Hall . . . . .	38
IV.4 Exercices . . . . .	39

# TABLE DES MATIÈRES

# Chapitre I

## Graphes : Introduction

### I.1 Premières notions

**Définitions I.1** Un **graphe** est un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble et  $E \subset \mathcal{P}_2(V)$ . Autrement dit, les éléments de  $E$  sont des paires  $\{x, y\}$  avec  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$ . Les éléments de  $V$  sont les **sommets** du graphe et les éléments de  $E$  en sont les **arêtes**. De plus, si  $|V| = n$ , on dira que  $X = (V, E)$  est un **graphe à  $n$  sommets**. Un **graphe fini** est un graphe qui a un nombre fini de sommets.

Si  $\{x, y\} \in E$ , on dira que  $x$  et  $y$  sont **adjacents** ou **voisins** et on le notera encore  $x \sim_X y$  ou simplement  $x \sim y$  s'il n'y a aucun risque de confusion. On dit également que l'arête  $\{x, y\}$  est **incidente** à  $x$  et à  $y$ , ou que les sommets  $x$  et  $y$  sont **incidents** à l'arête  $\{x, y\}$ . Enfin, on écrira parfois simplement  $x \sim y$  pour désigner l'arête  $\{x, y\}$ , voire même (encore plus simplement)  $xy$ ...

Si  $X = (V, E)$  et  $v \in V$ ,  $N_X(v) := \{y, v \sim y\}$  est le **voisinage** de  $v$  et  $d(v) := |N_X(v)|$  est le **degré** de  $v$  (c'est le nombre de voisins de  $v$ ).

On écrira  $x \not\sim_X y$  ou  $x \not\sim y$  pour indiquer que deux sommets  $x$  et  $y$  ne sont pas voisins.

**Exemple I.1** Le graphe de Petersen a pour ensemble de sommets  $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$  et pour ensemble d'arêtes  $E = \{AD, DB, BE, EC, CA, AF, BG, CH, DI, EJ, JF, FG, GH, HI, IJ\}$

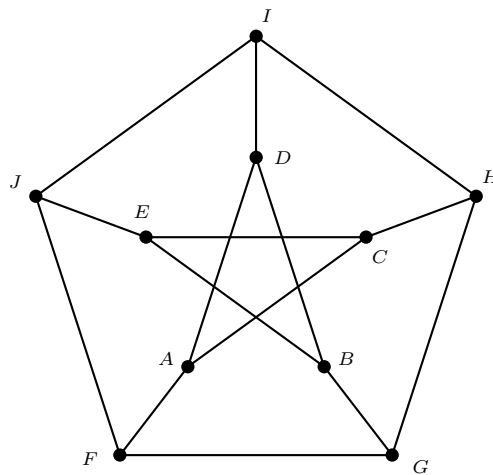


FIGURE I.1 – Graphe de Petersen

**Remarque I.2** La définition I.1 est celle d'un **graphe simple**, c'est-à-dire d'un graphe sans boucle (une boucle en un sommet  $v$  est donnée par une relation d'adjacence de  $v$  avec lui-même) et sans **multi-arêtes** (qui autorisent plusieurs adjacences entre deux mêmes sommets).

Par ailleurs, il s'agit de la définition d'un **graphe non orienté**. Dans un graphe orienté, les arêtes sont des couples  $(x, y)$  appelés **arcs** et on distingue donc les arcs  $(x, y)$  et  $(y, x)$ .

**Dans ces notes, sauf mention explicite contraire, les graphes considérés sont des graphes simples et finis.**

**Lemme I.3** Dans tout graphe à  $n \geq 2$  sommets, il existe au moins deux sommets de même degré.

PREUVE : Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les  $n \geq 2$  sommets du graphe et  $d_i = d(x_i)$  le degré du sommets  $x_i$  pour  $i \in [n]$ . Puisque le graphe est simple,  $d_i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  pour tout  $i$  de  $[n]$ .

- S'il existe au moins deux sommets de degré 0, alors le Lemme est vérifié.
- S'il existe un seul sommet (par exemple  $x_n$ ) de degré 0, alors les  $n-1$  sommets restants  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  sont de degré strictement positif (ils ne sont pas de degré 0) et strictement inférieur à  $n-1$  (puisque le graphe est simple et qu'ils ne sont pas voisins de  $x_n$ , ils ont au maximum  $n-2$  voisins). Autrement dit,  $d_i \in [n-2]$  pour  $i \in [n-1]$ . Par le Principe des tiroirs, il existe alors  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$  et  $d_i = d_j$ .
- S'il n'y a aucun sommet de degré 0,  $d_i \in [n-1]$  pour  $i \in [n]$ . Par le Principe des tiroirs, il existe alors  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$  et  $d_i = d_j$ .

□

**Remarque I.4** On insiste sur la nécessité que le graphe soit simple dans le Lemme I.3, comme le montrent les deux contre-exemples de la Figure I.2 si on admet les boucles ou si l'on admet les multi-arêtes :



FIGURE I.2 – Exemple de deux graphes (non simples) pour lesquels le Lemme I.3 ne s'applique pas

**Lemme I.5 (Lemme des poignées de mains)** Dans tout graphe  $X$ , on a l'égalité

$$\sum_{x \in V(X)} d(x) = 2|E(X)|$$

PREUVE : Lorsqu'on fait la somme des degrés des sommets du graphe  $X$ , chaque arête du graphe est comptée deux fois (une fois pour chaque sommet auquel elle est incidente). □

**Remarque I.6** Associé à une soirée de personnes, on définit un graphe avec autant de sommets que de personnes présentes et on dit que deux sommets sont adjacents si ces sommets correspondent à des personnes qui se sont serré la main. D'où le nom donné au Lemme I.5...

**Exemple I.2** Pour le graphe de Petersen (cf. Exemple I.1), il y a 10 sommets de degré 3 et 15 arêtes ; le Lemme des poignées de mains s'écrit :  $10 \times 3 = 2 \times 15$ .

**Corollaire I.7** Dans tout graphe  $X$ , le nombre de sommets de degré impair est pair.

PREUVE : Si le graphe  $X$  ne contient aucun sommet de degré impair, le résultat annoncé est vrai. Supposons à présent que  $X$  possède  $k$  sommets de degré impair ; notons-les  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Notons  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les  $n$  sommets de degré pair (cette liste peut-être vide si  $n = 0$ ). On a donc d'après le Lemme des poignées de mains I.5 :

$$(d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_k)) + (d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_n)) = 2e$$

où  $e$  est le nombre d'arêtes de  $X$ . Puisque  $\deg u_i$  est pair pour tout  $i$ ,  $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_k) = 2e - (d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_n))$  est pair. Une somme de nombres impairs est paire si, et seulement si, elle comprend un nombre pairs de termes. Par conséquent,  $k$  est pair, i.e. le nombre de sommets de degré impair est pair. □

## I.2 Quelques graphes basiques

**Exemples I.2.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on rappelle que  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

$\Sigma_n = ([n], \emptyset)$  est appelé *stable*.

$K_n = ([n], \mathcal{P}_2([n]))$  est appelé *complet*.

$X = (V, E)$  est *biparti* s'il existe une partition  $A \sqcup B$  de l'ensemble  $V$  des sommets telle que les seules adjacences possibles sont de la forme  $a \sim b$  avec  $a \in A$  et  $b \in B$ . On dira alors que  $X$  est *A, B-biparti*. Ainsi,  $X$  est *A, B-biparti* si, et seulement si,  $\{A, B\}$  est une partition de  $V(X)$ ,  $\forall a, a' \in A, a \not\sim a'$  et  $\forall b, b' \in B, b \not\sim b'$ .

Si, de plus,  $A = [m], B = [n]$  et  $a \sim b$  pour tout  $a$  de  $A$  et tout  $b$  de  $B$ , le graphe biparti obtenu est noté  $K_{m,n}$  et est dit *biparti complet*.

Si  $n \geq 1, P_n = ([n], \{\{i, i+1\}, i \in [n-1]\})$  est appelé *chemin* (de longueur  $n-1$ ).

Si  $n \geq 3, C_n = ([n], \{\{i, i+1\}, \{1, n\}, i \in [n-1]\})$  est appelé *cycle* ( $n$  sommets).

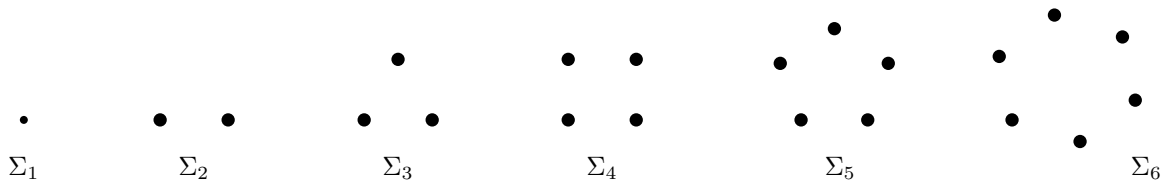


FIGURE I.3 – Les stables  $\Sigma_n, n \in [6]$

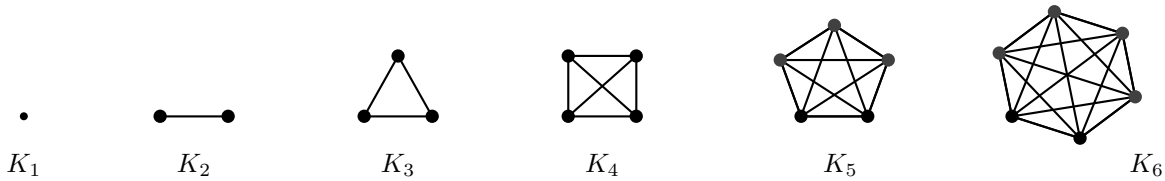


FIGURE I.4 – Les graphes complets  $K_n, n \in [6]$

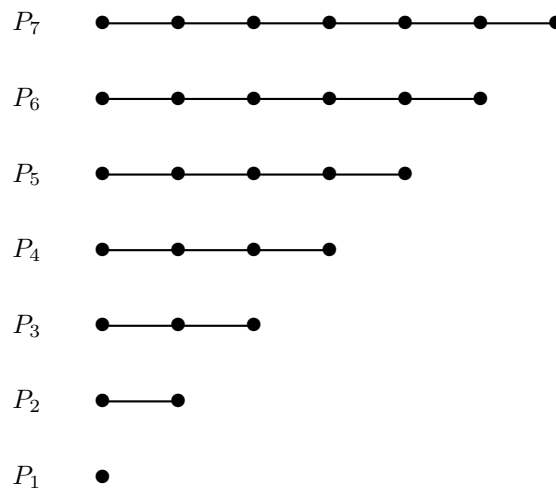


FIGURE I.5 – Les Chemins  $P_n, n \in [7]$

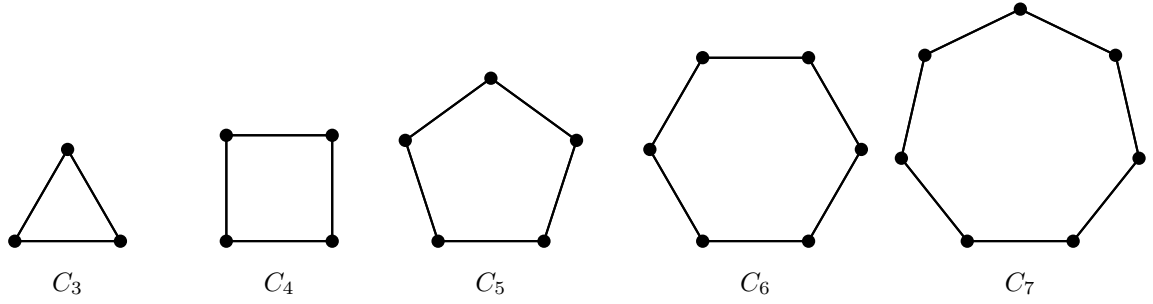


FIGURE I.6 – Les cycles  $C_n$ ,  $n \in \llbracket 3, 7 \rrbracket$

**Définition I.8** Deux graphes  $X = (V, E)$  et  $X' = (V', E')$  sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : V \rightarrow V'$  telle que

$$x \sim y \iff f(x) \sim f(y)$$

L'application  $f$  est alors appelée *isomorphisme* entre  $X$  et  $X'$  et ces deux graphes sont dits *isomorphes*, ce que l'on notera  $X \cong X'$ .

**Remarque I.9** La relation d'isomorphisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les graphes (la vérification est laissée en exercice). Ainsi, en général, tous les graphes que l'on considère sont considérés à isomorphisme près. Par exemple, dans la Figure I.7, on a trois illustrations « du » graphe complet  $K_4$  et dans la Figure I.8, on a quatre illustrations « du » graphe biparti complet  $K_{3,3}$ .

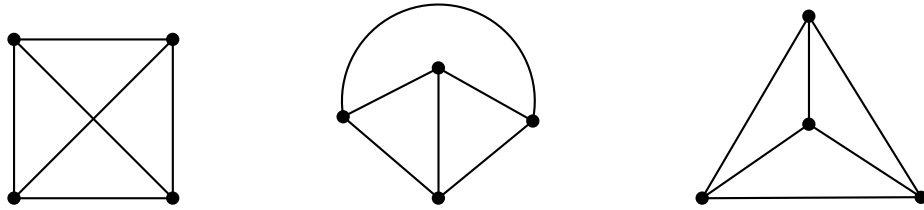


FIGURE I.7 – 3 graphes isomorphes à  $K_4$

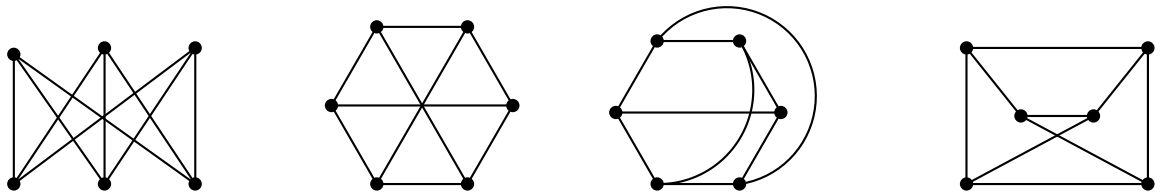


FIGURE I.8 – 4 graphes isomorphes à  $K_{3,3}$

**Proposition I.10** Si  $f$  est un isomorphisme entre les graphes  $X$  et  $X'$ , alors, pour tout sommet  $x$  de  $X$ ,  $d(x) = d(f(x))$  (i.e.,  $x$  et  $f(x)$  sont de même degré).

PREUVE : Soit  $f : V(X) \rightarrow V(X')$  un isomorphisme entre les graphes  $X$  et  $X'$  et soit  $x \in V(X)$  de degré  $k$ . Il faut montrer que  $d(f(x)) = k$ . Soient  $v_1, v_2, \dots, v_k$  les  $k$  sommets de  $X$  voisins de  $x$ . Alors,



$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  est de cardinal  $n$  puisque  $f$  est une bijection de  $V(X)$  sur  $V(X')$  et  $x' = f(x)$  est voisin de  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$  puisque  $f$  est un isomorphisme de graphes. De plus, ce sont les seuls voisins de  $x'$  car si  $v'$  était un autre voisin de  $x'$ , toujours parce que  $f$  est un isomorphisme de graphes, il existerait un sommet  $u$  tel que  $f(u) = v'$  et ce serait un autre voisin de  $x$ , ce qui est impossible puisque  $x$  n'a que  $k$  voisins.  $\square$

**Définitions I.11** On dira que le graphe  $Y$  est un *sous-graphe* du graphe  $X$  lorsque  $V(Y) \subset V(X)$  et  $E(Y) \subset E(X)$ . Si  $Y$  est un sous-graphe de  $X$ , on dira aussi que  $X$  *contient*  $Y$ .

On dira que le graphe  $Y$  est un *sous-graphe induit* du graphe  $X$  lorsque  $V(Y) \subset V(X)$  et  $E(Y) = E(X) \cap \mathcal{P}_2(V(Y))$ .

Si  $A \subset V(X)$ , le sous-graphe induit de  $X$  d'ensemble de sommets  $A$  sera appelé *sous-graphe de  $X$  induit par  $A$*  et noté  $X[A]$ .

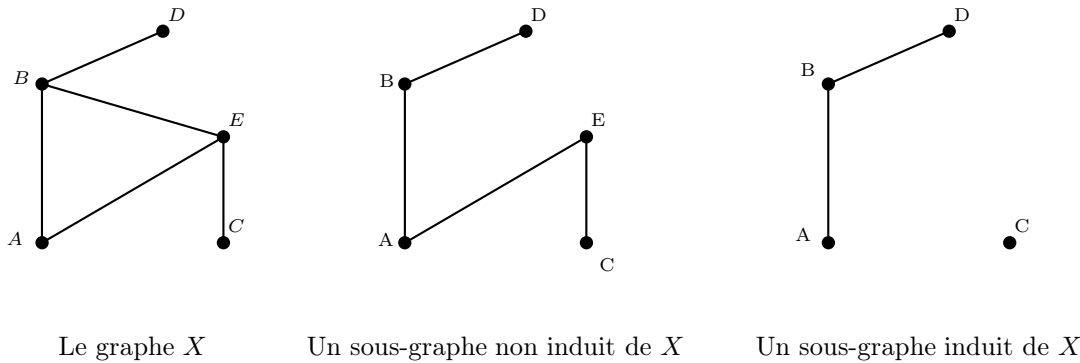


FIGURE I.9 – Un graphe et deux sous-graphes

### I.3 Chaînes et cycles

**Définitions I.12** Soit  $X = (V, E)$  un graphe.

Une *chaîne* de longueur  $k$  dans  $X$  est une suite de sommets  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  telle que  $v_{i-1} \sim v_i$  pour  $i \in [k]$ . On peut aussi voir cette chaîne comme la suite d'arêtes  $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}$ ; on dira parfois qu'elle va de  $v_0$  à  $v_k$  ou que c'est une  $v_0, v_k$ -*chaîne*. La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'arêtes dont elle est composée. Les sommets  $v_i$  avec  $i \neq 0, k$  seront appelés *sommets intérieurs* à la  $v_0, v_k$ -chaîne tandis que  $v_0$  et  $v_k$  seront appelés *extrémités* de la  $v_0, v_k$ -chaîne.

Une chaîne  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  avec  $v_0 = v_k$  sera appelée *circuit*.

Un *chemin* de longueur  $k$  dans  $X$  est un sous-graphe de  $X$  isomorphe à  $P_k$ . Dit autrement, un chemin de longueur  $k$  est une suite de sommets deux à deux distincts

$$\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

tels que  $v_{i-1} \sim v_i$  pour  $i \in [k]$ . Ce chemin sera dit de longueur  $k$  et on dira que c'est un *chemin de  $v_0$  à  $v_k$*  dont  $v_0$  et  $v_k$  sont les extrémités.

Si l'on ajoute la condition  $v_k \sim v_0$ , on obtiendra un *cycle* (de longueur  $k$ ). Autrement dit, un cycle de longueur  $k$  dans  $X$  est un sous-graphe de  $X$  isomorphe à  $C_k$ .

