

L3 ESR 2018-19, S6

# UE option Graphes

Notes de cours

## Partie 2 : Graphes

Etienne Fieux

17 mars 2019



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Graphes : Introduction</b>	<b>1</b>
I.1	Premières notions . . . . .	1
I.2	Quelques graphes basiques . . . . .	3
I.3	Chaînes et cycles . . . . .	5
I.4	Connexité . . . . .	7
I.5	Exercices . . . . .	10
<b>II</b>	<b>Arbres</b>	<b>15</b>
II.1	Caractérisations . . . . .	15
II.2	Dénombrements . . . . .	18
II.3	Exercices . . . . .	22
<b>III</b>	<b>Parcours dans un graphe</b>	<b>26</b>
III.1	Parcours eulériens . . . . .	26
III.2	Parcours hamiltoniens . . . . .	29
III.3	Exercices . . . . .	31

# TABLE DES MATIÈRES

# Chapitre I

## Graphes : Introduction

### I.1 Premières notions

**Définitions I.1** Un **graphe** est un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble et  $E \subset \mathcal{P}_2(V)$ . Autrement dit, les éléments de  $E$  sont des paires  $\{x, y\}$  avec  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$ . Les éléments de  $V$  sont les **sommets** du graphe et les éléments de  $E$  en sont les **arêtes**. De plus, si  $|V| = n$ , on dira que  $X = (V, E)$  est un **graphe à  $n$  sommets**. Un **graphe fini** est un graphe qui a un nombre fini de sommets.

Si  $\{x, y\} \in E$ , on dira que  $x$  et  $y$  sont **adjacents** ou **voisins** et on le notera encore  $x \sim_X y$  ou simplement  $x \sim y$  s'il n'y a aucun risque de confusion. On dit également que l'arête  $\{x, y\}$  est **incidente** à  $x$  et à  $y$ , et que les sommets  $x$  et  $y$  sont les **extrémités** de l'arête  $\{x, y\}$ . Enfin, on écrira parfois simplement  $x \sim y$  pour désigner l'arête  $\{x, y\}$ , voire même (encore plus simplement)  $xy$  ou  $yx$ ...

Si  $X = (V, E)$  et  $v \in V$ ,  $N_X(v) := \{y, v \sim y\}$  est le **voisinage** de  $v$  et  $d(v) := |N_X(v)|$  est le **degré** de  $v$  (c'est le nombre de voisins de  $v$ ).

On écrira  $x \not\sim_X y$  ou  $x \not\sim y$  pour indiquer que deux sommets  $x$  et  $y$  ne sont pas voisins.

**Exemple I.1** Le graphe de Petersen a pour ensemble de sommets  $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$  et pour ensemble d'arêtes  $E = \{AD, DB, BE, EC, CA, AF, BG, CH, DI, EJ, JF, FG, GH, HI, IJ\}$

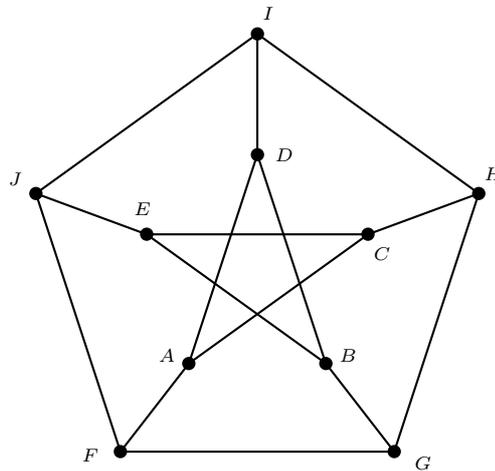


FIGURE I.1 – Graphe de Petersen

**Remarque I.2** La définition I.1 est celle d'un **graphe simple**, c'est-à-dire d'un graphe sans boucle (une boucle en un sommet  $v$  est donnée par une relation d'adjacence de  $v$  avec lui-même) et sans **multi-arêtes** (qui autorisent plusieurs adjacences entre deux mêmes sommets).

Par ailleurs, il s'agit de la définition d'un **graphe non orienté**. Dans un graphe orienté, les arêtes sont des couples  $(x, y)$  appelés **arcs** et on distingue donc les arcs  $(x, y)$  et  $(y, x)$ .

**Dans ces notes, sauf mention explicite contraire, les graphes considérés sont des graphes simples et finis.**

**Lemme I.3** Dans tout graphe à  $n \geq 2$  sommets, il existe au moins deux sommets de même degré.

PREUVE : Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les  $n \geq 2$  sommets du graphe et  $d_i = d(x_i)$  le degré du sommet  $x_i$  pour  $i \in [n]$ . Puisque le graphe est simple,  $d_i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  pour tout  $i$  de  $[n]$ .