**Remarque I.13** Un chemin (resp. cycle) est donc une chaîne (resp. un circuit) sans répétition de sommets (et, par conséquent, sans répétition d'arête...).

**Lemme I.14** Tout circuit de longueur impaire contient un cycle de longueur impaire.

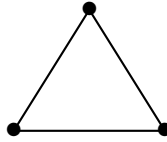


FIGURE I.10 –  $C_3$  est le seul circuit à 3 arêtes

PREUVE : Soit  $l$  la longueur d'un circuit impair. La valeur  $l = 1$  est interdite dans un graphe simple (puisque elle correspond à un sommet avec une boucle, soit un « cycle »  $C_1$ ). Pour  $l = 3$ , le seul circuit (simple : sans boucle ni arêtes multiples) à trois arêtes est le triangle ou  $C_3$  (cf. Figure I.10).

On raisonne ensuite par récurrence : on suppose la propriété annoncée vraie pour tout circuit de longueur impaire  $l$  pour un  $l \geq 3$  impair. Et soit un circuit  $Z$  de longueur impaire  $l + 2$ . Le circuit  $Z$  s'écrit donc  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1}, v_0$ . S'il n'y a aucune répétition de sommets dans le circuit  $Z$  (autre que celle du sommet  $v_0$ , alors  $Z$  est un cycle. Sinon, il existe  $i, j \in [l + 1]$  tels que  $v_i = v_j$  avec  $i \neq j$ . En supposant  $i < j$ , on a donc la concaténation de deux cycles

$$\underbrace{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j}_{\text{1er circuit } Z_1} \quad \text{et} \quad \underbrace{v_j, v_{j+1}, \dots, v_{l+1}, v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i}_{\text{2d circuit } Z_2}$$

Si  $l_1 > 0$  (resp.  $l_2 > 0$ ) est la longueur du circuit  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ), alors  $l_1 + l_2 = l + 2$  est impair et, nécessairement,  $l_1$  et  $l_2$  ne sont pas de même parité. Si on suppose que c'est  $l_1$  qui est impair, alors  $l_1 \leq l$  et l'hypothèse de récurrence s'applique à  $Z_1$ . Ainsi,  $Z_1$  contient un cycle impair et c'est donc aussi vrai de  $Z$ . □

## I.4 Connexité

**Définitions I.15** *Un graphe  $X$  est dit **connexe** si, pour tous sommets  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe dans  $X$  un  $x, y$ -chemin (c'est-à-dire, un chemin de  $X$  allant de  $x$  à  $y$ ).*

*Une **composante connexe** du graphe  $X$  est un sous-graphe de  $X$  maximal pour la propriété d'être connexe.*

**Proposition-définition I.16 (Lemme de la propriété expansive)** *Soit  $(P)$  une propriété pour les sommets de graphes. Si cette propriété est telle que, pour un sommet  $v$  d'un graphe  $X$ , le fait qu'elle soit vraie en  $v$  entraîne qu'elle soit vraie en chacun de ses voisins, alors elle est vraie pour tout sommet de la composante connexe de ce sommet.*

*Une propriété qui vérifie l'hypothèse du Lemme I.16 sera dite **expansive**.*

PREUVE : Soit  $(P)$  une propriété expansive et soit  $v$  un sommet pour lequel la propriété est vraie. Soit à présent  $y$  dans la composante connexe de  $x$ . Il existe donc un chemin  $x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = y$ . Par une récurrence évidente, la propriété d'expansivité de  $(P)$  entraîne que  $(P)$  est vraie successivement pour  $v_1, v_2, \dots$ , jusqu'à  $v_k = y$ . La propriété  $(P)$  est donc vraie pour tout sommet de la composante connexe de  $x$ . □

**Proposition I.17** *Soit  $X$  un graphe fini tel que  $d(v) \geq 2$  pour tout  $v \in V(X)$ .*

- 1)  $X$  contient un cycle.
- 2)  $X$  est une union disjointe de cycles (i. e., chaque composante connexe de  $X$  est un cycle) si, et seulement si,  $d(v) = 2$  pour tout sommet  $v$ .

PREUVE : 1) Soit  $P(S, A)$  un chemin maximal de  $X$  (i.e., un sous-graphe de  $X$  maximal pour la propriété d'être un chemin) ; notons-le  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$ . Puisque  $d(v_k) \geq 2$ , il existe  $u$  voisin de  $v_k$  et distinct de  $v_{k-1}$ . Par maximalité de  $P$ , il existe forcément un  $i$  dans  $[k - 2]$  tel que  $u = v_i$  et le graphe  $X$  contient donc le cycle  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_i$ .

2) Si  $X$  est une union disjointe de cycles, cela signifie que chaque sommet est sur un unique cycle et est donc de degré pair. Réciproquement, si tout sommet est de degré 2, on sait d'après 1) que toute composante connexe  $Y$  de  $X$  contient un cycle  $C(S, F)$  et soit  $v \in S$ . Puisque  $d(v) = 2$ ,  $N_X(v) = N_C(v)$  et les voisins de  $v$  sont donc sur  $C$ . Ceci montre que la propriété « appartenir à  $C$  » est expansive, i.e. que  $Y = C$ , d'après le Lemme de la propriété expansive I.16.  $\square$

**Théorème I.18** *Un graphe est biparti si, et seulement si, il ne contient pas de cycle de longueur impaire.*

PREUVE : Soit  $X = (V, E)$  un graphe  $A, B$ -biparti (i.e.  $V = A \sqcup B$  est une partition de  $V$  telle que si  $\forall a, a' \in A, a \neq a'$  et  $\forall b, b' \in B, b \neq b'$ ) et soit  $C$  un  $k$ -cycle de  $X$  avec  $x_0 \in V(C)$ . On peut supposer que  $x_0 \in A$ . Si on note  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = x_0$  les sommets successifs du cycle  $C$ , la caractéristique biparti de  $X$  implique que  $x_1 \in B, x_2 \in A, x_3 \in B, \dots$ . Par un raisonnement par récurrence évident, on a donc nécessairement  $x_{2i} \in A$  et  $x_{2i+1} \in B$  pour tout entier  $i$  tel que les sommets  $x_{2i}$  ou  $x_{2i+1}$  soient définis. En particulier,  $x_k = x_0 \in A$  entraîne que  $k$  est pair, i.e. que  $C$  est un cycle pair. Ceci montre bien que si  $X$  est biparti, il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Réciproquement, supposons que  $X$  soit un graphe qui ne contient aucun cycle de longueur impaire et montrons que  $X$  est biparti. On va plus précisément montrer que chaque composante connexe de  $X$  est bipartite. Soit  $x$  un sommet de  $X$  et  $Y$  la composante connexe de  $x$ . On suppose que  $x$  n'est pas isolé dans  $Y$  (sinon  $Y$  est un cas « dégénéré » de graphe biparti). Pour tout sommet  $v$  de  $Y$ , puisque  $Y$  est connexe, il existe au moins un  $x, v$ -chemin (ou chemin allant de  $x$  à  $v$ ) et on note  $m(v)$  la longueur minimale d'un  $u, v$ -chemin. Montrons alors que les ensembles

$$A := \{v \in V(Y), m(v) \text{ est paire}\} \quad \text{et} \quad B := \{v \in V(X), m(v) \text{ est impaire}\}$$

sont tels que  $\forall a, a' \in A, a \neq a'$  et  $\forall b, b' \in B, b \neq b'$  (ce qui montrera que  $Y$  est  $A, B$ -biparti). Raisonnons par l'absurde. Soient  $a$  et  $a'$  deux sommets distincts de  $A$ ; supposons qu'ils soient voisins (i.e. il existe une arête  $aa'$ ). En la complétant par un  $x, a$ -chemin et par un  $a', x$ -chemin tous les deux de longueur paire, l'arête  $aa'$  créerait un circuit de longueur impaire  $x, \dots, a, a', \dots, x$  (cf. Figure I.11).

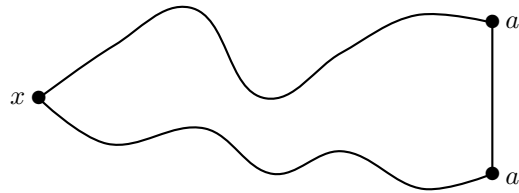


FIGURE I.11 – L'arête  $aa'$  crée un circuit de longueur impaire

Mais, d'après le Lemme I.14, cela signifierait que  $Y$  (et donc  $X$ ) contiendrait un cycle impair, ce qui est impossible. Par conséquent,  $a$  et  $a'$  ne peuvent pas être voisins. Par le même raisonnement, deux sommets distincts de  $B$  ne peuvent pas être voisins et  $Y$  est  $A, B$ -biparti.  $\square$

Une arête  $e$  d'un graphe connexe  $X = (V, E)$  est appelée **pont** ou **isthme** si  $X - e$  n'est pas connexe (où  $X - e$  est le graphe obtenu à partir de  $X$  en enlevant après suppression de l'arête  $e$ ; autrement dit,  $V(X - e) = V(X)$  et  $E(X - e) = E \setminus \{e\}$ ).

**Proposition I.19** *Soit  $X$  un graphe connexe. Une arête  $e$  de  $X$  est un pont si, et seulement si, elle ne se trouve sur aucun cycle de  $X$ .*

## I.5 Exercices

**Exercice I.1 :** Vrai ou Faux ? (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

- VF 1. Il est possible d'organiser une compétition avec 7 équipes de façon que chaque équipe joue exactement contre trois autres équipes.
- VF 2. Pour tout entier  $n \geq 3$ , on peut trouver un graphe 3-régulier (i.e., un graphe dont tous les sommets sont de degré 3) à  $n$  sommets.

- VF 3. La réciproque de la Proposition I.10 est vraie.  
 VF 4. Dans une soirée, il y a toujours au moins deux personnes qui ont serré un même nombre de mains.

**Exercice I.2 :**

1. a) Six pays sont en discussion à propos de deux sujets conflictuels et les discussions en sont au stade des échanges bilatéraux, organisés de la manière suivante : toute paire  $\{A, B\}$  de pays donne lieu à une rencontre (entre les pays  $A$  et  $B$ ) qui porte sur un seul des deux sujets conflictuels. Montrer que l'on peut trouver un ensemble de trois pays qui auront discuté (dans les rencontres bilatérales restreintes à ces trois pays) du même sujet.  
 b) A présent, on considère une organisation composée de 17 pays qui négocient autour de trois sujets conflictuels. Comme précédemment, les discussions progressent par échanges bilatéraux, organisés sur le même mode. Montrer que l'on peut trouver un ensemble de trois pays qui auront discuté (dans les rencontres bilatérales restreintes à ces trois pays) du même sujet. (indication : pour un pays fixé, on pourra appliquer le lemme des tiroirs au décompte de ses échanges bilatéraux).
2. (nombres de Ramsey)  $R(k, l)$  est le plus petit entier tel que tout graphe à  $R(k, l)$  sommets contient au moins une clique à  $k$  sommets (ou  $k$ -clique) ou un stable à  $l$  sommets (ou  $l$ -stable).  
 a) Dans la question 1.a), on a montré que  $R(3, 3) \leq 6$ . Utiliser le cycle  $C_5$  pour conclure que  $R(3, 3) = 6$ .  
 b) Pour tous les entiers  $k, l > 0$ , montrer que  $R(1, l) = R(k, 1) = 1$ ,  $R(2, l) = R(k, 2) = 2$  et (par passage au complémentaire)  $R(k, l) = R(l, k)$ .  
 c) Pour tous les entiers  $k, l > 0$ , montrer que  $R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$ . En déduire une autre preuve de  $R(3, 3) = 6$ .  
 d) Pour tous les entiers  $k, l > 0$ , montrer que  $R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1) - 1$  si  $R(k - 1, l)$  et  $R(k, l - 1)$  sont pairs. En s'aidant du graphe de Wagner (Figure Fig. I.12), calculer  $R(3, 4)$ .

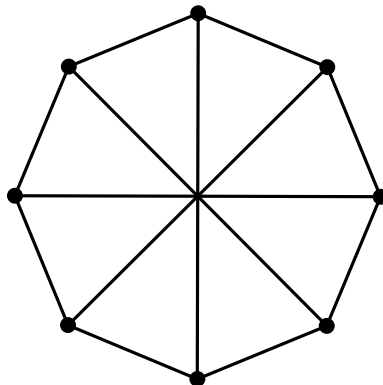


FIGURE I.12 – Le graphe de wagner

**Exercice I.3 :** M. et Mme Dupond ont invité quatre couples. Certains sont des amis de M. Dupond, d'autres de Mme Dupont. Quand les invités arrivent, ceux qui se connaissent déjà se serrent la main (les autres se saluent oralement). Au moment de commencer le repas, tout le monde est assis autour de la table sauf M. Dupont qui, au moment de s'asseoir, se fait la réflexion suivante : « Tiens, c'est amusant, si je ne me compte pas, il n'y a pas deux personnes qui ont serré le même nombre de mains. »

Combien Mme Dupont a-t'elle serré de mains ?

**Exercice I.4 :** Dans cette réunion à  $n$  personnes où chaque personne a au moins un ami (l'amitié étant une relation réciproque), on ne peut pas former de groupes d'au moins trois personnes com-

prenant exactement deux paires d'amis. Montrer que chaque personne est l'amie de toutes les autres personnes.

**Exercice I.5 :** Vrai ou Faux ? (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

- VF 1. Toute  $a, b$ -chaîne contient un  $a, b$ -chemin.
- VF 2. Si  $d(x) \geq k$  pour tout sommet  $x$  de  $X$ , alors  $X$  contient un chemin de longueur au moins  $k$ .
- VF 3. Si  $d(x) \geq k \geq 2$  pour tout sommet  $x$  de  $X$ , alors  $X$  contient un cycle de longueur au moins  $k + 1$ .
- VF 4. Si  $|V(X)| = |E(X)| \geq 3$ , alors  $X$  contient un cycle.

**Exercice I.6 :** Soit  $X = (V, E)$  un graphe à  $n$  sommets que l'on notera  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . La matrice d'adjacence  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \sim v_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que  $a_{ij}^{(k)}$  est le nombre de chaînes de longueur  $k$  de  $X$  qui vont de  $v_i$  à  $v_j$ .
2. Par définition, la distance  $d_X(v, v')$  entre deux sommets  $v$  et  $v'$  de  $X$  est la longueur du plus court chemin de  $X$  allant de  $v$  à  $v'$ . Montrer que  $d_X(v, v') = \min\{k, k \geq 0, a_{ij}^{(k)} \neq 0\}$ .
3. Montre que  $X$  est biparti si, et seulement si, pour tout entier impair positif  $k$ , la diagonale de  $A^k$  est nulle.

**Exercice I.7 :** Soit  $X = (V, E)$  un graphe fini qui ne contient pas de triangle (i.e. pas de sous-graphe isomorphe à  $K_3$ ).

1. On suppose que  $X$  possède deux sommets adjacents  $x$  et  $y$ . On pose  $\alpha(x) = |N_{X-y}(x)|$  et  $\alpha(y) = |N_{X-x}(y)|$  (où  $X - x := X[V(X) \setminus \{x\}]$  est le sous-graphe induit par  $V(X) \setminus \{x\}$ ). Montrer que  $\alpha(x) + \alpha(y) \leq |V| - 2$ .
2. En déduire que  $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$  (indication : raisonner par récurrence sur le nombre de sommets).
3. Trouver un graphe sans triangle pour lequel on a l'égalité  $|E| = \frac{|V|^2}{4}$  (indication : chercher un graphe biparti complet).

**Exercice I.8 :** Une coloration d'un graphe  $G$  est l'attribution d'une couleur à chaque sommet de  $G$  de sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. On appelle  $\chi(G)$  le nombre minimal de couleurs nécessaire pour obtenir une coloration de  $G$  (*nombre chromatique* de  $G$ ).

1. a) Calculer  $\chi(K_n)$  où  $K_n$  est le graphe complet à  $n$  sommets (graphe qui possède toutes les arêtes sauf les boucles). b) Que peut-on dire de  $\chi(G)$  si  $G$  contient un  $K_n$  comme sous-graphe ?
2. Tous les cycles ont-ils le même nombre chromatique ?
3. (construction de Mycielski) Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe. On construit un nouveau graphe  $M(G)$  de la manière suivante :  $V(M(G)) = V(G) \times \{0, 1\} \cup \{z\}$  (où  $z$  est un nouveau sommet) avec les adjacences :  $(g, 0) \sim (g', 0)$  si  $g \sim g'$  dans  $G$ ,  $(g, 1) \sim (g', 0)$  si  $g \sim g'$  dans  $G$  et  $(g, 1) \sim z$  pour tout  $g$  de  $V(G)$ .
  - a) dessiner  $M(C_4)$  et  $M(C_5)$ .
  - b) Montrer que  $M(G)$  ne contient pas de triangles (ou de  $K_3$ ) si  $G$  ne contient pas de triangles.
  - c) Montrer que  $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$
  - d) En déduire qu'il existe des graphes sans triangle de nombre chromatique aussi grand que l'on veut.

**Exercice I.9 :** Soit  $k, n$  des entiers positifs,  $n \geq 2k$  et  $X = [n]$ . On considère le graphe  $KG(n, k)$  dont l'ensemble des sommets  $V(KG(n, k))$  est formé de tous les sous-ensembles à  $k$  éléments de  $X$  (autrement dit  $V(KG(n, k)) = \mathcal{P}_k([n])$ ), les arêtes étant définies par la relation  $A \sim B$  si  $A \cap B = \emptyset$  pour tout couple  $(A, B)$  de sous-ensembles à  $k$  éléments de  $X$ .

1. Dessiner  $K(5, 2)$ .

2. (graphes de Kneser) Montrer que  $\chi(KG(n, k)) \leq n - 2k + 2$  (indication : partitionner  $V(KG(n, k))$  en considérant les ensembles de sommets formés de tous les sous-ensembles à  $k$  éléments de  $X$  qui contiennent 1, puis qui contiennent 2 et ainsi de suite... tant que l'on peut!).

**Exercice I.10 :** Soit  $X$  un graphe à  $n$  sommets tel que tout sommet est de degré  $\geq (n - 1)/2$ . Montrer que  $X$  est connexe.

**Exercice I.11 :** Démontrer la Proposition I.19.

# Chapitre II

## Arbres

### II.1 Caractérisations

Un graphe est dit **acyclique** s'il ne contient aucun cycle (i.e., s'il ne possède pas de sous-graphe isomorphe à un cycle).

**Définitions II.1** Une **arbre** est un graphe connexe acyclique. Une **forêt** est un graphe acyclique.

**Définition II.2** Une **feuille** ou **sommet pendant** étant un sommet de degré 1.

**Lemme II.3** Tout arbre fini à au moins 2 sommets admet au moins deux feuilles.

PREUVE : Soit  $P$  un  $a, b$ -chemin de longueur maximale (un tel chemin existe puisque l'ensemble des chemins est non vide et le graphe est fini). Montrons que  $d(a) = 1$  (il en ira de même pour  $d(b)$ ).