- S’il existe au moins deux sommets de degré 0, alors le Lemme est vérifié.
- S’il existe un seul sommet (par exemple  $x_n$ ) de degré 0, alors les  $n-1$  sommets restants  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  sont de degré strictement positif (ils ne sont pas de degré 0) et strictement inférieur à  $n-1$  (puisque le graphe est simple et qu’ils ne sont pas voisins de  $x_n$ , ils ont au maximum  $n-2$  voisins). Autrement dit,  $d_i \in [n-2]$  pour  $i \in [n-1]$ . Par le Principe des tiroirs, il existe alors  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$  et  $d_i = d_j$ .
- S’il n’y a aucun sommet de degré 0,  $d_i \in [n-1]$  pour  $i \in [n]$ . Par le Principe des tiroirs, il existe alors  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$  et  $d_i = d_j$ .

□

**Remarque I.4** On insiste sur la nécessité que le graphe soit simple dans le Lemme I.3, comme le montrent les deux contre-exemples de la Figure I.2 si on admet les boucles ou si l’on admet les multi-arêtes :



FIGURE I.2 – Exemple de deux graphes (non simples) pour lesquels le Lemme I.3 ne s’applique pas

**Lemme I.5 (Lemme des poignées de mains)** Dans tout graphe  $X$ , on a l’égalité

$$\sum_{x \in V(X)} d(x) = 2|E(X)|$$

PREUVE : Lorsqu’on fait la somme des degrés des sommets du graphe  $X$ , chaque arête du graphe est comptée deux fois (une fois pour chaque sommet auquel elle est incidente). □

**Remarque I.6** Associé à une soirée de personnes, on définit un graphe avec autant de sommets que de personnes présentes et on dit que deux sommets sont adjacents si ces sommets correspondent à des personnes qui se sont serré la main. D’où le nom donné au Lemme I.5...

**Exemple I.2** Pour le graphe de Petersen (cf. Exemple I.1), il y a 10 sommets de degré 3 et 15 arêtes ; le Lemme des poignées de mains s’écrit :  $10 \times 3 = 2 \times 15$ .

**Corollaire I.7** Dans tout graphe  $X$ , le nombre de sommets de degré impair est pair.

PREUVE : Si le graphe  $X$  ne contient aucun sommet de degré impair, le résultat annoncé est vrai. Supposons à présent que  $X$  possède  $k$  sommets de degré impair ; notons-les  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Notons  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les  $n$  sommets de degré pair (dans le cas  $n = 0$ , cette liste est vide). On a donc d’après le Lemme des poignées de mains I.5 :

$$(d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_k)) + (d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_n)) = 2e$$

où  $e$  est le nombre d’arêtes de  $X$ . Puisque  $\deg u_i$  est pair pour tout  $i$ ,  $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_k) = 2e - (d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_n))$  est pair. Une somme de nombres impairs est paire si, et seulement si, elle comprend un nombre pairs de termes. Par conséquent,  $k$  est pair, i.e. le nombre de sommets de degré impair est pair. □

## I.2 Quelques graphes basiques

**Exemples I.2.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on rappelle que  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

$\Sigma_n = ([n], \emptyset)$  est appelé *stable*.

$K_n = ([n], \mathcal{P}_2([n]))$  est appelé *complet*.

$X = (V, E)$  est *biparti* s'il existe une partition  $A \sqcup B$  de l'ensemble  $V$  des sommets telle que les seules adjacences possibles sont de la forme  $a \sim b$  avec  $a \in A$  et  $b \in B$ . On dira alors que  $X$  est *A, B-biparti*. Ainsi,  $X$  est *A, B-biparti* si, et seulement si,  $\{A, B\}$  est une partition de  $V(X)$ ,  $\forall a, a' \in A, a \not\sim a'$  et  $\forall b, b' \in B, b \not\sim b'$ .

Si, de plus,  $A = [m], B = [n]$  et  $a \sim b$  pour tout  $a$  de  $A$  et tout  $b$  de  $B$ , le graphe biparti obtenu est noté  $K_{m,n}$  et est dit *biparti complet*.

Si  $n \geq 1, P_n = ([n], \{\{i, i+1\}, i \in [n-1]\})$  est appelé *chemin* (de longueur  $n-1$ ).

Si  $n \geq 3, C_n = ([n], \{\{i, i+1\}, \{1, n\}, i \in [n-1]\})$  est appelé *cycle* ( $n$  sommets).

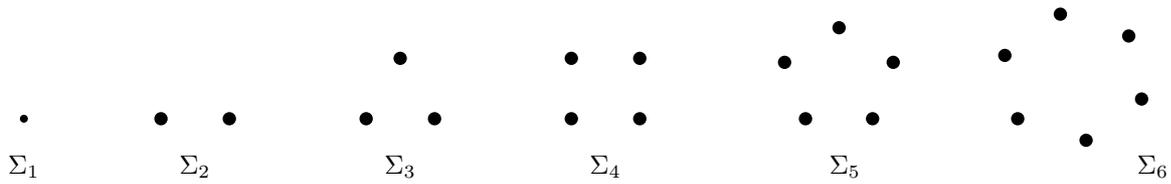


FIGURE I.3 – Les stables  $\Sigma_n, n \in [6]$

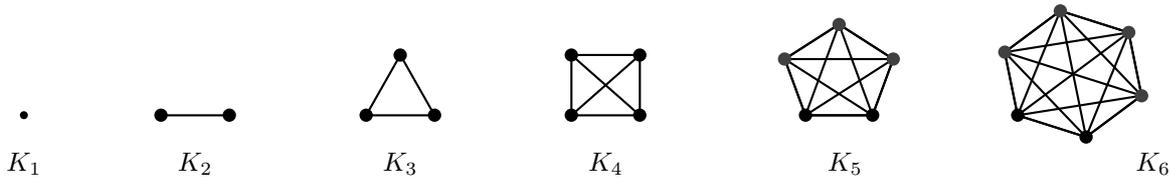


FIGURE I.4 – Les graphes complets  $K_n, n \in [6]$

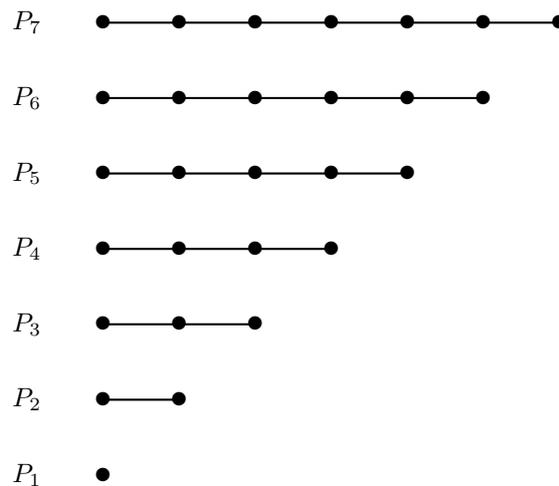


FIGURE I.5 – Les Chemins  $P_n, n \in [7]$

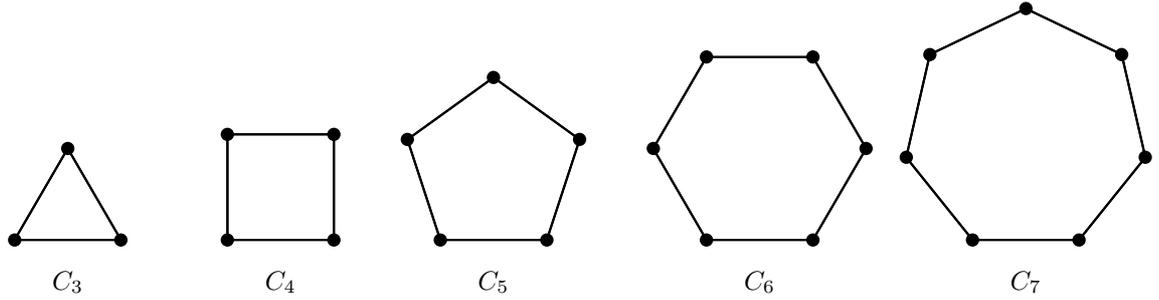


FIGURE I.6 – Les cycles  $C_n$ ,  $n \in \llbracket 3, 7 \rrbracket$

**Définition I.8** Deux graphes  $X = (V, E)$  et  $X' = (V', E')$  sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : V \rightarrow V'$  telle que

$$x \sim y \iff f(x) \sim f(y)$$

L'application  $f$  est alors appelée *isomorphisme* entre  $X$  et  $X'$  et ces deux graphes sont dits *isomorphes*, ce que l'on notera  $X \cong X'$ .

**Remarque I.9** La relation d'isomorphisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les graphes (la vérification est laissée en exercice). Ainsi, en général, tous les graphes que l'on considère sont considérés à isomorphisme près. Par exemple, dans la Figure I.7, on a trois illustrations « du » graphe complet  $K_4$  et dans la Figure I.8, on a quatre illustrations « du » graphe biparti complet  $K_{3,3}$ .

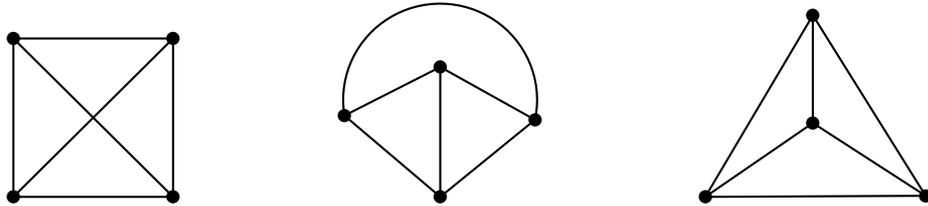


FIGURE I.7 – 3 graphes isomorphes à  $K_4$

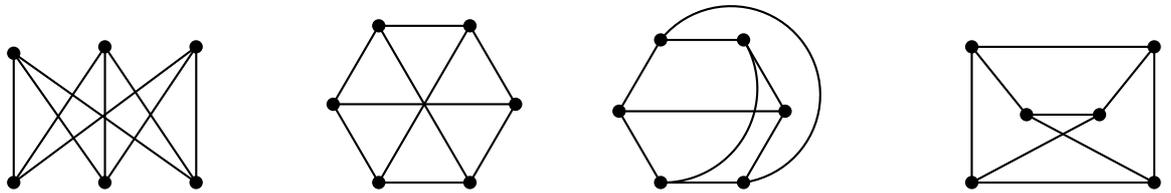


FIGURE I.8 – 4 graphes isomorphes à  $K_{3,3}$

**Proposition I.10** Si  $f$  est un isomorphisme entre les graphes  $X$  et  $X'$ , alors, pour tout sommet  $x$  de  $X$ ,  $d(x) = d(f(x))$  (i.e.,  $x$  et  $f(x)$  sont de même degré).