Il existe un sommet  $x$  tel que  $a \sim x$  (sinon  $a$  est isolé et le graphe n'est pas connexe). Pour tout sommet  $y$  de  $P$  distinct de  $x$  (si un tel sommet n'existe pas, alors  $x = b$ ,  $P$  se réduit à  $a \sim b$  et  $d(a) = d(b) = 1$ ), on a  $a \not\sim y$  car sinon on obtiendrait un cycle via le chemin de  $a$  à  $y$  (sous-chemin de  $P$ ) complété en un cycle avec  $y \sim a$ . Et, pour tout sommet  $y$  hors de  $P$ , on a  $a \not\sim y$  car sinon  $P$  ne serait pas maximal (puisqu'on pourrait le prolonger avec  $a \sim y$ ). On conclut donc que  $d(a) = 1$ .  $\square$

On rappelle que, pour tout sommet  $x$  d'un graphe  $X$ ,  $X - x = X[V(X) \setminus \{x\}]$  est le sous-graphe induit par  $V(X) \setminus \{x\}$ .

**Lemme II.4** Soit  $X$  un graphe et  $x$  une feuille de  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $X$  est un arbre
- ii)  $X - x$  est un arbre

PREUVE : i)  $\implies$  ii) Si  $X$  est acyclique, *a fortiori*,  $X - x$  l'est aussi. Montrons que  $X - x$  est connexe. Soient  $a, b$  deux sommets de  $X - x$ . Comme  $X$  est connexe, il existe un  $a, b$ -chemin  $P$  dans  $X$ . Tous les sommets intérieurs à un chemin étant de degré 2, ils sont distincts de  $x$  et ils sont donc aussi des sommets de  $X - x$ . Par conséquent,  $P$  est un  $a, b$ -chemin dans  $X - x$  et  $X - x$  est connexe.

ii)  $\implies$  i) Pour montrer que  $X$  est acyclique, raisonnons par l'absurde et supposons que  $X$  contient un cycle  $C = x_1, x_2, \dots, x_k$  avec  $x_1 \sim x_k$ . On note alors que  $x$  ne peut pas être un sommet de  $C$  (car tout sommet d'un cycle est de degré au moins 2), par conséquent  $C$  serait un cycle de  $X - x$ , ce qui est impossible. Donc  $X$  est acyclique. Montrons que  $X$  est connexe. Soient  $a, b$  deux sommets de  $X$ . Si  $a$  et  $b$  sont tous les deux distincts de  $x$ , il existe un  $a, b$ -chemin dans  $X - x$  (et donc dans  $X$ ) par connexité de  $X - x$ . Si  $a = x$  et  $b \neq x$ , soit  $u$  l'unique voisin de  $x$ ; par connexité de  $X - x$ , il existe un  $u, b$ -chemin dans  $X - x$  qui se prolonge en un  $a, b$ -chemin avec  $a \sim u$ .  $\square$

**Remarque II.5** On notera que l'on a en fait montré que, sous l'hypothèse  $d(x) = 1$ , on a les deux équivalences :

- a)  $X - x$  acyclique  $\iff X$  acyclique
- b)  $X - x$  connexe  $\iff X$  connexe

**Théorème II.6** Soit  $X = (V(X), E(X))$  un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)*  $X$  est un arbre
- ii)*  $X$  est connexe et  $|E(X)| = |V(X)| - 1$ .
- iii)*  $X$  est acyclique et  $|E(X)| = |V(X)| - 1$ .
- iv)* (graphe acyclique maximal)  $X$  est acyclique et tout graphe obtenu en ajoutant une adjacence entre deux sommets non adjacents n'est pas acyclique.
- v)* (graphe connexe minimal)  $X$  est connexe et tout graphe obtenu en supprimant une arête n'est pas connexe.
- vi)* Pour tous les sommets  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe un unique chemin allant de  $x$  à  $y$ .

PREUVE : Si  $X$  se réduit à un sommet isolé,  $|V(X)| = 1$ ,  $|E(X)| = 0$  et toutes les équivalences sont triviales. Cela permettra de raisonner par récurrence sur  $n$ , le nombre de sommets de  $X$ . On suppose donc (hypothèse de récurrence) que toutes les équivalences sont vraies jusqu'à un certain  $n \geq 1$  et on se donne un graphe  $X$  à  $n + 1$  sommets.

On va commencer par montrer que l'assertion *i*) implique toutes les autres.

D'après le Lemme II.3, on peut choisir un sommet  $x$  de  $X$  de degré 1 ( $x$  est une feuille de l'arbre). On note que, puisque  $d(x) = 1$ , on a les égalités

$$(\star\star) \quad |V(X - x)| = |V(X)| - 1 \quad \text{et} \quad |E(X - x)| = |E(X)| - 1$$

Par ailleurs, d'après le Lemme II.4, on sait que  $X - x$  est un arbre (ce qui permet de faire jouer l'hypothèse de récurrence sur  $X - x$ ).

*i*)  $\implies$  *ii*) et *i*)  $\implies$  *iii*) Il suffit de vérifier que  $|E(X)| = |V(X)| - 1$  et cette égalité découle de  $|E(X - x)| = |V(X - x)| - 1$  (hypothèse de récurrence) et de  $(\star\star)$ .

*i*)  $\implies$  *iv*) Il reste à montrer que tout graphe obtenu en ajoutant une adjacence entre deux sommets non adjacents n'est pas acyclique. Ici, on va raisonner directement, sans récurrence. Soit donc  $a \sim b$  une nouvelle arête (qui n'est pas dans  $E(X)$ ). Comme  $X$  est connexe, il existe un  $a, b$ -chemin dans  $X$  et l'ajout d'une arête  $a \sim b$  crée donc un cycle.

*i*)  $\implies$  *v*) Il reste à montrer que tout graphe obtenu en supprimant une arête n'est pas connexe. Soit donc  $\{a, b\}$  une arête de  $X$  que l'on enlève. Si  $\{a, b\}$  est une arête de  $X - x$  (i.e. si  $a \sim b$  avec  $a$  et  $b$  distincts de  $x$ ) alors l'hypothèse de récurrence nous dit que  $(X - x) - \{\{a, b\}\}$  n'est pas connexe. Et on en déduit que  $X - \{\{a, b\}\}$  n'est pas connexe (car le rajout d'un sommet de degré 1 ne peut pas changer la connexité d'un graphe puisqu'un sommet de degré 1 ne peut pas être le sommet intérieur d'un chemin). Sinon, c'est par exemple (et sans perte de généralité), que  $a = x$  et  $b \neq x$  est l'unique voisin de  $x$ . Dans ce cas, le graphe  $X - \{\{a, b\}\} = X - \{\{x, b\}\}$  n'est pas connexe car  $x$  en est un sommet isolé.

*i*)  $\implies$  *vi*) Soient  $a$  et  $b$  deux sommets de  $X$ . Si  $x \notin \{a, b\}$ , l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un unique  $a, b$ -chemin dans  $X - x$ . Ce chemin est bien entendu un  $a, b$ -chemin dans  $X$  et il n'y en a pas d'autre (car le rajout de  $x$  ne modifie rien puisqu'il ne peut être sommet intérieur d'aucun chemin). Si  $x \in \{a, b\}$ , on suppose par exemple (et sans perte de généralité) que  $a = x$  et  $b \neq x$  et soit  $u$  l'unique voisin de  $x$ . Il existe alors un unique  $u, b$ -chemin dans  $X - x$  (d'après l'hypothèse de récurrence) qui se prolonge en un  $x, b$ -chemin avec  $a \sim u$ ; l'unicité du  $u, b$ -chemin entraîne celle du  $x, b$ -chemin.

*ii*)  $\implies$  *i*) Puisque  $|E(X)| = |V(X)| - 1$ , le Lemme I.5 nous dit que

$$\sum_{x \in V(X)} d(x) = 2|E(X)| = 2|V(X)| - 2$$

On en déduit qu'il existe au moins un sommet  $x$  tel que  $d(x) < 2$  et donc  $d(x) = 1$  (sinon  $x$  serait isolé et  $X$  non connexe). Ainsi,  $x$  est un sommet pendant de  $X$  et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $X - x$  (en utilisant  $(\star\star)$  et la Remarque II.5.b)). Ainsi  $X - x$  est un arbre et on conclut que  $X$  est un arbre grâce au Lemme II.4.

*iii*)  $\implies$  *i*) Par le même raisonnement que précédemment, on voit que  $X$  admet une feuille  $x$  et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $X - x$  (en utilisant  $(\star\star)$  et la Remarque II.5.a)). Ainsi  $X - x$  est un arbre et on conclut que  $X$  est un arbre grâce au Lemme II.4.

*iv*)  $\implies$  *i*) (sans récurrence) Il reste à montrer que  $X$  est connexe. Soient  $a$  et  $b$  deux sommets de  $X$ . Si  $a \sim b$ , alors l'arête  $\{a, b\}$  est un  $a, b$ -chemin de longueur 1. Si  $a \not\sim b$ , d'après *iv*), le rajout de l'arête  $a \sim b$  crée un cycle; cela veut dire qu'il existe déjà un chemin de  $a$  à  $b$  dans  $X$ . Ainsi,  $X$  est connexe.



$v) \implies i)$  (sans récurrence) Il reste à montrer que  $X$  est acyclique. Supposons qu'il existe un cycle  $C$  dans  $X$ . D'après la Proposition I.19, aucune arête  $a \sim b$  de ce cycle n'est un pont ; cela signifie que  $C - \{a, b\}$  est connexe pour toute arête  $a \sim b$  de  $C$  et contredit  $v)$  ; donc  $X$  est acyclique.

$vi) \implies i)$  (sans récurrence) Il reste à montrer que  $X$  est acyclique. Supposons qu'il existe un cycle  $C$  dans  $X$ . Pour tous sommets  $a$  et  $b$  de  $C$ , il existe deux  $a, b$ -chemins distincts. Mais cela contredit  $vi)$  ; donc  $X$  est acyclique.

**Remarque II.7** Si  $X$  est une forêt, on a donc  $|E(X)| \leq |V(X)| - 1$  ; avec égalité si, et seulement si,  $X$  est connexe (i.e., si  $X$  est un arbre).

## II.2 Dénombrements

La Formule de Cayley constitue le dénombrement le plus célèbre ; il compte, pour un nombre de sommets égal à un  $n$  fixé, le nombre d'arbres à  $n$  sommets. Ce nombre tient compte des « labels » ou « étiquettes » de chaque sommet<sup>1</sup>. Les Figures Fig.II.1 et Fig.II.2 donnent la liste complète des arbres pour  $n \in [4]$  :

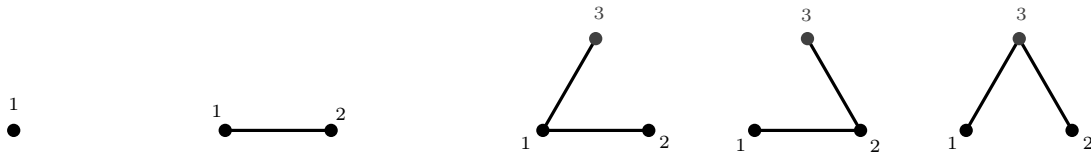


FIGURE II.1 – Les arbres à 1, 2 et 3 sommets

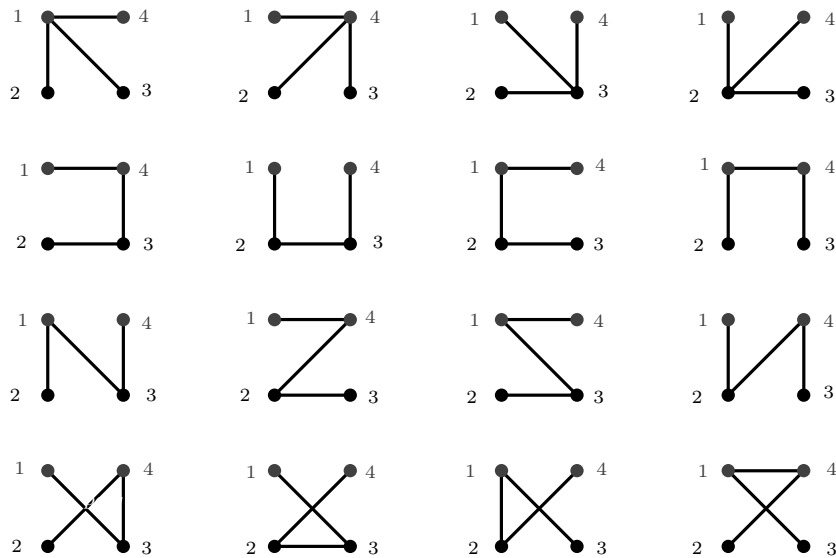


FIGURE II.2 – Les 16 arbres à 4 sommets

Soit  $n \geq 3$  entier. Pour dénombrer les arbres à  $n$  sommets, on introduit le codage de Prüfer des arbres. Si  $T$  est un arbre à  $n$  sommets (dont les sommets sont étiquetés  $1, 2, \dots, n$ ), son codage de Prüfer  $Pf(T)$  est le  $(n - 2)$ -uplet  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$  défini par :

1. On enlève dans  $T$  la feuille  $v$  dont l'étiquette a la plus faible valeur et  $a_1$  est la valeur de l'étiquette du seul voisin de  $v$ .

---

1. De tels graphes sont aussi parfois dits « numérotés » ou encore « décorés ».

2. On enlève dans  $T - v$  la feuille  $w$  dont l'étiquette a la plus faible valeur et  $a_2$  est la valeur de l'étiquette du seul voisin de  $w$ .
3. etc... On continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste que deux sommets.

**Remarque II.8** *Le codage de Prüfer des 16 arbres pour  $n = 4$  tels qu'ils sont présentés dans la Figure Fig.II.2 donne :*

11	44	33	22
43	23	21	14
13	42	31	24
34	32	12	41

*Par ailleurs, on note que les valeurs des étiquettes des feuilles de  $T$ , i.e. des sommets de degré 1, n'apparaissent pas dans  $Pf(T)$  et les valeurs des étiquettes des nœuds de  $T$ , i.e. des sommets de degré  $\geq 2$ , apparaissent forcément dans  $Pf(T)$ .*

**Théorème II.9 (Formule de Cayley)** *Il y a  $n^{n-2}$  arbres étiquetés à  $n$  sommets.*

PREUVE : La formule est clairement vraie pour  $n = 1$  et  $n = 2$  car  $1^{-1} = 2^0 = 1$ . On suppose à présent  $n \geq 3$ . Il suffit de montrer que la correspondance qui associe à tout arbre  $T$  à  $n$  sommets le  $(n-2)$ -uplet  $Pf(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$  est une bijection de l'ensemble des arbres étiquetés à  $n$  sommets vers  $[n]^{n-2}$ . On va le montrer avec un raisonnement par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 3$ , le résultat est vrai puisque  $Pf\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ & & \bullet \end{array}\right) = 2, Pf\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ & & \bullet \end{array}\right) = 1$  et  $Pf\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ & & \bullet \end{array}\right) = 3$ .

On suppose à présent que  $n$  est un entier  $\geq 3$  pour lequel la formule de Cayley est vraie. On note que, par définition du codage de Prüfer, si  $Pf(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ , alors la première feuille supprimée est un sommet voisin  $v$  de  $a_1$ .

Soit  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in [n]^{n-2}$ . Montrons qu'il existe un unique arbre  $T$  avec  $V(T) = [n]$  tel que  $Pf(T) = a$ . On sait que  $T$  doit posséder une feuille  $v$  de voisin  $a_1$ . Alors,  $T - v$  est un arbre à  $n - 1$  sommets qui admet un codage de Prüfer  $a' = (a_2, \dots, a_{n-2}) \in [n]^{n-3}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un unique arbre  $T'$  tel que  $V(T') = \{a_2, a_3, \dots, a_{n-2}\}$  et  $Pf(T') = a'$ . Le seul moyen d'obtenir un arbre  $T$  avec  $V(T) = [n]$  tel que  $Pf(T) = a$  est alors d'ajouter une arête  $va_1$  à un graphe tel que  $T'$ . L'existence et l'unicité de  $T'$  montre donc l'existence et l'unicité de  $T$ .  $\square$

Le lemme qui suit sera utilisé pour dénombrer le nombres d'arbres pour une suite de degrés fixée.

**Lemme II.10** *Si  $n > 0$  est un entier et  $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  est tel que  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , alors*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{i \text{ t.q. } n_i \geq 1} \binom{n-1}{n_1, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_k}$$

PREUVE : Cela découle de l'expression du coefficient de  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$  dans les deux membres de l'égalité :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^{n-1}$$

puisque le terme général dans le membre de gauche est

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

tandis que le terme général dans le membre de droite est

$$\sum_{i \text{ t.q. } n_i \geq 1} x_i \binom{n-1}{n_1, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_{i-1}^{n_{i-1}} x_i^{n_i-1} x_{i+1}^{n_{i+1}} \dots x_k^{n_k}$$

$\square$

$\square$

**Proposition II.11** Soient  $n$  un entier  $\geq 2$  et  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$  tel que  $\sum_{i \in [n]} d_i = 2(n-1)$ . Le nombre d'arbres ayant  $n$  sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de degrés respectifs  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , est

$$T_n(d_1, d_2, \dots, d_n) = \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! (d_2-1)! \dots (d_n-1)!}$$

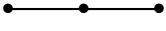
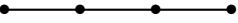

PREUVE : On peut supposer  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  avec  $d_i = d(v_i)$ . Le Lemme II.3 dit que  $d_1 = d_2 = 1$ . Le sommet  $v_1$  est donc une feuille et le décompte des arbres à  $n$  sommets se ramène ainsi au décompte des arbres à  $n-1$  sommets, décomposé suivant l'unique voisin  $v_i$  (avec  $i \geq 3$ ) de  $v_1$  :

$$T_n(d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{i \text{ t.q. } d_i \geq 2} T_{n-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i-1, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

On raisonne à présent par récurrence. Pour  $n=2$ , on a nécessairement  $d_1 = d_2 = 1$ , il existe un unique arbre (constitué de l'arête  $v_1 \sim v_2$ ) et la formule demandée est vérifiée (car  $1 = \frac{0!}{0!0!}$ ). On suppose, hypothèse de récurrence (HR), la formule demandée vérifiée pour un  $n-1 \geq 3$ . En tenant compte des remarques qui précèdent, on a les égalités :

$$\begin{aligned} T_n(d_1, d_2, \dots, d_n) &= \sum_{i \text{ t.q. } d_i \geq 2} T_{n-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i-1, d_{i+1}, \dots, d_n) \\ &\stackrel{(HR)}{=} \sum_{i \text{ t.q. } d_i \geq 2} \binom{n-3}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{i-1}-1, d_i-2, d_{i+1}-1, \dots, d_n-1} \\ &= \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1} \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme II.10, applicable ici car  $\sum_{i=1}^n (d_i-1) = \sum_{i=1}^n d_i - n = 2(n-1) - n = n-2$ . □

**Remarque II.12** (arbres non étiquetés) On remarque avec les Figures Fig.II.1 et Fig.II.2 qu'à isomorphisme près, il n'existe que l'arbre  pour  $n=3$  et que les arbres  pour  $n=4$  et  et

**Définitions II.13** Pour tout arbre  $T$  et tout sommet  $x$  de  $T$ , le couple  $(T, x)$  est appelé **arbre enraciné** et on dit que  $x$  est la **racine** de  $T$ .