PREUVE : Soit  $f : V(X) \rightarrow V(X')$  un isomorphisme entre les graphes  $X$  et  $X'$  et soit  $x \in V(X)$  de degré  $k$ . Il faut montrer que  $d(f(x)) = k$ . Soient  $v_1, v_2, \dots, v_k$  les  $k$  voisins de  $x$  dans  $X$ . Alors,

$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  est de cardinal  $n$  puisque  $f$  est une bijection de  $V(X)$  sur  $V(X')$  et  $x' = f(x)$  est voisin de  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$  puisque  $f$  est un isomorphisme de graphes. De plus, ce sont les seuls voisins de  $x'$  car si  $v'$  était un autre voisin de  $x'$ , toujours parce que  $f$  est un isomorphisme de graphes, il existerait un sommet  $u$  tel que  $f(u) = v'$  et ce serait un autre voisin de  $x$ , ce qui est impossible puisque  $x$  n'a que  $k$  voisins. Ainsi,  $N_{X'}(f(x)) = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  est de cardinal  $k$  et  $d(f(x)) = k = d(x)$ .  
 $\square$

**Définitions I.11** On dira que le graphe  $Y$  est un *sous-graphe* du graphe  $X$  lorsque  $V(Y) \subset V(X)$  et  $E(Y) \subset E(X)$ . Si  $Y$  est un sous-graphe de  $X$ , on dira aussi que  $X$  *contient*  $Y$ .

On dira que le graphe  $Y$  est un *sous-graphe induit* du graphe  $X$  lorsque  $V(Y) \subset V(X)$  et  $E(Y) = E(X) \cap \mathcal{P}_2(V(Y))$ .

Si  $A \subset V(X)$ , le sous-graphe induit de  $X$  d'ensemble de sommets  $A$  sera appelé *sous-graphe de  $X$  induit par  $A$*  et noté  $X[A]$ .

La distinction entre *sous-graphe* et *sous-graphe induit* est extrêmement importante. Par définition, un sous-graphe  $Y$  de  $X$  est induit si, et seulement si, la condition suivante est réalisée :

$$\forall x, x' \in V(Y), \quad x \sim_Y x' \iff x \sim_X x'$$

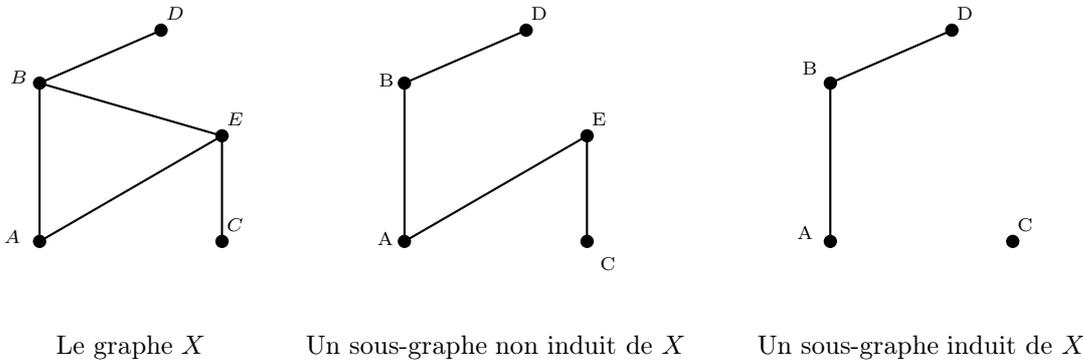


FIGURE I.9 – Un graphe et deux sous-graphes

**Terminologie**

Soit  $X$  un graphe et  $(P)$  une propriété de graphes (avoir au moins sommet de degré 3, avoir exactement 9 sommets, contenir un cycle, etc...).

On dira qu'un sous-graphe de  $Y$  de  $X$  est *sommet-maximal* pour la propriété  $(P)$  s'il n'existe pas de graphe  $Z$  vérifiant

- 1)  $Z$  est un sous – graphe de  $X$
- 2)  $Y$  est un sous – graphe de  $Z$
- 3)  $|V(Y)| < |V(Z)|$
- 4)  $Z$  vérifie la propriété  $(P)$

On dira qu'un sous-graphe de  $Y$  de  $X$  est *arête-maximal* pour la propriété  $(P)$  s'il n'existe pas de graphe  $Z$  vérifiant

- 1)  $Z$  est un sous – graphe de  $X$
- 2)  $Y$  est un sous – graphe de  $Z$
- 3)  $|E(Y)| < |E(Z)|$
- 4)  $Z$  vérifie la propriété  $(P)$

**I.3 Chaînes et cycles**

**Définitions I.12** Soit  $X = (V, E)$  un graphe.

Une *chaîne* dans  $X$  de *longueur*  $k$  (ou  $k$ -*chaîne*) dans  $X$  est une suite de  $(k + 1)$  sommets

$$c = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$$

telle que  $v_{i-1} \sim v_i$  pour  $i \in [k]$ . On peut aussi voir cette chaîne comme la suite des  $k$  arêtes  $\{v_0, v_1\}$ ,  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_2, v_3\}$ ,  $\dots$ ,  $\{v_{k-1}, v_k\}$ .

On dira que la chaîne  $c$  va de  $v_0$  à  $v_k$  ou que c'est une  $v_0, v_k$ -*chaîne*. Les sommets  $v_i$  avec  $i \neq 0, k$  seront appelés *sommets intérieurs* de la  $v_0, v_k$ -chaîne tandis que  $v_0$  et  $v_k$  seront appelés *extrémités* de la  $v_0, v_k$ -chaîne.

Une chaîne  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  avec  $v_0 = v_k$  sera dite *fermée* et sera également appelée *circuit*. Un  $k$ -circuit est une  $k$ -chaîne fermée.

Si  $a$  et  $b$  sont deux sommets distincts, un *chemin* de longueur  $k$  (ou  $k$ -chemin) reliant  $a$  à  $b$  est une  $k$ -chaîne sans répétition de sommet allant de  $a$  à  $b$ . Un  $a, b$ -chemin est un chemin qui va de  $a$  à  $b$ .

Un *cycle* de longueur  $k$  (ou  $k$ -cycle) dans  $X$  est un  $k$ -circuit  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  sans répétition de sommet autre que  $v_0 = v_k$ .

NOTA BENE : Il pourra arriver qu'une chaîne soit notée  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  au lieu de  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ .

**Remarque I.13** Un  $k$ -chemin dans  $X$  est un sous-graphe de  $X$  isomorphe à  $P_k$  et un  $k$ -cycle dans  $X$  est un sous-graphe de  $X$  isomorphe à  $C_k$ .

**Remarque I.14** La terminologie que l'on vient d'introduire n'est pas « stabilisée » et peut varier d'un auteur à un autre. Certains réserveront le terme de « circuit » pour les cycles dans les graphes orientés. Souvent, une chaîne sans répétition de sommets est dite « élémentaire », une chaîne sans répétition d'arêtes est dite « simple » et, dans certaines monographies, la notion de cycle désigne simplement une chaîne fermée simple.

**Lemme I.15** Soient  $a$  et  $b$  deux sommets distincts d'un graphe  $X$ . Toute  $a, b$ -chaîne contient un  $a, b$ -chemin.

PREUVE : Soit  $\sigma$  un  $a, b$ -chemin. On démontre ce résultat via un raisonnement par récurrence sur la longueur  $l$  de  $\sigma$  (on rappelle que  $l$  est le nombre d'arêtes qui composent  $\sigma$ ).

**Initialisation.** Si  $l = 0$ ,  $\sigma = (a)$ , i.e.  $a = b$  et  $\sigma$  est aussi un  $0$ -chemin.

**Hérédité** On suppose que toute  $a, b$ -chaîne de longueur  $l$  contient un  $a, b$ -chemin pour un  $l \geq 0$  et soit  $\sigma$  une  $a, b$ -chaîne de longueur  $l + 1$ . Si  $\sigma$  est sans répétition de sommet, alors  $\sigma$  est un  $a, b$ -chemin. Sinon, soit  $v$  un sommet qui apparaît au moins deux fois dans  $\sigma$ . La suppression dans  $\sigma$  de la suite d'arêtes entre deux occurrences successives de  $v$  produit une nouvelle  $a, b$ -chaîne de longueur  $l' \leq l$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $\sigma'$  contient un  $a, b$ -chemin qui est, *a fortiori*, aussi contenu dans  $\sigma$  (cf. illustration dans la Figure I.10).