Soit  $(T, x)$  un arbre enraciné. On dit que le sommet  $a$  est un **descendant** du sommet  $b$  s'il existe un chemin (nécessairement unique d'après le Théorème II.6.vi) de  $x$  à  $a$  passant par  $b$ . La relation « être un descendant de » est clairement une relation d'ordre partiel (réflexive, antisymétrique et transitive) sur  $V(X)$ .

**Définition II.14** Le sommet  $a$  est un **fi ls** du sommet  $b$  si  $a$  est un descendant de  $b$  tel que  $a \sim b$ . On dit alors aussi que  $b$  est un **père** de  $a$ .

Un arbre qui est dessiné dans le plan est appelé **arbre planaire**. La Figure II.3 la liste des arbres planaires enracinés à  $n$  arêtes pour  $0 \leq n \leq 3$ . On reconnaît les premières valeurs des nombres de Catalan

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} :$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$c_n$	1	1	2	5	14	42	132	429

**Proposition II.15** Le nombre d'arbres planaires enracinés à  $n$  arêtes (ou  $n+1$  sommets) est  $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

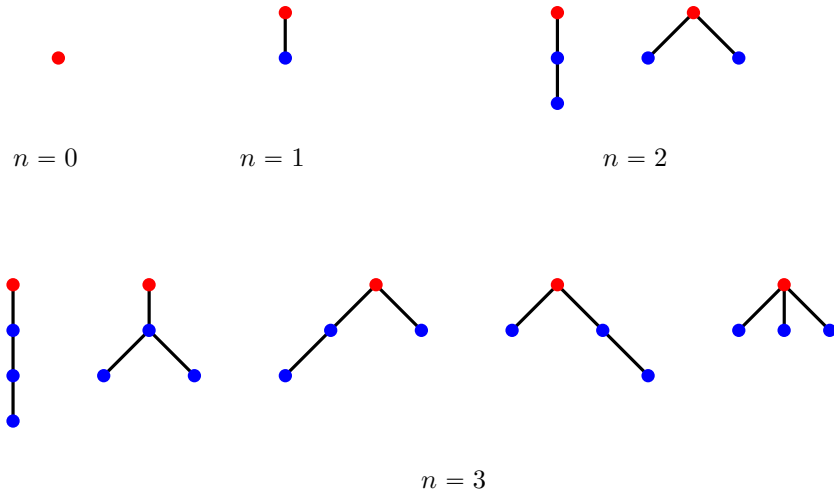
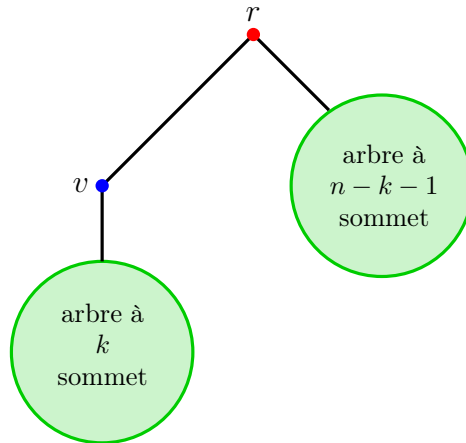


FIGURE II.3 – Les arbres planaires à  $n$  arêtes pour  $0 \leq n \leq 3$

PREUVE : Appelons  $t_n$  le nombre d'arbres enracinés à  $n$  arêtes. On a bien  $t_0 = c_0$  (et même  $t_i = c_i$  pour  $i \in [3]$ ) comme le montre la liste exhaustive de la Figure Fig.II.3).

Soit à présent un arbre enracinés à  $n$  arêtes (dont on note  $r$  la racine). Il existe au moins une arête reliant la racine à un de ses fils  $v$ . Les  $n - 1$  arêtes restantes sont ensuite distribuées entre celles qui sont dans un arbre constitué de descendants de  $v$  et celles qui sont dans un arbre constitué de descendants de  $r$  qui ne sont pas des descendants de  $v$ . Autrement, pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , on complète avec un arbre enraciné en  $v$  à  $k$  arêtes, soit avec un arbre enraciné en  $r$  à  $n - k - 1$  arêtes.



En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient donc l'égalité

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{n-k-1}$$

qui est exactement la relation de récurrence qui définit les nombres de Catalan. □

### II.3 Exercices

**Exercice II.1 :** Vrai ou Faux ? (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

- VF 1. Tout arbre est biparti.
- VF 2. Tout arbre a au moins un sommet pendant.

VF 3. Un graphe connexe est un arbre si, et seulement si, toute arête est un pont.

VF 4. La suite  $d_1, d_2, \dots, d_n$  est la suite des degrés des sommets d'un arbre si, et seulement si,  $\sum_{i \in [n]} d_i = 2(n - 1)$ .

**Exercice II.2 :** Un sous-graphe  $Y$  d'un graphe  $X$  est un **sous-graphe couvrant** si  $V(Y) = V(X)$ . Un **arbre couvrant** de  $X$  est un sous-graphe couvrant qui est aussi un arbre. Montrer que tout graphe connexe admet un arbre couvrant.

**Exercice II.3 :** Montrer que cette généralisation du Lemme II.3 est vraie : tout arbre possédant un sommet de degré  $k \geq 2$  possède au moins  $k$  feuilles.

**Exercice II.4 :** Vérifier les codages de Prüfer indiqués dans la Remarque II.8.

**Exercice II.5 :** Utiliser la Proposition II.11 pour donner une autre preuve de la Formule de Cayley (Théorème II.9).

**Exercice II.6 :** Un arbre binaire enraciné est un arbre enraciné dans lequel tout sommet a au plus deux fils. Si tout sommet a 0 ou 2 fils, on dit qu'il est plein. Soit  $T_n$  le nombre de classes d'isomorphismes d'arbres binaires enracinés pleins à  $n$  sommets internes (sommets qui ne sont pas des feuilles) La Figure II.4 la liste des arbres binaires pleins à  $n$  sommets internes pour  $0 \leq n \leq 3$ .

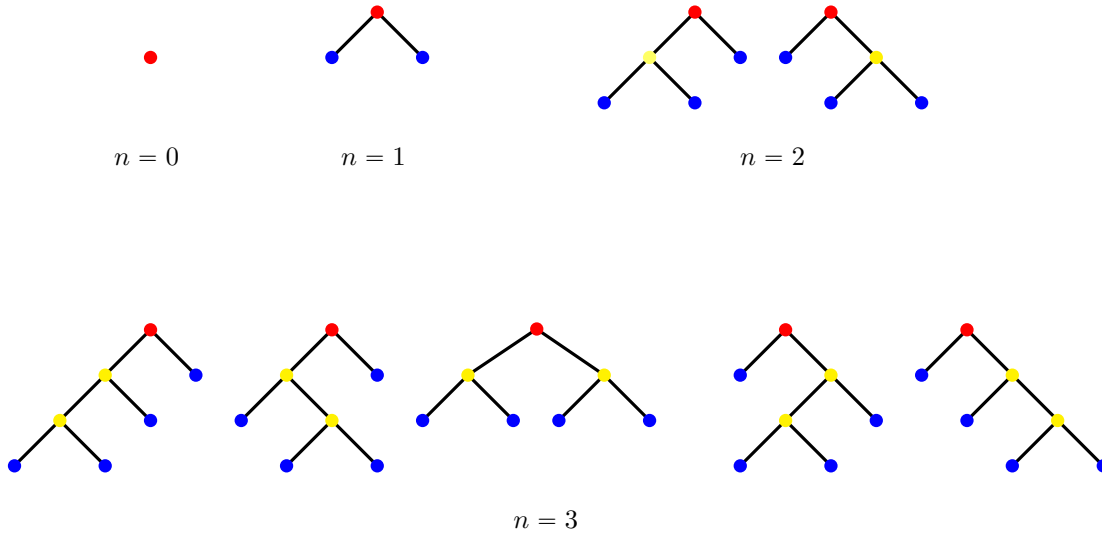


FIGURE II.4 – Les arbres binaires pleins à  $n$  sommets internes pour  $0 \leq n \leq 3$

1. Montrer que  $T_n$  est égal à  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  ( $n$ -ième nombre de Catalan).
2. Montrer que c'est aussi le nombre d'arbres binaires à  $n$  sommets.

**Exercice II.7 :** 1. a) Montrer que la représentation graphique des alcanes (hydrocarbures) de formule  $C_nH_{2n+2}$  est un arbre (on rappelle que l'atome de carbone est de valence 4 et celui d'hydrogène, de valence 1).

b) Pour  $n$  entier allant de 4 à 7, donner le nombre d'isomères de formule  $C_nH_{2n+2}$  et dessiner la représentation graphique de chaque isomère obtenu. On rappelle que deux molécules sont des

isomères si elles sont composées des mêmes atomes (elles ont la même formule brute) mais ont des propriétés chimiques, physiques ou autres distinctes.

2. a) Les molécules de formule  $C_nH_{2n+1}OH$  (alcools) ont-elles aussi une représentation graphique qui est un arbre ?

b) Les molécules de formule  $C_nH_{2n+1}OH$  ont-elles autant d'isomères que les molécules de formule  $C_nH_{2n+2}$  ? Illustrer la réponse avec  $n = 3$ .

## II.4 Correction de l'exercice 7

**Énoncé :** 1.a) Montrer que la représentation graphique des alcanes (hydrocarbures) de formule  $C_nH_{2n+2}$  est un arbre (on rappelle que l'atome de carbone est de valence 4 et celui d'hydrogène, de valence 1).

b) Pour  $n$  entier allant de 4 à 7, donner le nombre d'isomères de formule  $C_nH_{2n+2}$  et dessiner la représentation graphique de chaque isomère obtenu. On rappelle que deux molécules sont des isomères si elles sont composées des mêmes atomes (elles ont la même formule brute) mais ont des propriétés chimiques, physiques ou autres distinctes.

2.a) Les molécules de formule  $C_nH_{2n+1}OH$  (alcools) ont-elles aussi une représentation graphique qui est un arbre ?

2.b) Les molécules de formule  $C_nH_{2n+1}OH$  ont-elles autant d'isomères que les molécules de formule  $C_nH_{2n+2}$  ? Illustrer la réponse avec  $n = 3$ .

**Solution** 1.a) Le graphe dont il est question va de soi<sup>2</sup> : les sommets sont les atomes et les arêtes représentent les liaisons entre atomes (il ne s'agit donc pas d'un graphe simple puisqu'il peut y avoir des multi-arêtes).

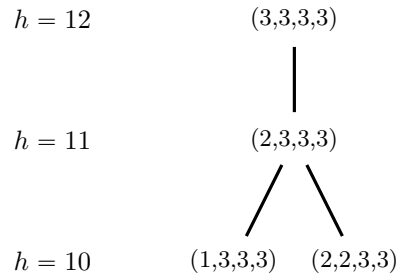
Le graphe d'une molécule de formule  $C_nH_{2n+2}$  est ainsi un graphe à  $S = n + 2n + 2 = 3n + 2$  sommets avec  $n$  sommets de degré 4 (car les atomes de carbone sont tétravalents) et  $2n + 2$  sommets de degré 1 (car les atomes d'hydrogène sont monovalents). On a donc  $\sum_{s \in S} d(s) = 4n + (2n + 2) = 6n + 2 = 2 \times (3n + 1)$

et comme  $\sum_{s \in S} d(s) = 2A$ , on en déduit que  $2A = 2 \times (3n + 1)$ , i.e.  $A = 3n + 1 = S - 1$ . Puisque ce graphe est connexe (comme graphe d'une molécule), on conclut que c'est un arbre d'après le Théorème 1.1. du chapitre 1 de la partie "Graphes".

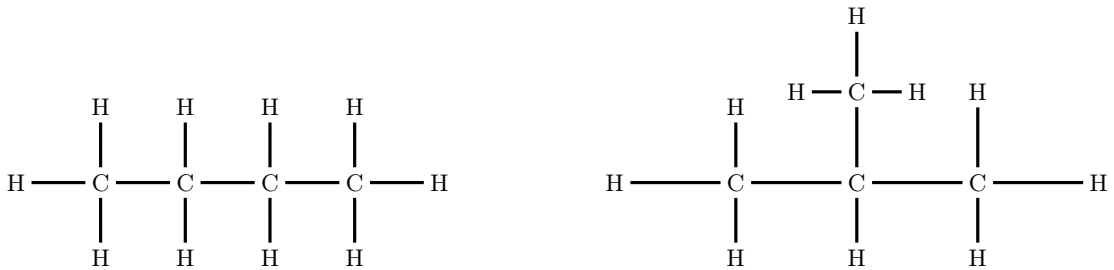
1.b) Le nombre d'isomères de  $C_nH_{2n+2}$  va être donné par les différentes manières de répartir les  $(2n+2)$  atomes d'hydrogène. Si on appelle  $h_i$  le nombre d'atomes d'hydrogène qui sont en liaison avec le  $i$ -ème atome de carbone (en imaginant avoir numéroté les atomes de carbone), on doit avoir  $h_1 + h_2 + \dots + h_n = 2n + 2$  avec  $h_i \in \{0, 1, 2, 3\}$  (en effet,  $h_i \leq 4$  car les atomes de carbone sont tétravalents et  $h = 4$  indique une molécule  $CH_4$ , déconnectée du restant des atomes).

$n = 4$  : On cherche les  $(h_1, h_2, h_3, h_4)$  tels que  $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 10$ . Notons que la seule configuration possible pour  $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 12$  est donnée par  $(h_1, h_2, h_3, h_4) = (3, 3, 3, 3)$ . Puis, pour pour  $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 11$ , la seule configuration possible est  $(h_1, h_2, h_3, h_4) = (2, 3, 3, 3)$ . On en déduit que les seules configurations possibles pour  $h = 10$  sont  $(1, 3, 3, 3)$  et  $(2, 2, 3, 3)$ . On représentera ce raisonnement par le graphique (un arbre...) suivant :

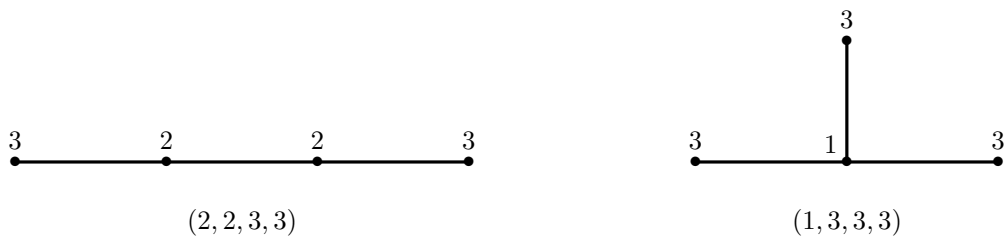
2. Ce n'était pas le cas à l'époque de Cayley dans la mesure où les notations actuelles pour désigner les molécules n'étaient pas encore bien établies.



On obtient les 2 isomères :

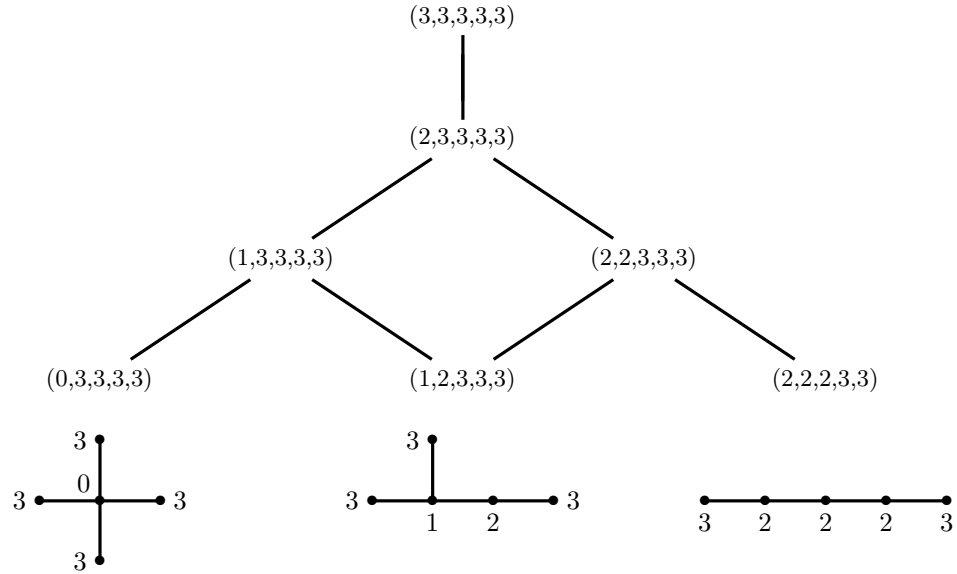


Pour ne pas alourdir les notations, il suffira de représenter ce type de graphique par les graphes suivants où les sommets représentent les atomes de carbone et où on ne représente pas les atomes d'hydrogène ; on sait qu'il suffit d'en rajouter, en chaque sommet, jusqu'à obtenir 4 liaisons (et ce nombre est indiqué par un chiffre mis à côté de chaque sommet) :

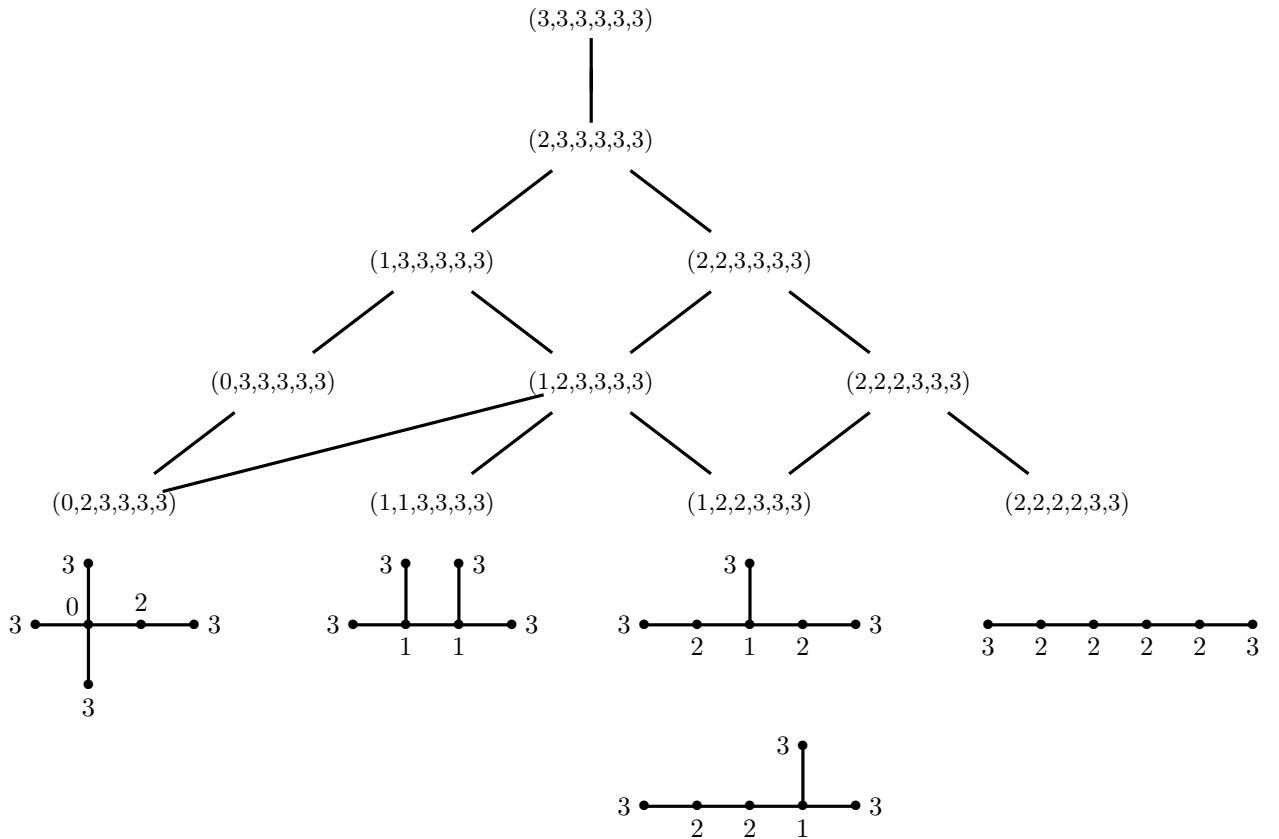


$n = 5$  : On cherche  $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$  avec  $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = 12$ .

CHAPITRE II. ARBRES

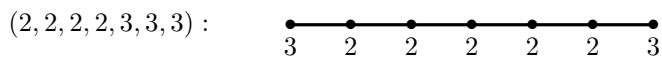
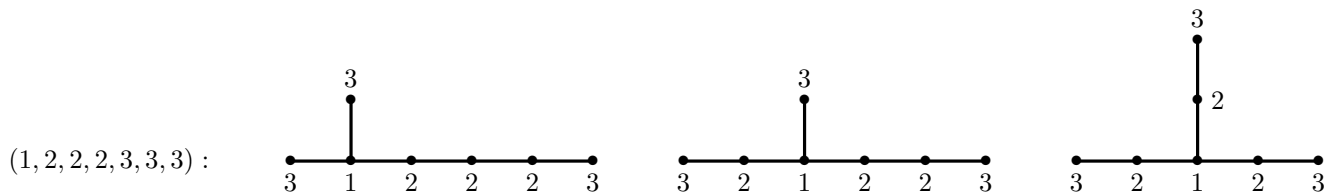
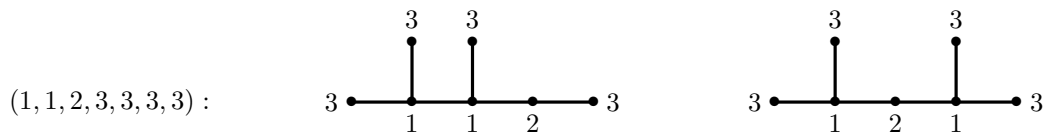
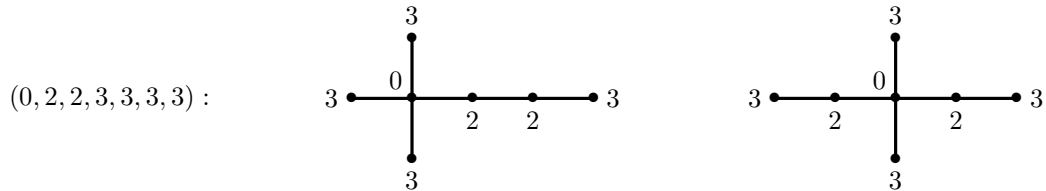
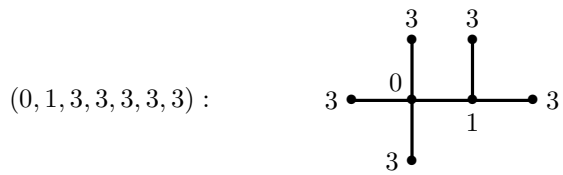


$n = 6$  : On cherche les  $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$  avec  $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 14$ . On notera qu'il existe 4 tels 6-uplets qui font 5 classes d'isomorphismes d'arbres :



$n = 7$  : On cherche les  $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7)$  avec  $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7 = 16$ . De la même manière que précédemment, on trouve 5 tels 7-uplets qui donnent 9 classes d'isomorphismes d'arbres :



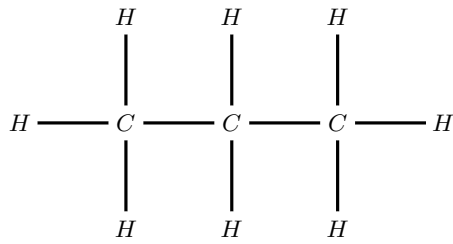


CONCLUSION : Pour  $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ , le nombre d'isomères  $I_n$  de formule  $C_nH_{2n+2}$  est :  $I_4 = 2$ ,  $I_5 = 3$ ,  $I_6 = 5$  et  $I_7 = 9$ .

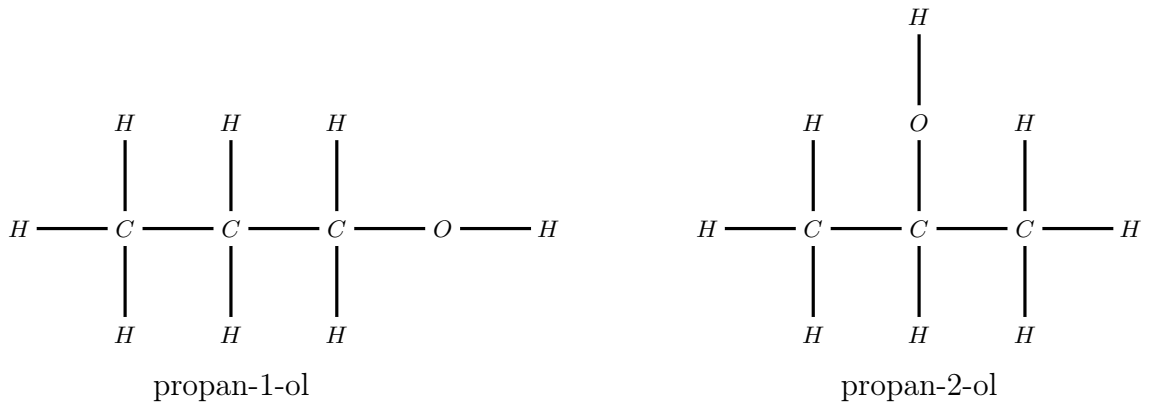
2.a) Le graphe d'une molécule de formule  $C_nH_{2n+1}OH$  est un graphe à  $S = n + (2n + 1) + 1 + 1 = 3n + 3$  sommets avec  $n$  sommets de degré 4 (car les atomes de carbone sont tétravalents), 1 sommet de degré 2 (car l'atome d'oxygène est bivalent) et  $2n + 2$  sommets de degré 1 (car les atomes d'hydrogène sont monovalents). On a donc  $\sum_{s \in S} d(s) = 4n + 2 + (2n + 2) = 6n + 4 = 2 \times (3n + 2)$  et comme  $\sum_{s \in S} d(s) = 2A$ , on en déduit que  $2A = 2 \times (3n + 2)$ , i.e.  $A = 3n + 2 = S - 1$ . Ces molécules ont donc également une représentation graphique qui est un arbre (d'après le Théorème 1.1. du chapitre 1 de la partie "Graphes").

2.b) Les molécules de formule  $C_nH_{2n+1}OH$  ont davantage d'isomères que les molécules de formule  $C_nH_{2n+2}$  car les propriétés de la molécule changent suivant l'emplacement de la fonction  $OH$ . Ainsi dans le cas de  $n = 3$ , alors qu'il n'y a qu'un seul isomère pour le propane  $C_3H_8$ ,

CHAPITRE II. ARBRES



on en compte deux pour le propanol  $C_3H_7OH$  (le *propan-1-ol* et le *propan-2-ol*) :



# Chapitre III

## Parcours dans un graphe

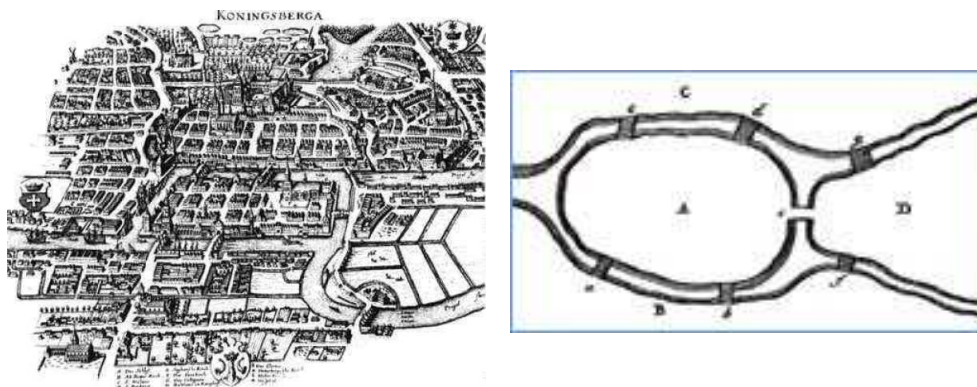


FIGURE III.1 – Königsberg et ses 7 ponts

### III.1 Parcours eulériens

Il est difficile de trouver un ouvrage d'introduction à la théorie des graphes qui ne mentionne pas le « problème des 7 ponts de Königsberg » (qui était de savoir si l'on pouvait faire une certaine promenade passant une fois - et une seule - par une série de ponts). En 1736, devant l'Académie des Sciences de Saint Petersburg, Euler présentera la solution de ce problème (pour être plus exact, sa résolution est partielle<sup>1</sup>) qui fait - à raison! - figure de problème fondateur dans l'histoire de la théorie des graphes.

**Définitions III.1** Une chaîne dans un graphe  $X$  est dite *eulérienne* si elle passe une et une seule fois par chaque arête de  $X$ .

Un circuit du graphe  $X$  est dit *eulérien* si c'est une chaîne eulérienne dont les extrémités sont identiques.

---

1. Euler n'a montré que la condition nécessaire (CN) de son résultat principal qui énonce une condition nécessaire et suffisante (CNS) :

*S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra. Cette règle satisfait donc pleinement au problème proposé.*

S'il ne démontre pas la condition suffisante (CS), à savoir qu'il existe (ce qu'on appelle aujourd'hui...) un circuit eulérien si un nombre pair de ponts part de chaque région et qu'il existe une chaîne semi-eulérienne si un nombre pair de ponts de toutes les régions sauf exactement deux, c'est peut-être parce que cela allait de soi (au vu de l'analyse qu'il avait faite)! La première preuve mathématique en bonne et due forme ne sera publiée qu'en 1873 par C. Hierholzer (Math. Annalen 6 (1873), 30-32.). Il semble qu'il ne connaissait pas les travaux d'Euler (N.L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, GRAPH THEORY, 1736-1936, rééd. 2006, Oxford Univ. Press, chap. 1, p. 12.). On notera que le texte original d'Euler (rédigé en latin) ne sera connu en langue française qu'avec la traduction d'E. Coupy en 1851, soit 115 ans après la présentation d'Euler.

**Définitions III.2** *Un graphe est eulérien s'il possède un circuit eulérien.  
Un graphe est semi-eulérien s'il possède une chaîne eulérienne.*

On notera donc que tout graphe eulérien est aussi semi-eulérien, la réciproque étant fausse :

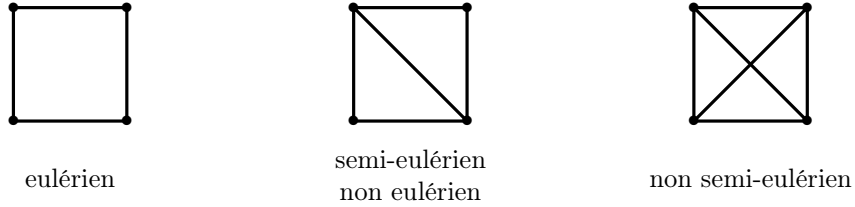
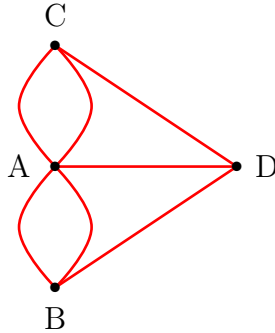


FIGURE III.2 – parcours eulériens (ou pas) : exemples

S'il est facile de se convaincre du résultat pour les trois graphes qde la Figure ??, nous allons voir qu'il existe une caractérisation générale très simple des graphes eulériens et des graphes semi-eulériens. Avant cela, notons que le graphe associé à la situation des ponts de Koenigsberg (cf. Figure ??) :



n'est pas un graphe simple. De façon générale, les parcours eulériens sont compatibles avec les multi-arêtes (et insensibles aux boucles...) et, dans cette section, les graphes ne seront pas supposés simples.

On appellera **promenade eulérienne** une chaîne qui ne passe deux fois par aucune arête. Un circuit qui est aussi une promenade eulérienne sera appelé **promenade eulérienne fermée**.

**Théorème III.3** *Soit  $X$  un graphe connexe fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $X$  est eulérien*
- ii) Tous ses sommets sont de degré pai*
- iii)  $X$  est « arête-union disjointe » de cycles (i.e.  $E(X)$  se partitionne en  $E(C_1) \coprod E(C_2) \coprod \dots \coprod E(C_k)$  où  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sont des cycles de  $X$ ).*

PREUVE :

*i)  $\implies$  ii)* Soit  $X$  un graphe eulérien et  $C$  un circuit eulérien :

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1} = v_0$$

Pour tout sommet  $v_i \neq v_0$ , chaque fois que  $C$  traverse  $v_i$ , il arrive par une nouvelle arête et part par une autre nouvelle arête ; si  $v_i$  est traversé  $k_i$  fois, son degré sera donc  $2k_i$  (puisque le cycle  $C$  a emprunté toutes les arêtes incidentes à  $v_i$ ). Le même raisonnement vaut aussi pour  $v_0$  pour lequel il faut rajouter les deux arêtes  $v_0 \sim v_1$  et  $v_k \sim v_0$  et  $v_0$  est également de degré pair.

*ii)  $\implies$  iii)* Puisque tout sommet est de degré au moins égal à 2,  $X$  contient un cycle  $C_1$  (Proposition I.17). Soit  $X_1$  le graphe obtenu à partir de  $X - E(C_1)$  en enlevant les éventuels sommets isolés. Si  $X_1$  n'est pas vide (i.e. si  $V(X_1) \neq \emptyset$ ), tous les sommets de  $X_1$  sont aussi de degré pair. Et, à

nouveau, d'après la Proposition I.17,  $X_1$  contient un cycle  $C_2$ . Par répétition de ce raisonnement, il ne restera qu'un certain nombre (éventuellement nul) de sommets isolés. Ceci montre qu'il existe un entier  $k$  tel que  $E(X)$  se partitionne en  $E(C_1) \amalg E(C_2) \amalg \dots \amalg E(C_k)$  où  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sont des cycles de  $X$ .

iii)  $\implies$  i) On suppose que  $X$  est « arête-union disjointe » de cycles. Puisque tout cycle est eulérien, on peut considérer  $C_1$  de longueur maximale parmi l'ensemble des promenades eulériennes fermées de  $X$ . On veut alors vérifier que  $C_1 = X$  (i.e. que  $X$  est eulérien). Supposons que ce ne soit pas le cas (raisonnement par l'absurde) et soit  $X_1$  une composante connexe de  $X - E(C_1)$  telle que  $E(X_1)$  soit non vide. Puisque  $X$  est « arête-union disjointe » de cycles, tous les sommets de  $X$  sont de degré pair  $\geq 2$  et cela est aussi vrai des sommets de  $C_1$  (puisque  $C_1$  est eulérien et qu'on a déjà vérifié que les sommets d'un graphe eulérien sont de degré pair). On en déduit que tous les sommets de  $X_1$  sont aussi de degré pair. Comme  $E(X_1)$  est non vide et  $X$  est connexe, on conclut que  $X_1$  contient un cycle  $C_2$  qui a au moins un point commun  $v$  avec  $C_1$ . Mais alors, la concaténation  $C_1 * C_2$  de  $C_1$  et  $C_2$  (i.e.  $C_1$  parcouru de  $v$  à  $v$ , puis  $C_2$  parcouru de  $v$  à  $v$ ) est un circuit eulérien dans  $X$ , ce qui contredit l'hypothèse de maximalité faite sur  $C_1$  (car  $|E(C_1 * C_2)| > |E(C_1)|$ ). Par conséquent,  $X$  est eulérien. □

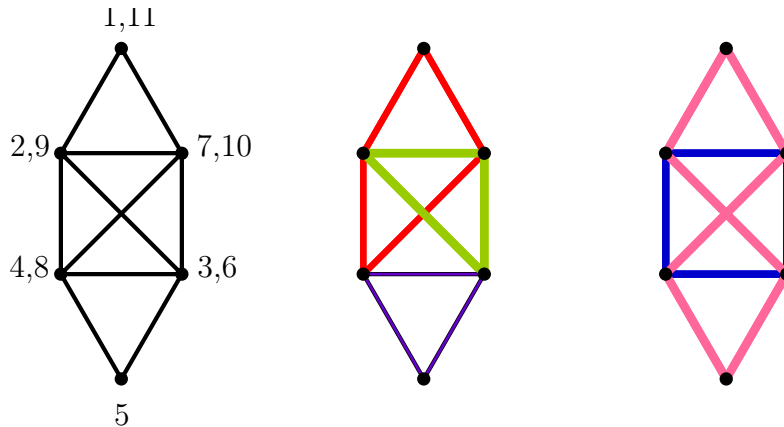


FIGURE III.3 – Un graphe eulérien : un parcours (ales numéros indiquent l'ordre de parcours des arêtes) et deux décompositions « arête-union disjointe » de cycles distinctes

On déduit du Théorème III.3 la caractérisation des graphes semi-eulériens :

**Corollaire III.4** *Un graphe connexe  $X$  est semi-eulérien si, et seulement si, il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.*

### III.2 Parcours hamiltoniens

La question des parcours hamiltoniens est en apparence similaire à celle des parcours eulériens, la condition sur les arêtes (pour les graphes eulériens) devenant une condition sur les sommets :

**Définitions III.5**

*Un chemin dans un graphe  $X$  est dit **hamiltonien** s'il passe par tous les sommets de  $X$ .  
Un cycle dans un graphe  $X$  est dit **hamiltonien** s'il passe par tous les sommets de  $X$ .*

**Définitions III.6**

*Un graphe est **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien.  
Un graphe est **semi-hamiltonien** s'il possède un chemin hamiltonien.*

En d'autres termes (cf. Exercice II.2), un graphe est hamiltonien (res. semi-hamiltonien) s'il possède un cycle couvrant (resp. un chemin couvrant). On notera donc que tout graphe hamiltonien est aussi

semi-hamiltonien, la réciproque étant bien entendu fausse (cf. Fig. III.4). Cependant, si l'on a une caractérisation simple (et facile à manipuler) des parcours eulériens, ce n'est absolument pas le cas pour les parcours hamiltoniens<sup>2</sup>, pour lesquels on ne connaît toujours pas d'algorithme efficace. Parmi le très grand nombre de résultats partiels, nous mentionnerons seulement une CN (Théorème III.7) et une CS (Théorème III.8).