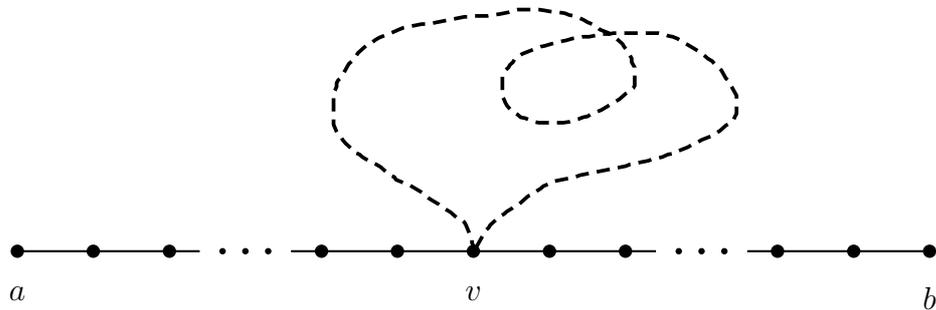


FIGURE I.10 – Toute  $a, b$ -chaîne contient un  $a, b$ -chemin

□

**Lemme I.16** Tout circuit de longueur impaire contient un cycle de longueur impaire.

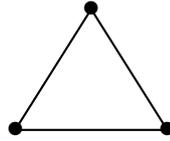


FIGURE I.11 –  $C_3$  est le seul circuit à 3 arêtes

PREUVE : Soit  $l$  la longueur d'un circuit impair. La valeur  $l = 1$  est interdite dans un graphe simple (puisque elle correspond à un sommet avec une boucle, soit un « cycle »  $C_1$ ). Pour  $l = 3$ , le seul circuit (simple : sans boucle ni arêtes multiples) à trois arêtes est le triangle ou cycle  $C_3$  (cf. Figure I.11).

On raisonne ensuite par récurrence : on suppose la propriété annoncée vraie pour tout circuit de longueur impaire  $l$  pour un  $l \geq 3$  impair. Et soit un circuit  $Z$  de longueur impaire  $l + 2$ . Le circuit  $Z$  s'écrit donc  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1}, v_0)$ . S'il n'y a aucune répétition de sommets dans le circuit  $Z$ , alors  $Z$  est un cycle. Sinon, il existe  $i, j \in [l + 1]$  tels que  $v_i = v_j$  avec  $i \neq j$ . En supposant  $i < j$ , on a donc la concaténation de deux cycles

$$\underbrace{(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)}_{\text{1er circuit } Z_1} \quad \text{et} \quad \underbrace{(v_j, v_{j+1}, \dots, v_{l+1}, v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)}_{\text{2d circuit } Z_2}$$

Si  $l_1 > 0$  (resp.  $l_2 > 0$ ) est la longueur du circuit  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ), alors  $l_1 + l_2 = l + 2$  est impair et, nécessairement,  $l_1$  et  $l_2$  ne sont pas de même parité. Si on suppose que c'est  $l_1$  qui est impair, alors  $l_1 \leq l$  et l'hypothèse de récurrence s'applique à  $Z_1$ . Ainsi,  $Z_1$  contient un cycle impair et c'est donc aussi vrai de  $Z$ . □

## I.4 Connexité

Soit  $X$  un graphe. La relation  $\mathcal{C}$  sur  $V(X)$  définie par

$$\forall a, b \in V(X), \quad a \mathcal{C} b \iff \text{il existe un } a, b\text{-chemin dans } X$$

est clairement une relation d'équivalence (pour tous les sommets  $a, b, c$  de  $X$ , ( $a$ ) est un 0-chemin de  $a$  à  $a$ , l'existence d'un  $a, b$ -chemin entraîne l'existence d'un  $b, a$ -chemin et l'existence d'un  $a, b$ -chemin  $\sigma$  et d'un  $b, c$ -chemin  $\sigma'$  entraîne l'existence d'un  $a, c$ -chemin par « concaténation » des chemins  $\sigma$  et  $\sigma'$  en  $b$ ).

**Définitions I.17** Pour tout graphe  $X$ , les sous-graphes de  $X$  induits par les classes d'équivalence de la relation  $\mathcal{C}$  : « être reliés par un chemin » sont appelés **composantes connexes** du graphe  $X$ .

Un graphe  $X$  ne possédant qu'une seule composante connexe est dit **connexe**.

**Remarques I.18** Un graphe est donc connexe si, quels que soit le choix de deux sommets  $a$  et  $b$  du graphe, on peut trouver dans le graphe un  $a, b$ -chemin. Toute composante connexe d'un graphe est elle-même un graphe connexe.

Notons que, d'après le Lemme I.15, la relation d'équivalence « être reliés par un chemin » est identique à la relation d'équivalence « être reliés par une chaîne ».

### Terminologie

Un ensemble  $A$  est dit **union disjointe** de ses sous-ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_k$  si  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  et si  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour tout les  $i, j \in [k]$  tels que  $1 \leq i < j \leq k$ .

Un graphe  $X$  sera dit **union sommet-disjointe** de ses sous-graphes  $X_1, X_2, \dots, X_k$  ou, plus simplement, **union disjointe** de ses sous-graphes  $X_1, X_2, \dots, X_k$  si  $V(X)$  est l'union disjointe de

$$V(X_1), V(X_2), \dots, V(X_k) \text{ et } E(X) = \bigcup_{i=1}^k E(X_i).$$

Un graphe  $X$  sera dit **union arête-disjointe** de ses sous-graphes  $X_1, X_2, \dots, X_k$  si  $V(X) = \bigcup_{i=1}^k V(X_i)$  et si  $E(X)$  est l'union disjointe de  $E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_k)$ .

**Remarque I.19** Une union disjointe (i.e., sommet-disjointe) est nécessairement arête-disjointe (puisque qu'il ne peut pas y avoir d'arête de  $X$  qui soit une arête de deux sous-graphes  $X_i$  et  $X_j$  distincts). La réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple de la Figure I.12.