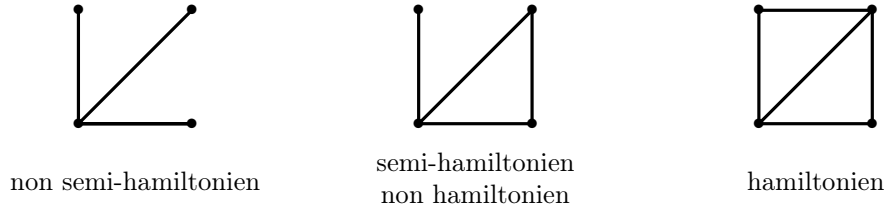


FIGURE III.4 – parcours hamiltoniens (ou pas) : exemples

**Théorème III.7** *Si  $X$  est un graphe hamiltonien, alors pour tout sous-ensemble non vide  $A$  de  $V(X)$ ,*

$$Coco(X - A) \leq |A|$$

où  $Coco(X - A)$  est le nombre de composantes connexes de  $X - A$ .

De plus, si  $Coco(X - A) = |A|$ , chaque composante de  $X - A$  est semi-hamiltonienne et tout cycle hamiltonien de  $X$  comprend un chemin hamiltonien dans chaque composante connexe.

PREUVE : Soit  $C$  un cycle hamiltonien de  $X$ . Il est clair que  $Coco(X - A) \leq Coco(C - A)$  puisque  $V(C) = V(X)$ . Par ailleurs, on a également  $Coco(C - A) \leq |A|$  (en effet, si  $|A| = 1$ ,  $C - A$  est un chemin et  $Coco(C - A) = 1 = |A|$ ; ensuite, le retrait d'un sommet dans un chemin soit laisse le chemin connexe s'il s'agit d'une extrémité, soit le coupe en deux composantes connexes s'il s'agit d'un sommet intérieur et, par une récurrence évidente, cela montre bien que  $Coco(C - A) \leq |A|$  pour tout ensemble  $A$  de sommets).

Si l'on suppose que  $Coco(X - A) = |A|$ , alors  $C - A$  a aussi  $|A|$  composantes connexes et chaque composante connexe de  $C - A$  contient tous les sommets de la composante connexe de  $X$  correspondante; autrement dit,  $C$  induit un chemin hamiltonien dans chaque composante connexe (qui est donc semi-hamiltonienne).  $\square$

**Théorème III.8** *Soit  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets. Si pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents, on a  $d(a) + d(b) \geq n$ , alors  $X$  est hamiltonien.*

PREUVE : Soit la propriété  $(\star)$  d'être un graphe à  $n \geq 3$  sommets vérifiant  $d(a) + d(b) \geq n$  pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents. Et soit  $X$  vérifiant  $(\star)$ . Supposons que  $X$  n'est pas hamiltonien (raisonnement par l'absurde). Ajoutons des arêtes à  $X$  (sans ajouter de sommets) jusqu'à obtenir un sur-graphe  $X^+$  de  $X$  (i.e. un graphe dont  $X$  est un sous-graphe) (arête-)maximal dans la famille des graphes non hamiltoniens possédant la propriété  $(\star)$  (un tel graphe existe puisque  $K_n$  est hamiltonien). Ainsi, pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents de  $X^+$ ,  $X^+ + ab$  possède un cycle hamiltonien  $C$  qui, nécessairement, contient l'arête  $ab$  (sinon  $X^+$  serait hamiltonien). Par conséquent,  $C - ab$  est un chemin hamiltonien dans  $X^+$  :

$$a = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n = b$$

On pose alors

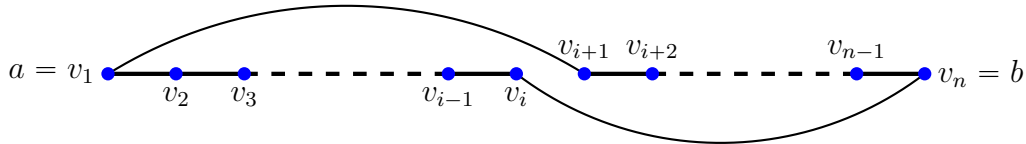
$$A := \{i, a \sim v_{i+1}\} \quad \text{et} \quad B := \{i, b \sim v_i\}$$

2. L'origine de cette terminologie est dans les travaux de Hamilton (1805-1865) qui avait notamment inventé un jeu (« icosian game ») qui consistait à trouver des façons de parcourir les 20 sommets d'un dodécaèdre sans passer deux fois par le même sommet. Mais, selon l'ouvrage (p. 35) de Biggs, Lloyd et Wilson (cf. note 1), elle n'est pas totalement justifiée et fait peu de cas des travaux de Kirkman (1806-1895) sur les cycles que l'on nomme aujourd'hui *hamiltoniens*...

On a ainsi  $|A| = d_{X^+}(a)$ ,  $|B| = d_{X^+}(b)$  et  $|A \cup B| \leq n - 1$  car  $n$  n'est ni dans  $A$ , ni dans  $B$ . Puisque

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B| = d_{X^+}(a) + d_{X^+}(b) \geq n$$

on conclut que  $A \cap B \neq \emptyset$  et qu'il existe un  $i \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$  tel que  $a \sim v_i$  et  $b \sim v_{i-1}$ . Mais cela implique que  $X^+$  admet le cycle hamiltonien :



et contredit l'hypothèse selon laquelle  $X^+$  n'est pas hamiltonien. Et on conclut que  $X$  est hamiltonien.  $\square$

**Corollaire III.9 (Théorème de Dirac)** Soit  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets. Si tout sommet de  $X$  est de degré  $\geq n/2$ , alors  $X$  est hamiltonien.

**Corollaire III.10** Soit  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets. Si pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents, on a  $d(a) + d(b) \geq n - 1$ , alors  $X$  est semi-hamiltonien.

**Remarque III.11** La preuve du Théorème III.8 repose en fait sur le résultat suivant

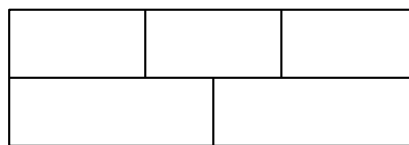
**Théorème III.12** Si  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets, alors  $X$  est hamiltonien si, et seulement si,  $X + ab$  est hamiltonien pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents vérifiant  $d(a) + d(b) \geq n$ .

L'ajout d'arêtes  $ab$  avec  $a$  et  $b$  non adjacents vérifiant  $d(a) + d(b) \geq n$  permet de définir la fermeture  $cl(X)$  de  $X$  (cf. Exercice 11) qui sera hamiltonienne si, et seulement si,  $X$  est hamiltonien (CNS).

### III.3 Exercices

**Exercice III.1 :** Vrai ou Faux? (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

- VF 1. Un graphe eulérien et biparti a un nombre pair d'arêtes.
- VF 2. Un graphe eulérien possédant un nombre pair de sommets a un nombre pair d'arêtes.
- VF 3. Il est possible, sans lever la main, de tracer une courbe fermée qui traverse chacun des 16 segments qui composent cette figure :

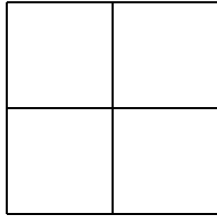


- VF 4. Si  $X$  est un graphe non eulérien, on peut toujours le rendre eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes.

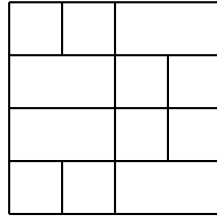
**Exercice III.2 :** Donner les valeurs de  $m$  et  $n$  pour lesquelles  $K_{m,n}$  est eulérien.

**Exercice III.3 :** Prouver le Corollaire III.4.

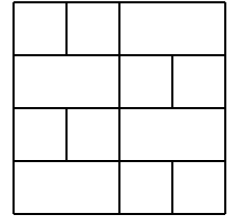
**Exercice III.4 :** (examen 16-17) Pour chacun des trois dessins qui suivent, dire s'il est possible, sans lever la main (et sans repasser sur un trait déjà dessiné), de dessiner une courbe fermée qui traverse exactement une fois chacun des segments qui composent la figure (sachant que chaque croisement délimite un nouveau segment : les dessins  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  possèdent respectivement 12, 33 et 34 segments). Et si l'on enlève la condition que la courbe soit fermée, cela change-t-il quelque chose ?



Dessin  $D_1$



Dessin  $D_2$



Dessin  $D_3$

Pour répondre à ces deux questions, pour chaque dessin  $D_i$ , on explicitera un graphe  $X_i$  qui permet d'y répondre et, lorsqu'elles existent, on dessinera des courbes qui illustrent ces réponses.

**Exercice III.5 :** Compléter le tableau suivant :

	eulérien	semi-eulérien non eulérien	non semi-eulérien
hamiltonien			
semi-hamiltonien non hamiltonien			
non semi-hamiltonien			

**Exercice III.6 :** (examen 16-17) 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que le graphe complet  $K_n$  admet  $\frac{(n-1)!}{2}$  cycles hamiltoniens.

2. Soit  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Combien de cycles hamiltoniens peut-on trouver dans un graphe biparti complet  $K_{m,n}$  ?

**Exercice III.7 :** Euler avait déjà traité un problème hamiltonien<sup>3</sup> en résolvant le « problème du cavalier », c'est-à-dire en montrant qu'un cheval peut parcourir toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois par la même case et de telle sorte que la dernière case du parcours soit à un saut de cheval de la première case du parcours (cf. Fig III.5). Dit autrement, Euler a montré que le graphe dont les sommets sont donnés par les cases de l'échiquier et les arêtes par les déplacements du cheval est hamiltonien.

3. L. Euler, *Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse*, Mém. Acad. Sci. Berlin 15 (1759, publié en 1766), 310-337.



3. Pour éclaircir mieux cette question, j'ajouterai ici une route, où, en commençant par un coin de l'échiquier, on parcourt toutes les cases :

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	45	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

J'ai marqué ici les cases par l'ordre des nombres, suivant lequel elles sont successivement parcourues. Ainsi le cavalier ayant été posé dans la case 1 saute en 2, de là en 3, & depuis en 4, 5, 6, &c. jusqu'à ce que venant enfin dans la case 64 il aura passé toutes les cases. Il est évident, que cette route satisfait également, quand on veut commencer par quelqu'un des autres angles.

FIGURE III.5 – Réponse d'Euler à une « question curieuse ». Il indique dans cet extrait un chemin hamiltonien et indiquera un peu plus loin un cycle hamiltonien.

Est-ce également vrai si l'on prend un échiquier  $4 \times 4$  ?

**Exercice III.8 :** Pour  $n$  entier  $\geq 2$ , le « cube »  $Q_n$  est le graphe de sommets  $\{0, 1\}^n$  tel que deux  $n$ -uplets sont adjacents si, et seulement s'ils diffèrent en une unique coordonnée.

1. Dessiner  $Q_2$  et  $Q_3$ .
2. Montrer que les cubes sont hamiltoniens.

**Exercice III.9 :** Prouver le Corollaire III.10

**Exercice III.10 :** Montrer qu'un graphe  $k$ -régulier (i.e., tout sommet est de degré  $k$ ) à  $2k - 1$  sommets est hamiltonien.

**Exercice III.11 :** 1. Prouver le Théorème III.12.

2. Pour un graphe  $X$  à  $n$  sommets, on définit  $cl(X)$  comme étant le graphe obtenu par addition d'arêtes  $ab$  avec  $a \neq b$  et  $d(a) + d(b) \geq n$  tant que de telles paires  $\{a, b\}$  existent.

Montrer que  $cl(X)$  est bien défini.

3. Montrer que  $X$  est hamiltonien si, et seulement si,  $cl(G)$  est hamiltonien.

# Chapitre IV

## Trois théorèmes pour conclure

### IV.1 Réseaux et Théorème de Ford-Fulkerson

Dans cette section, nous considérons des graphes orientés (ou digraphes)  $\vec{X} = (V(\vec{X}), E(\vec{X}))$ . L'ensemble  $E(\vec{X})$  des arêtes de  $\vec{X}$  est un sous-ensemble de  $V(\vec{X}) \times V(\vec{X})$ ; ses éléments sont appelés **arêtes orientées** ou **arcs**. L'arc  $(x, y)$  avec  $x, y \in V(\vec{X})$  sera aussi notée  $\vec{xy}$  et il est distincte de l'arc  $(y, x) = \vec{yx}$  (sauf si  $y = x$ ... mais on considèrera uniquement des graphes sans boucles).

**Définitions IV.1** Soit  $\vec{X}$  un graphe orienté.

1) Si  $\vec{e} = (x, y)$  est une arête de  $\vec{X}$ , alors  $x$  sera appelé **origine** de l'arête orientée  $\vec{e} = (x, y)$  et notée  $o(\vec{e})$  tandis que  $y$  sera appelé **extrémité** de l'arête orientée  $(x, y)$  et notée  $e(\vec{e})$ .

2) Si  $x$  est un sommet de  $\vec{X}$ , alors  $N_{\vec{X}}^+(x) = N^+(x) := \{y, y \in V(\vec{X}) \text{ et } (x, y) \in E(\vec{X})\}$  est le **voisinage extérieur** de  $x$  et  $N_{\vec{X}}^-(x) = N^-(x) := \{y, y \in V(\vec{X}) \text{ et } (y, x) \in E(\vec{X})\}$  est le **voisinage intérieur** de  $x$ . Le voisinage de  $x$  dans  $\vec{X}$  est  $N_{\vec{X}}(x) = N(x) = N^+(x) \cup N^-(x)$ .

3)  $d_+(x) = |\{y, \vec{xy} \in E(\vec{X})\}|$  est appelé **degré extérieur** de  $x$ .

$d_-(x) = |\{y, \vec{yx} \in E(\vec{X})\}|$  est appelé **degré intérieur** de  $x$ .

Et  $d(x) := d_+(x) + d_-(x)$  est le **degré** de  $x$ .

#### IV.1.1 Graphes orientés

Les notions vues jusqu'ici dans le cas des graphes non orientés s'adaptent naturellement au cadre orienté. Une chaîne orientée reste une succession  $v_0, v_1, \dots, v_n$  telle que  $(v_i, v_{i-1})$  soit une arête orientée pour  $i \in [n]$ . Il faut cependant noter une différence notable pour ce qui concerne la connexité. Dans le cas non orienté, les composantes connexes sont les classes d'équivalence de la relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $V(X)$  par  $x\mathcal{R}y$  s'il existe un  $x, y$ -chemin. Dans le cas orienté, la relation «  $x\mathcal{R}y$  s'il existe un  $x, y$ -chemin orienté » n'est plus une relation d'équivalence (elle est bien réflexive et transitive mais la symétrie n'est plus assurée) et il existe alors deux notions de connexité :

**Connexité (ou connexité faible)** On dit que le graphe orienté  $X$  est **connexe** si le graphe non orienté sous-jacent<sup>1</sup> est connexe (autrement dit, pour tous sommets  $x$  et  $y$ , il existe un  $x, y$ -chemin « sans tenir compte de l'orientation des arcs »).

**Connexité forte** On dit que le graphe orienté  $X$  est **fortement connexe** si pour tous sommets  $x$  et  $y$ , il existe un  $x, y$ -chemin orienté.

Bien entendu, un graphe fortement connexe est connexe et la réciproque est fausse (cf. Fig. IV.1)).

#### IV.1.2 Réseaux et flots

**Définition IV.2 (réseau)** Un **réseau** est un quadruplet  $(\vec{X}, s, p, C)$  avec :

---

1. Si  $\vec{X}$  est un graphe orienté, le graphe non orienté sous-jacent  $X$  vérifie  $V(X) = V(\vec{X})$  et  $x \sim_X y$  si, et seulement si,  $\{(x, y), (y, x)\} \cap E(\vec{X}) \neq \emptyset$ .

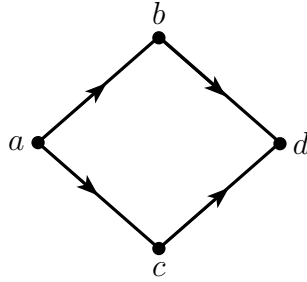


FIGURE IV.1 – Un graphe orienté connexe mais non fortement connexe

- $\vec{X}$  graphe orienté
- $C : E(\vec{X}) \rightarrow [0, +\infty]$
- $s$  (*source*) et  $p$  (*puits*) sont deux sommets de  $\vec{X}$ .

L'application  $C$  est appelée *capacité* et, pour toute arête  $\vec{e}$ ,  $C(\vec{e})$  est la *capacité de l'arête*  $\vec{e}$ .

**Définition IV.3 (flot)** *Un flot sur le réseau  $(\vec{X}, s, p, C)$  est une application*

$$f : E(\vec{X}) \longrightarrow [0, +\infty[$$

telle que

F1.  $f(\vec{e}) \leq C(\vec{e})$  pour toute  $\vec{e} \in E(\vec{X})$

F2.  $\sum_{y \in N^+(v)} f(x, y) = \sum_{z \in N^-(v)} f(z, x)$  pour tout  $x$  distinct de  $s$  et  $p$ .

**Remarques IV.4** *i) La condition F1 dit simplement que le flot qui « traverse » une arête ne doit pas excéder sa capacité.*

*ii) La condition F2 s'écrit encore*

$$\forall x \in V(\vec{X}) \setminus \{s, p\}, f^+(x) = f^-(x)$$

en notant  $f^+(x) = \sum_{y \in N^+(x)} f(x, y) = \sum_{o(\vec{e})=x} f(\vec{e})$  (resp.  $f^-(x) = \sum_{z \in N^-(x)} f(z, x) = \sum_{e(\vec{e})=x} f(\vec{e})$ )

les flots *entrant* (resp. *sortant*) en  $x$ . Elle exprime donc une loi de conservation valable en tout sommet autre que la source et le puits. Elle est encore nommée « loi de Kirchhoff ».