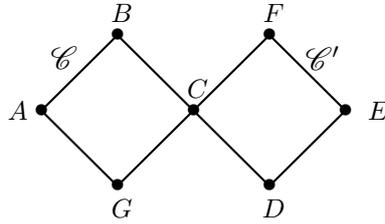


FIGURE I.12 – Un graphe à 7 sommets qui est l'union arête-disjointe des 4-cycles  $\mathcal{C} = (A, B, C, G, A)$  et  $\mathcal{C}' = (C, D, E, F, C)$  mais qui n'est pas l'union disjointe de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

De même, si  $X$  est l'union disjointe de ses sous-graphes  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , alors pour tout  $i, j \in [k]$  tels que  $1 \leq i < j \leq k$  et pour tout  $(x_i, x_j) \in X_i \times X_j$ ,  $x_i$  et  $x_j$  sont dans deux composantes connexes distinctes de  $X$ .

**Proposition-définition I.20 (Lemme de la propriété expansive)** Soit  $(P)$  une propriété pour les sommets de graphes. Si cette propriété est telle que, pour un sommet  $v$  d'un graphe  $X$ , le fait qu'elle soit vraie en  $v$  entraîne qu'elle soit vraie en chacun de ses voisins, alors elle est vraie pour tout sommet de la composante connexe de ce sommet.

Une propriété qui vérifie l'hypothèse du Lemme I.20 sera dite **expansive**.

PREUVE : Soit  $(P)$  une propriété expansive et soit  $v$  un sommet pour lequel la propriété est vraie. Soit à présent  $y$  dans la composante connexe de  $x$ . Il existe donc un chemin  $x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = y$ . Par une récurrence évidente, la propriété d'expansivité de  $(P)$  entraîne que  $(P)$  est vraie successivement pour  $v_1, v_2, \dots$ , jusqu'à  $v_k = y$ . La propriété  $(P)$  est donc vraie pour tout sommet de la composante connexe de  $x$ .  $\square$

**Proposition I.21** Soit  $X$  un graphe fini tel que  $d(v) \geq 2$  pour tout  $v \in V(X)$ .

- 1)  $X$  contient un cycle.
- 2)  $X$  est une union disjointe de cycles (i. e., chaque composante connexe de  $X$  est un cycle) si, et seulement si,  $d(v) = 2$  pour tout sommet  $v$ .

PREUVE : 1) Soit  $\sigma$  un chemin maximal de  $X$  (i.e., un sous-graphe de  $X$  sommet-maximal pour la propriété d'être un chemin) ; notons-le  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$ . Puisque  $d(v_k) \geq 2$ , il existe  $u$  voisin de  $v_k$  et distinct de  $v_{k-1}$ . Par maximalité de  $\sigma$ , il existe forcément un  $i$  dans  $[k-2]$  tel que  $u = v_i$  et le graphe  $X$  contient donc le cycle  $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_i)$  (cf. illustration dans la Figure I.13).

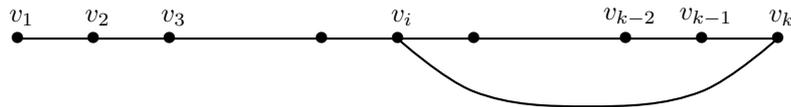


FIGURE I.13 – Il existe un  $i$  dans  $[k-2]$  tel que  $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_i)$  soit un cycle.

2)

$\implies$  : Si  $X$  est une union disjointe de cycles, cela signifie que chaque sommet est sur un unique cycle et est donc de degré pair.

$\Leftarrow$  : Si tout sommet est de degré 2, on sait d'après 1) que toute composante connexe  $Y$  de  $X$  contient un cycle  $C$  et soit  $v$  un sommet de  $C$ . Puisque  $d(v) = 2$ ,  $N_X(v) = N_C(v)$  et les voisins de  $v$  sont donc sur  $C$ . Ceci montre que la propriété « appartenir à  $C$  » est expansive, i.e. que  $Y = C$ , d'après le Lemme de la propriété expansive I.20. □

**Théorème I.22** *Un graphe est biparti si, et seulement si, il ne contient pas de cycle de longueur impaire.*

PREUVE :

$\Rightarrow$  : Soit  $X = (V(X), E(X))$  un graphe  $A, B$ -biparti (i.e.  $V(X) = A \sqcup B$  est une partition de  $V(X)$  telle que si  $\forall a, a' \in A, a \neq a'$  et  $\forall b, b' \in B, b \neq b'$ ) et soit  $C$  un  $k$ -cycle de  $X$  avec  $x_0 \in V(C)$ . On peut supposer que  $x_0 \in A$ . Si on note  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = x_0$  les sommets successifs du cycle  $C$ , la caractéristique biparti de  $X$  implique que  $x_1 \in B, x_2 \in A, x_3 \in B$ , etc... Par un raisonnement par récurrence évident, on a donc nécessairement  $x_{2i} \in A$  et  $x_{2i+1} \in B$  pour tout entier  $i$  tel que les sommets  $x_{2i}$  ou  $x_{2i+1}$  soient définis. En particulier,  $x_k = x_0 \in A$  entraîne que  $k$  est pair, i.e. que  $C$  est un cycle pair. Ceci montre bien que si  $X$  est biparti, il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