*iii) On note que tout réseau admet au moins le flot nul (prenant la valeur 0 en toute arête).*

*iv) On notera qu'on a autorisé des capacités infinies sur les arêtes. C'est une manière de dire que le flot peut être aussi grand qu'on veut (pas de contraintes).*

*v) Par commodité, il pourra arriver qu'on écrive  $f(x, y)$  même si l'arc  $(x, y)$  n'existe pas (cela voudra simplement dire que  $f(x, y)$  vaut alors 0).*

**Définition IV.5** *Soit  $f$  un flot sur le réseau  $(\vec{X}, C, s, p)$ . La différence*

$$f^+(s) - f^-(s) = \sum_{y \in N^+(s)} f(s, y) - \sum_{z \in N^-(s)} f(z, s)$$

est appelée *valeur du flot*  $f$  et notée  $val(f)$ .

Pour tout ensemble de sommets  $S$  de  $\vec{X}$ , on définit

$$S^{\rightarrow} := \{\vec{e}, o(\vec{e}) \in S \text{ et } e(\vec{e}) \notin S\} = \{(x, y), x \in S \text{ et } y \notin S\}$$

$$S^{\leftarrow} := \{\vec{e}, o(\vec{e}) \notin S \text{ et } e(\vec{e}) \in S\} = \{(x, y), x \notin S \text{ et } y \in S\}$$

On notera que, pour  $S = \{s\}$ ,  $\{s\}^{\rightarrow} = \{\vec{sy}, y \in N^+(s)\}$  et  $\{s\}^{\leftarrow} = \{\vec{ys}, y \in N^-(s)\}$  tandis que pour  $T = V(\vec{X}) \setminus \{p\}$ ,  $T^{\rightarrow} = \{\vec{xp}, x \in N^-(p)\}$  et  $T^{\leftarrow} = \{\vec{px}, x \in N^+(p)\}$ .

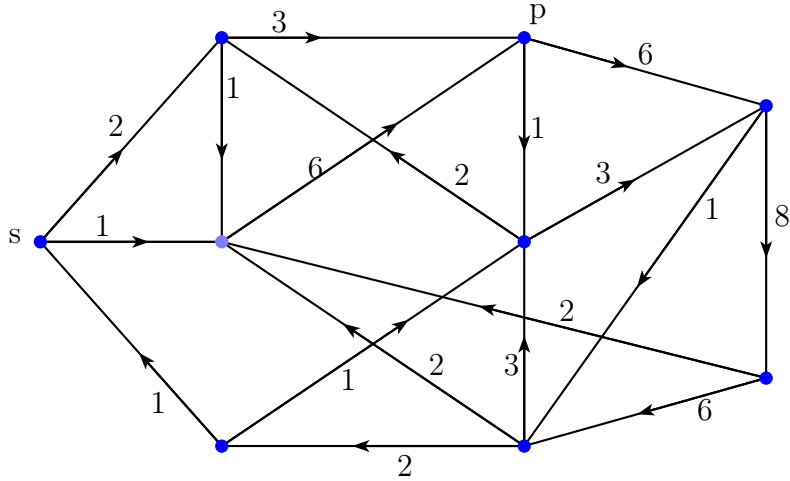


FIGURE IV.2 – flot de valeur 2 dans un réseau (les capacités ne sont pas indiquées)

**Lemme IV.6** Soit  $f$  un flot sur le réseau  $(\vec{X}, C, s, p)$ . Pour tout ensemble de sommets  $S$  contenant la source  $s$  et ne contenant pas le puits  $p$ , on a

$$f(S^{\rightarrow}) - f(S^{\leftarrow}) = \text{val}(f)$$

**Corollaire IV.7** Pour tout flot  $f$ , on a donc

$$\text{val}(f) = f^+(s) - f^-(s) = f^-(p) - f^+(p)$$

PREUVE : C'est le cas particulier du Lemme IV.6 pour  $S = V(\vec{X}) - p$ . □

### IV.1.3 Coupes dans un flot

La question que l'on se pose alors est de savoir quelle peut être la valeur maximale d'un flot sur un réseau  $(\vec{X}, s, p, C)$ . La réponse va être fournie en termes de coupes.

Si  $V$  est l'ensemble des sommets du réseau  $\vec{X}$  et si  $A, B \subset V$ , on notera

$$\vec{E}(A, B) := \{(a, b), a \in A \text{ et } b \in B\}$$

l'ensemble des arcs dont l'origine est dans  $A$  et l'extrémité est dans  $B$ . On écrira  $\vec{E}(A, \bar{A})$  lorsque  $B = V \setminus A$  est l'ensemble des sommets qui ne sont pas dans  $A$ .

#### Définitions IV.8

i) Tout  $\vec{E}(A, \bar{A})$  avec  $s \in A$  et  $p \in \bar{A}$  est appelé **coupe** de  $\vec{X}$  séparant  $s$  et  $p$  et est simplement notée  $(A, \bar{A})$ .

ii) Le nombre  $C(\vec{E}(A, \bar{A})) = \sum_{a \in A, b \notin A} C(a, b)$  est appelé **capacité de la coupe**  $(A, \bar{A})$  et noté  $C(A, \bar{A})$ .

iii) Le nombre  $f(\vec{E}(A, \bar{A})) = \sum_{a \in A, b \notin A} f(a, b)$  est appelé **valeur du flot  $f$  sur la coupe**  $(A, \bar{A})$  et noté  $f(A, \bar{A})$ .

**Proposition IV.9** Soit  $f$  un flot sur le réseau  $(\vec{X}, C, s, p)$ . Pour toute coupe  $(A, \bar{A})$ , on a

$$\text{val}(f) = f(A, \bar{A}) - f(\bar{A}, A)$$

PREUVE : En tout sommet  $a$  de  $A$ , on a  $f^+(a) - f^-(a) = 0$  si  $a \neq s$  et  $f^+(s) - f^-(s) = \text{val}(f)$  sinon. Ainsi  $\sum_{a \in A} f^+(a) - f^-(a) = \sum_{a \in A, a \neq s} + f^+(s) - f^-(s) = \text{val}(f)$ . Mais

$$\sum_{a \in A} f^+(a) - f^-(a) = \sum_{a \in A, x \in V} f(a, x) - \sum_{y \in V, a \in A} f(y, a) \stackrel{(\diamond)}{=} \sum_{a \in A, x \notin A} f(a, x) - \sum_{y \notin A, a \in A} f(y, a) = f(A, \bar{A}) - f(\bar{A}, A)$$

où l'égalité ( $\diamond$ ) vient du fait que toute arête  $(a, b)$  avec  $a \in A$  et  $b \in A$  contribue pour  $(f(a, b) - f(b, a)) + (f(b, a) - f(a, b)) = 0$  dans la somme  $\sum_{a \in A, x \in V} f(a, x) - \sum_{y \in V, a \in A} f(y, a)$ .  $\square$

**Corollaire IV.10** *Pour tout flot  $f$  et toute coupe  $(A, \bar{A})$  sur le réseau  $(\vec{X}, C, s, p)$ , on a*

$$val(f) \leq C(A, \bar{A})$$

PREUVE : D'après la Proposition IV.9,

$$(*) \quad val(f) = f(A, \bar{A}) - f(\bar{A}, A) \leq f(A, \bar{A}) \leq C(A, \bar{A})$$

où la première inégalité vient du fait que  $f$  est à valeurs positives et la seconde découle de la Propriété F1.  $\square$

On note que les inégalités  $(*)$  nous disent que

$$(**) \quad val(f) = C(A, \bar{A}) \iff f(\vec{e}) = \begin{cases} C(\vec{e}) & \text{si } \vec{e} \in \vec{E}(A, \bar{A}) \\ 0 & \text{si } \vec{e} \in \vec{E}(\bar{A}, A) \end{cases}$$

Un flot  $f$  qui réalise cette égalité est nécessairement un flot maximum ( $f$  est un **flot maximum** s'il n'existe pas de flot  $f'$  tel que  $val(f') > val(f)$ ) et une coupe qui réalise cette égalité est nécessairement une coupe minimum ( $(A, \bar{A})$  est une **coupe minimum** s'il n'existe pas de coupe  $(A', \bar{A}')$  telle que  $C(A', \bar{A}') < C(A, \bar{A})$ ).

Ainsi, on sait que la valeur maximale d'un flot est inférieure ou égale à la valeur minimale d'une coupe. Le résultat important est que la réciproque de cette inégalité est vraie et l'équivalence  $(**)$  est à la base de l'algorithme qui va permettre d'établir ce résultat.

#### IV.1.4 Théorème de Ford-Fulkerson

**Théorème IV.11 (Théorème de Ford-Fulkerson ou Max-Flow Min-Cut Theorem)** *Dans tout réseau, la valeur maximum d'un flot est égale à la valeur minimum d'une coupe.*

PREUVE : On considère un flot  $f$  dont la valeur  $v$  est maximale. Il faut montrer qu'il existe une capacité de même valeur  $v$ . Cela va résulter de la procédure de construction d'une coupe  $(A, \bar{A})$  suivante. On impose  $s \in A$ . Puis, récursivement, pour tout  $x \in A$ , on pose

$$(\dagger) \quad C(x, y) > f(x, y) \quad \text{ou} \quad f(y, x) < 0 \implies y \in A$$

Le nombre de sommets étant fini, cette procédure se termine et l'ensemble de sommets  $A$  ainsi obtenu fournit une coupe  $(A, \bar{A})$ . Il suffit pour montrer cela de vérifier que  $p \notin A$ . De fait, si l'on suppose que  $p$  est dans  $A$ , on peut trouver une  $s, p$ -chaîne  $s = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = p$  telle que

$$\forall i \text{ tel que } 0 \leq i \leq n-1, \quad \epsilon_i = \max\{c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1}), f(x_{i+1}, x_i)\} > 0$$

Si l'on pose,  $\epsilon = \min_{0 \leq i \leq n-1} \epsilon_i$ , en remplaçant le flot  $f$  par le flot  $f'$  selon la règle suivante :

- Si  $0 \leq i \leq n-1$  et  $\epsilon_i > f(x_{i+1}, x_i)$ , alors  $f'(x_i, x_{i+1}) = f(x_i, x_{i+1}) + \epsilon$
- Si  $0 \leq i \leq n-1$  et  $\epsilon_i = f(x_{i+1}, x_i)$ , alors  $f'(x_{i+1}, x_i) = f(x_{i+1}, x_i) - \epsilon$
- Sinon,  $f'(\vec{e}) = f(\vec{e})$ .

on obtient un nouveau flot  $f'$  (car les propriétés F1 et F2 restent vraies) et tel que  $val(f') = val(f) + \epsilon$  (car  $f'(s, x_1) - f'(x_1, s) = f(s, x_1) - f(x_1, s) + \epsilon$ ), ce qui contredit la maximalité de  $val(f)$ .

A présent, on sait que

$$val(f) = \sum_{a \in A, b \notin A} f(a, b) - \sum_{a \in A, b \notin A} f(b, a)$$

Dans cette différence, la première somme est exactement  $C(A, \bar{A})$  et la seconde somme est nulle (par construction de  $A$ ) et on a bien montré que  $val(f) = C(A, \bar{A})$ .  $\square$

On note que la preuve du Théorème IV.11 fournit un algorithme de recherche d'un flot optimal (c'est l'algorithme de Ford-Fulkerson). En particulier, on en déduit le résultat d'intégralité suivant :

**Théorème IV.12 (Théorème d'intégralité)** *Dans tout réseau muni d'une capacité à valeurs entières, on peut trouver un flot à valeurs entières de valeur maximale.*

PREUVE : On suppose donc que le réseau est muni d'une capacité à valeurs entières. On part du flot nul  $f_0$  (i.e.,  $f(\vec{e}) = 0$  pour toute arête  $\vec{e}$  du réseau) et on construit une suite de flots à valeurs entières  $f_1, f_2, f_3, \dots$  qui stoppera dès qu'on aura obtenu un flot maximum. Supposons que le flot à valeurs entières  $f_i$  soit déjà construit. En appliquant la règle (†) suivie dans la preuve du Théorème IV.11, on construit l'ensemble  $A_i$  de sommets associé à  $f_i$ . Si  $p \notin A_i$ , alors  $val(f_i) = C(A_i, \overline{A_i})$ , i.e.  $f_i$  est un flot de valeur maximale. Sinon, le raisonnement fait dans la preuve du Théorème IV.11 montre qu'on peut définir  $f_{i+1}$  tel que  $val(f_{i+1}) = val(f_i) + \epsilon$  avec  $\epsilon$  entier strictement positif et qui est également à valeurs entières (car  $f_{i+1}(\vec{e}) \in \{f_i(\vec{e}), f_i(\vec{e}) \pm \epsilon\}$  pour toute arête  $\vec{e}$ ). Cette procédure s'arrêtera en au plus  $\sum_{x,y \in V} C(x,y)$  étapes. □

## IV.2 Connexité et théorèmes de Menger

### IV.2.1 Version « arêtes »

Deux chemins orientés sont dits **arêtes-disjoints** s'ils n'ont aucune arête orientée en commun.

**Théorème IV.13** *Soit  $R = (\overline{X}, s, p, C)$  un réseau avec  $C = 1$  (i.e.,  $C(\vec{e}) = 1$  pour toute arête orientée  $\vec{e}$  de  $\overline{X}$ ). alors :*

- i) La valeur maximale d'un flot sur  $\overline{X}$  est égale au nombre maximal  $K$  de  $s, p$ -chemins orientés et arête-disjoints.*
- ii) La valeur minimale de la capacité d'une coupe sur  $\overline{X}$  est égale au nombre d'arêtes orientées minimal  $L$  dont la suppression élimine tout  $s, p$ -chemin orienté.*

PREUVE : *i)* Soit  $f$  un flot maximum sur  $\overline{X}$ . D'après le Théorème IV.12, on peut supposer que  $f$  est à valeurs entières et vaut donc soit 0, soit 1 en toute arête. On considère alors  $\overline{X}^f$  le graphe orienté obtenu en supprimant dans  $\overline{X}$  toutes les arêtes orientées  $\vec{e}$  telles que  $f(\vec{e}) = 0$ . On a donc  $f(\vec{e}) = 1$  pour toute arête orientée  $\vec{e}$  de  $\overline{X}^f$ . Et aussi :

- a)  $val(f) = d_{X^f}^+(s) - d_{X^f}^-(s) = d_{X^f}^-(p) - d_{X^f}^+(p)$
- b)  $d_{X^f}^+(x) - d_{X^f}^-(x) = 0$  pour tout  $x \neq s, p$ .

Les conditions a) et b) entraînent qu'il y a  $val(f)$   $s, p$ -chemins orientés arête-disjoints. Par conséquent,  $val(f) \leq K$ .

Soient à présent  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  une suite de  $k$   $s, p$ -chemins orientés arête-disjoints dans  $\overline{X}^f$ . On définit alors une fonction  $g$  sur  $E(\overline{X}^f)$  par

$$g(\vec{e}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{e} \in \bigcup_{i=1}^k E(Q_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $g$  est un flot de valeur  $K$  et, comme  $f$  est un flot maximum, on a  $K \leq val(f)$ .

En conclusion,  $val(f) = K$ .

*ii)* Soit  $(A, \overline{A})$  une coupe minimum dans  $R$ . Par définition de  $L$ , on a donc  $c(A, \overline{A}) \geq L$  (puisque  $c(A, \overline{A})$  est le nombre d'arêtes  $(a, b)$  avec  $a \in A$  et  $b \notin A$ ).

Soit à présent  $U$  un ensemble de  $L$  arêtes orientées dont la suppression élimine tout  $s, p$ -chemin orienté et soit  $S$  l'ensemble des sommets  $x$  reliés à  $s$  par un  $s, x$ -chemin orienté dans  $\overline{X} - U$ . Puisque  $s \in S$  et  $p \notin S$ ,  $(S, \overline{S})$  est une coupe de  $\overline{X}$ . Par définition de  $S$ ,  $\overline{X} - U$  ne contient aucune arête de  $\overline{E}(S, \overline{S})$ ; autrement dit,  $\overline{E}(S, \overline{S}) \subset U$ . Puisque  $(A, \overline{A})$  une coupe minimum, on a  $C(A, \overline{A}) \leq C(T, \overline{T}) = |\overline{E}(T, \overline{T})| \leq |U| = L$ .

En conclusion,  $c(A, \overline{A}) = L$ . □

**Théorème IV.14 (Théorème de Menger, version arête pour les graphes orientés)** Soient  $a$  et  $b$  deux sommets d'un graphe orienté  $\vec{X}$ . Le nombre maximal de  $a, b$ -chemins orientés et arêtes-disjoints est égal au nombre minimal d'arêtes orientées dont la suppression entraîne la disparition de tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}$ .

PREUVE : C'est une conséquence directe des Théorèmes IV.11 et IV.13. □

**Théorème IV.15 (Théorème de Menger, version arête pour les graphes)** Soient  $a$  et  $b$  deux sommets d'un graphe  $X$ . Le nombre maximal de  $a, b$ -chemins arêtes-disjoints est égal au nombre minimal d'arêtes dont la suppression entraîne la disparition de tout  $a, b$ -chemin dans  $X$ .

PREUVE : Ce résultat dans le cadre non orienté découle de son équivalent (Théorème IV.14) dans le cadre orienté. Partant de  $X$ , il suffit de considérer le graphe orienté  $\vec{X}$  de mêmes sommets que  $X$  et possédant deux arêtes  $(x, y)$  et  $(y, x)$  pour toute arête  $\{x, y\}$  de  $X$ . Il y a alors une correspondance bijective entre les  $x, y$ -chemins de  $X$  et les  $x, y$ -chemins orientés de  $\vec{X}$ . □

### IV.2.2 Version « sommets »

Deux  $x, y$ -chemins (orientés ou pas) sont dits **sommets-internes-disjoints** s'ils n'ont aucun sommet en commun en dehors des extrémités  $x$  et  $y$ .

Les Théorèmes IV.14 et IV.15 expriment en nombre de  $x, y$ -chemins arêtes-disjoints le nombre d'arêtes qu'il est nécessaire de supprimer pour déconnecter deux sommets  $x$  et  $y$ . On cherche à présent un résultat similaire en termes de sommets (qui exprimera en nombre de  $x, y$ -chemins sommets-internes-disjoints le nombre de sommets qu'il est nécessaire de supprimer pour déconnecter deux sommets  $x$  et  $y$ ). Pour relier les deux situations, on introduit la construction de  $\vec{X}^{ec}$ , le « graphe éclaté » associé au graphe  $\vec{X}$ .

#### Construction de $\vec{X}^{ec}$

Soit  $\vec{X} = (V, E) = (V(\vec{X}), E(\vec{X}))$  un graphe orienté et  $a, b \in V$  deux sommets de  $\vec{X}$ . On définit le réseau  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  en remplaçant tout sommet  $x \neq a, b$  de  $\vec{X}$  par deux sommets  $x_1, x_2$  une arc  $\overrightarrow{x_1x_2}$ . Les arcs de  $\vec{X}^{ec}$  sont alors les  $\overrightarrow{x_1x_2}$  pour tout  $x \in V \setminus \{a, b\}$  et les arcs  $\overrightarrow{x_2y_1}$  pour toute arc  $\overrightarrow{xy}$  de  $\vec{X}$ . Si  $n + 2$  est le nombre de sommets de  $\vec{X}$ , alors  $|V(\vec{X}^{ec})| = |V(\vec{X})| + n = 2n + 2$  et  $|E(\vec{X}^{ec})| = |E(\vec{X})| + n$  (cf. Fig IV.3 pour une illustration)

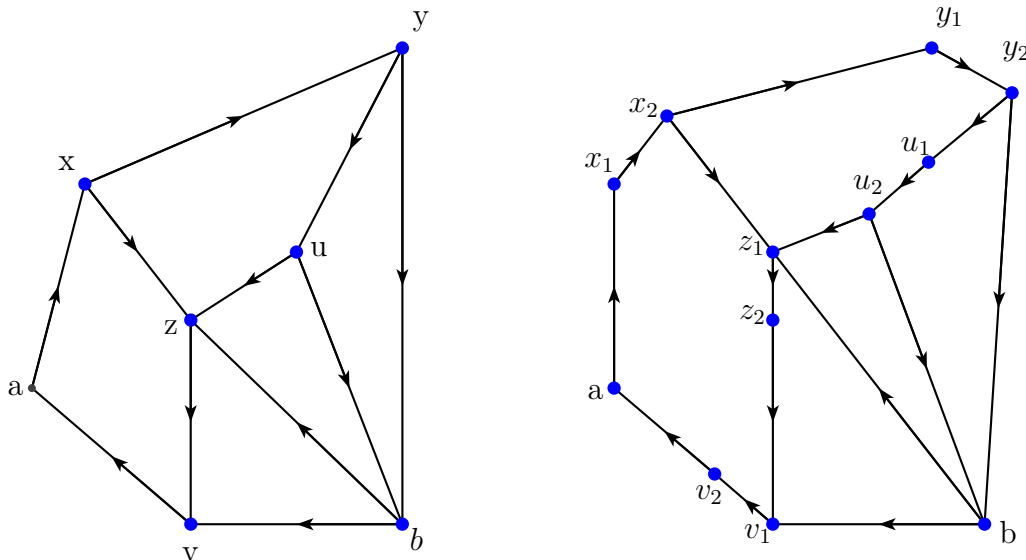


FIGURE IV.3 – Un graphe orienté et son graphe éclaté relatif à deux de ses sommets  $a$  et  $b$

**Lemme IV.16** Soit  $\vec{X}$  un graphe orienté,  $a, b$ , deux sommets de  $\vec{X}$  et  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  le graphe éclaté associé.

i) Le nombre maximal de  $a, b$ -chemins orientés arc-disjoints dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  est égal au nombre maximal de  $a, b$ -chemins orientés sommets-internes-disjoints dans  $\vec{X}$ .

ii) Le nombre minimal d'arêtes orientées dont la suppression élimine tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  est égal au nombre minimal de sommets dont la suppression élimine tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}$ .

PREUVE : i) A tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  correspond un  $a, b$ -chemin orienté en contractant tout arc  $\overrightarrow{x_1x_2}$  (i.e., en identifiant les sommets  $x_1$  et  $x_2$  et en supprimant l'arc  $\overrightarrow{x_1x_2}$ ; cf; Fig. IV.4).



FIGURE IV.4 – Un chemin orienté dans le graphe éclaté et le chemin contracté dans le graphe initial

Réciproquement, à tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}$  correspond un  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  obtenu en remplaçant tout sommet  $x$  par l'arête orientée  $\overrightarrow{x_1x_2}$ , et tout arc  $\overrightarrow{ax}$  (resp.  $\overrightarrow{xa}$ ) par  $\overrightarrow{ax_1}$  (resp.  $\overrightarrow{x_2a}$ ) pour tout sommet  $x$  distinct de  $a$  et  $b$ . Selon cette correspondance, deux  $a, b$ -chemins orientés dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  sont arc-disjoints si, et seulement si, les  $a, b$ -chemins orientés qui leur correspondent dans  $\vec{X}$  sont sommets-internes-disjoints.

ii) Soit  $N^{ec}$  le nombre minimal d'arcs dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  dont la suppression élimine tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  et soit  $\mathcal{E}^{ec}$  un ensemble de  $N^{ec}$  tels arcs. Soit  $M$  le nombre minimal de sommets de  $\vec{X}$  dont la suppression élimine tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}$  et soit  $\mathcal{S}$  un ensemble de  $M$  tels sommets. On veut montrer que  $N^{ec} = M$ . Tout arc de  $\mathcal{E}^{ec}$  comprend soit un sommet de type  $x_1$ , soit un sommet de type  $x_2$ , correspondant à un sommet  $x$  de  $\vec{X}$ . Par conséquent, la suppression de tous les sommets  $x$  correspondant à ces arcs de  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  élimine tout  $a, b$ -chemin dans  $\vec{X}$ , ce qui montre que  $N^{ec} \geq M$ . Réciproquement, si  $v \in \mathcal{S}$ , la suppression des arcs  $\overrightarrow{v_1v_2}$  va éliminer tout  $a, b$ -chemin dans  $\vec{X}_{a,b}^{ec}$  (puisque la suppression des sommets  $v$  de  $\mathcal{S}$  entraîne l'élimination de tout  $a, b$ -chemin dans  $\vec{X}$ ); par conséquent, on a aussi  $N^{ec} \leq M$  (par minimalité de  $N^{ec}$ ).

Ainsi  $N^{ec} = M$  et cela prouve l'assertion annoncée. □

**Théorème IV.17 (Théorème de Menger, version sommets pour les graphes orientés)** Soient  $a$  et  $b$  deux sommets d'un graphe  $\vec{X}$  tels que  $(a, b)$  ne soit pas une arête orientée. Le nombre maximal de  $a, b$ -chemins orientés sommets-internes-disjoints est égal au nombre minimal de sommets dont la suppression entraîne l'élimination de tout  $a, b$ -chemin orienté dans  $\vec{X}$ .

PREUVE : En suivant la correspondance établie par le Lemme IV.16, c'est une conséquence immédiate du Théorème IV.14. □

**Théorème IV.18 (Théorème de Menger, version sommets pour les graphes)** Soient  $a$  et  $b$  deux sommets non adjacents d'un graphe  $X$ . Le nombre maximal de  $a, b$ -chemins sommets-internes-disjoints est égal au nombre minimal de sommets dont la suppression entraîne l'élimination de tout  $a, b$ -chemin dans  $X$ .

PREUVE : En suivant la correspondance établie par le Lemme IV.16, c'est une conséquence immédiate du Théorème IV.17. □

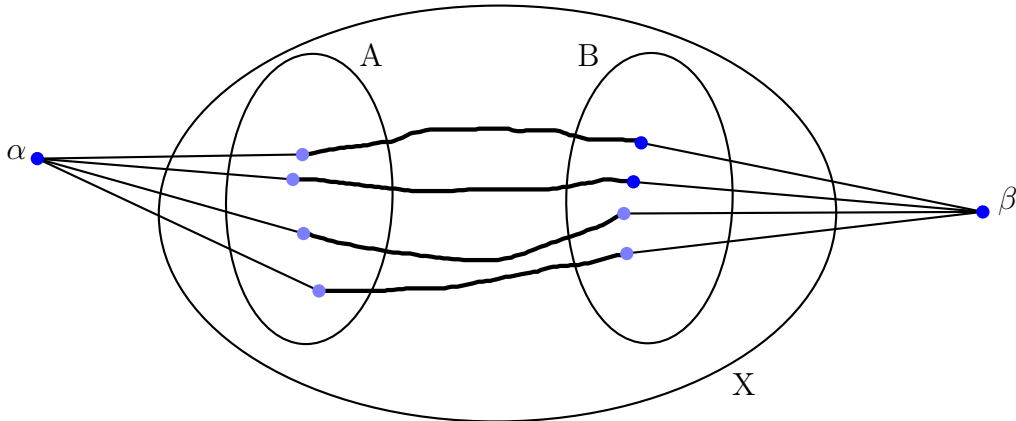
Deux chemins sont dits **sommets-disjoints** s'ils ne possèdent aucun sommet en commun. Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles de sommets d'un graphe, un  $A, B$ -chemin dans ce graphe est un  $a, b$ -chemin avec  $a \in A$  et  $b \in B$ . Notons l'extension suivante du Théorème IV.18.

**Théorème IV.19** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de sommets d'un graphe  $X$ . Le nombre maximal de  $A, B$ -chemins sommets-disjoints est égal à

$$\min\{|S|, S \subset V(X), X - S \text{ ne contient pas de } A, B\text{-chemin}\}$$



PREUVE : On procède en se ramenant au cas du Théorème IV.18 par l'ajout de deux sommets  $\alpha$  et  $\beta$  coniques, respectivement, sur  $A$  et  $B$ . Cela veut dire que si on appelle  $\tilde{X}$  le nouveau graphe obtenu avec ces deux nouveaux sommets, on a  $E(\tilde{X}) = E(X) \cup \{\alpha a, \beta b, a \in A, b \in B\}$ .



Il est alors clair qu'il y a une bijection entre les  $a, b$ -chemins sommets-internes-disjoints dans  $\tilde{X}$  et les  $A, B$ -chemins sommets-disjoints dans  $X$  et que les nombres N1 et N2 qui suivent sont égaux :

Nombre N1 : nombre maximal de  $A, B$ -chemins sommets-disjoints dans  $X$

Nombre N2 : nombre maximal de  $a, b$ -chemins sommets-internes-disjoints dans  $\tilde{X}$

Nombre N3 : cardinal minimum d'un ensemble séparant  $a$  de  $b$  dans  $\tilde{X}$

Nombre N4 : cardinal minimum d'un ensemble séparant  $A$  de  $B$  dans  $X$

Le Théorème IV.18 énonce l'égalité entre N2 et N3. Enfin, l'égalité N3=N4 découle du passage de  $X$  à  $\tilde{X}$  car les deux ensembles

$$\mathcal{S} = \{Y, Y \subset V(X), X - Y \text{ ne contient pas de } A, B\text{-chemin dans } X\}$$

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{Z, Z \subset V(\tilde{X}), \tilde{X} - Z \text{ ne contient pas de } a, b\text{-chemin dans } \tilde{X}\}$$

sont égaux. En effet, si  $X - Y$  ne contient pas de  $A, B$ -chemin dans  $X$ , alors  $\tilde{X} - Y$  ne contient pas de  $a, b$ -chemin dans  $\tilde{X}$  (car tout  $a, b$ -chemin dans  $\tilde{X}$  se décompose en  $a - \sigma - b$  où  $\sigma$  est un  $A, B$ -chemin dans  $X$ ). Et si  $\tilde{X} - Z$  ne contient pas de  $a, b$ -chemin dans  $\tilde{X}$ , alors  $Z \subset V(X)$  (sinon on ne peut pas parler de  $a, b$ -chemins) et  $X - Z$  ne contient pas de  $A, B$ -chemin dans  $X$  (si  $X - Z$  contenait un  $A, B$ -chemin  $\sigma$ , alors  $a - \sigma - b$  serait un  $a, b$ -chemin dans  $\tilde{X} - Z$ ).

En conclusion N1=N4 et c'est ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

### IV.2.3 $k$ -connexité dans un graphe

On rappelle qu'un graphe est connexe si deux sommets quelconques du graphe sont reliables par un chemin.

Si  $S$  est un ensemble de sommets d'un graphe connexe  $X$  tel que  $X - S := X[V(X) \setminus S]$  n'est plus connexe, on dit que  $S$  est un **ensemble sommets-séparateur** de  $X$ ; de plus, si  $a$  et  $b$  sont deux sommets qui sont dans des composantes connexes distinctes de  $X - S$ , on dit que  $S$  **sépare**  $a$  de  $b$ .

#### Définitions IV.20

Pour  $k$  entier  $\geq 2$ , on dit que le graphe  $X$  est  **$k$ -connexe** si  $X = K_{k+1}$  ( $X$  est un complet à  $k + 1$  sommets) ou  $X$  a au moins  $k + 2$  sommets et n'admet aucun ensemble sommets-séparateur à  $k - 1$  sommets.

La valeur maximale de  $k$  pour laquelle  $X$  est  $k$ -connexe est la **connexité** de  $X$ ; elle est dénotée  $\kappa(X)$ .

Si  $X$  n'est pas connexe, on pose  $\kappa(X) = 0$ .

**Remarques IV.21** 1. Tout graphe connexe  $X$  est 1-connexe (i.e.,  $\kappa(X) \geq 1$ ).

2. Un graphe est 1-connexe s'il est connexe mais possède un sommet dont la suppression déconnecte le graphe. Par exemple, tout chemin à au moins 2 sommets est 1-connexe.
3.  $\kappa(C_n) = 2$  pour  $n \geq 4$ .
4. La suppression des voisins d'un sommet isole ce sommet et déconnecte le graphe. Ainsi

$$\kappa(X) \leq \delta(X)$$

où  $\delta(X)$  est le minimum de l'ensemble des degrés des sommets du graphe  $X$ .

**Théorème IV.22 (Théorème de Withney)** *Un graphe avec au moins  $k + 1$  sommets est  $k$ -connexe si, et seulement si, pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets, il existe au moins  $k$   $a, b$ -chemins sommets-internes-disjoints.*

PREUVE : Soit  $X$  un graphe avec  $n \geq k + 1$  sommets vérifiant la propriété :

(P) Pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets, il existe au moins  $k$   $a, b$ -chemins sommets-internes-disjoints.

Le Théorème IV.18 entraîne qu'il faut au moins supprimer  $k$  sommets pour séparer toute paire de sommets non adjacents. Autrement dit, si (P) est vraie,  $X$  est  $k$ -connexe.

Réciproquement, si  $X$  est  $k$ -connexe, pour séparer une paire de sommets non adjacents, il faut supprimer au moins  $k$  sommets et, d'après le Théorème IV.18, il existe au moins  $k$  chemins sommets-internes-disjoints reliant les deux sommets de cette paire. Si  $a$  et  $b$  sont deux sommets adjacents, il est clair que  $X - ab$  est au moins  $k - 1$ -connexe et, en reproduisant le raisonnement qui précède sur  $X - ab$ , on conclut (en ajoutant le chemin  $ab$ ) que  $X$  contient au moins  $k$   $a, b$ -chemins sommets-internes-disjoints.  $\square$

### IV.3 Appariements (ou couplages) et Théorème de Hall

Il est habituel de formuler la question des appariements ou assignements sous la forme du problème de former des couples  $(f_i, g_j)$  quand  $\mathcal{F} := \{f_i, i \in I\}$  et  $\mathcal{G} := \{g_j, j \in G\}$  sont des ensembles, respectivement, de filles et de garçons sachant que ces appariements doivent respecter les préférences des filles : pour chaque fille  $f_i$ , il existe un ensemble  $\Pi(f_i) \subset \mathcal{G}$  de garçons avec qui elle accepte d'être appariée. La question est donc de savoir si l'on peut trouver une manière de former des couples

$$(\star \star \star) \quad (f_i, g_{k_i}), \quad i \in I \text{ et } \forall i \in I, \quad g_{k_i} \in \Pi(f_i)$$

Soit  $S$  un ensemble de  $s$  filles. Il est clair que si  $\left| \bigcup_{f \in S} \Pi(f) \right| < |S|$ , on ne pourra jamais trouver d'appariement satisfaisant  $(\star \star \star)$ .

Reprenons cela en terme de graphe biparti. La situation précédente est décrite par un graphe  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ -biparti  $X$  avec une arête  $fg$  si, et seulement si,  $g \in \Pi(f)$ . La question est alors de savoir s'il existe sur  $X$  un ensemble d'arêtes tel que tout sommet  $f$  soit adjacent à une arête et tel que tout sommet du graphe soit adjacent à au plus une arête.

**Définitions IV.23** *Soit  $X$  un graphe. Un couplage dans  $X$  est un ensemble  $\mathcal{M}$  d'arêtes<sup>2</sup> tel qu'on ne puisse pas trouver deux arêtes de  $\mathcal{M}$  incidentes à un même sommet.*

*Un ensemble de sommets  $S \subset V(X)$  est dit saturé par le couplage  $\mathcal{M}$  si tout sommet de  $S$  est adjacent à une (et, forcément, une seule) arête de  $\mathcal{M}$ .*

Si l'on revient au graphe  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ -biparti  $X$ , on cherche donc à savoir si ce graphe admet un couplage qui sature  $\mathcal{F}$ . On notera que  $\Pi(f)$  est le voisinage  $N_X(f)$  de  $f$  dans  $X$  et que l'on a déjà noté qu'une condition nécessaire est que

$$\forall S \subset \mathcal{F}, \quad |N(S)| \geq |S|$$

en notant  $N(S) = \bigcup_{x \in S} N(x)$ . Le Théorème de Hall exprime le fait que cette condition est aussi suffisante.

**Théorème IV.24 (Théorème de Hall)** *Un graphe  $A, B$ -biparti  $X$  admet un couplage qui sature  $A$  si, et seulement si,*

$$|N(S)| \geq |S|$$

*pour tout sous-ensemble  $S$  de  $A$ .*

2. La lettre  $\mathcal{M}$  est choisie à cause du terme équivalent en anglais : *matching*.

## IV.4 Exercices

**Exercice IV.1 :** Vrai ou Faux ?

- VF 1. Pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un graphe orienté  $X$  à  $n$  sommets qui possède au moins deux sommets qui ont soit le même degré interne, soit le même degré externe.
- VF 2. Un graphe orienté est fortement connexe si, et seulement si, pour toute partition  $\{A, B\}$  de l'ensemble de ses sommets,  $\vec{E}(A, B) \cup \vec{E}(B, A) \neq \emptyset$ .
- VF 3. Dans un graphe orienté, on peut toujours trouver une composante connexe forte  $S$  telle que  $d^+(S) = \emptyset$  et on peut toujours trouver une composante connexe forte  $T$  telle que  $d^-(T) = \emptyset$ .

**Exercice IV.2 :** En imposant à tout parcours dans un graphe orienté (chaîne, circuit, chemin, promenade...) d'être orienté (i.e., que toute succession d'arête  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  soit telle que  $e(\vec{e}_1) = o(\vec{e}_2)$ ), à quelle condition un graphe orienté est-il eulérien ? Prouvez-le.

**Exercice IV.3 :** Donner une preuve du Lemme IV.6.

**Exercice IV.4 :** Prouver le Théorème IV.24

**Exercice IV.5 :** Trouver le plus petit graphe  $X$  (en nombre de sommets) qui soit 3-régulier et de connexité 1. (indication : si  $x$  est un sommet qui déconnecte  $X$ , on montrera que chaque composante connexe de  $X - x$  possède au moins 4 sommets).

**Exercice IV.6 :** On rappelle que, pour  $n$  entier  $\geq 2$ , le « cube »  $Q_n$  est le graphe de sommets  $\{0, 1\}^n$  tel que deux  $n$ -uplets sont adjacents si, et seulement s'ils diffèrent en une unique coordonnée.

Déterminer  $\kappa(Q_n)$ .