$\Leftarrow$  : Supposons que  $X$  soit un graphe qui ne contient aucun cycle de longueur impaire et montrons que  $X$  est biparti. On va plus précisément montrer que chaque composante connexe de  $X$  est bipartite (et il est clair que si toutes les composantes connexes d'un graphe sont biparties, alors le graphe est aussi biparti). Soit  $x$  un sommet de  $X$  et  $Y$  la composante connexe de  $x$ . On suppose que  $x$  n'est pas isolé dans  $Y$  (sinon  $Y$  est un cas « dégénéré » de graphe biparti). Pour tout sommet  $v$  de  $Y$ , puisque  $Y$  est connexe, il existe au moins un  $x, v$ -chemin dans  $Y$  et on note  $m(v)$  la longueur minimale d'un  $x, v$ -chemin. Montrons alors que les ensembles

$$A_x := \{v \in V(Y), m(v) \text{ est paire}\} \quad \text{et} \quad B_x := \{v \in V(X), m(v) \text{ est impaire}\}$$

sont tels que, quels que soient  $a, a'$  pris dans  $A_x, a \neq a'$  et quels que soient  $b, b'$  pris dans  $B_x, b \neq b'$  (ce qui montrera que  $Y$  est  $A_x, B_x$ -biparti). Raisonnons par l'absurde. Soient  $a$  et  $a'$  deux sommets distincts de  $A_x$ ; supposons qu'ils soient voisins (i.e. il existe une arête  $aa'$ ). En la complétant par un  $x, a$ -chemin et par un  $a', x$ -chemin tous les deux de longueur paire, l'arête  $aa'$  créerait un circuit de longueur impaire  $x, \dots, a, a', \dots, x$  (cf. Figure I.14).

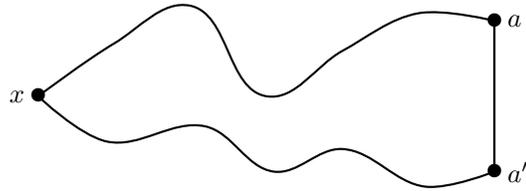


FIGURE I.14 – L'arête  $aa'$  crée un circuit de longueur impaire

Mais, d'après le Lemme I.16, cela signifierait que  $Y$  (et donc  $X$ ) contiendrait un cycle impair, ce qui est impossible. Par conséquent,  $a$  et  $a'$  ne peuvent pas être voisins. Par le même raisonnement, deux sommets distincts de  $B_x$  ne peuvent pas être voisins et  $Y$  est  $A_x, B_x$ -biparti. □

Une arête  $e$  d'un graphe connexe  $X = (V, E)$  est appelée **pont** ou **isthme** si  $X - e$  n'est pas connexe (où  $X - e$  est le graphe obtenu à partir de  $X$  en enlevant après suppression de l'arête  $e$ ; autrement dit,  $V(X - e) = V(X)$  et  $E(X - e) = E(X) \setminus \{e\}$ ).

**Proposition I.23** *Soit  $X$  un graphe connexe. Une arête de  $X$  est un pont si, et seulement si, elle ne se trouve sur aucun cycle de  $X$ .*

PREUVE :

$\Leftarrow$  : On va montrer la contraposée. Soit ainsi  $e = \{a, b\}$  une arête qui n'est pas un pont. Cela signifie que  $X - e$  est connexe et qu'il existe un  $a, b$ -chemin  $\sigma$  dans  $X - e$ . En rajoutant l'arête  $e$  au chemin  $\sigma$ , on obtient un cycle de  $X$  sur lequel se trouve l'arête  $e$ .

$\implies$  : Ici également, on va montrer la contraposée. On suppose donc que l'arête  $e$  est sur un cycle  $C$  et il faut montrer que  $X - e$  est connexe. Soient  $a, b \in V(X - e) = V(X)$ . Comme  $X$  est connexe, il existe un  $a, b$ -chemin  $\sigma$  dans  $X$ . Si  $e$  n'est pas une arête de  $\sigma$ , alors  $\sigma$  est aussi un  $a, b$ -chemin dans  $X - e$ . Sinon,

$$\sigma = (y_0, y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \text{ avec } y_0 = a, y_n = b \text{ et } e = \{y_{i-1}, y_i\} \text{ pour un } i \in [n]$$

On peut supposer que le cycle  $C$  s'écrit  $(x_0, x_1, \dots, x_k)$  avec  $x_k = x_0$ ,  $e = \{x_0, x_1\}$  et  $(x_0, x_1) = (y_i, y_{i-1})$ . Il suffit alors d'enlever l'arête  $e$  dans  $\sigma$  et d'ajouter le chemin  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  de  $x_1 = y_{i-1}$  à  $x_k = y_i$  pour obtenir un  $a, b$ -chemin dans  $X - e$  (cf. illustration dans la Figure I.15).

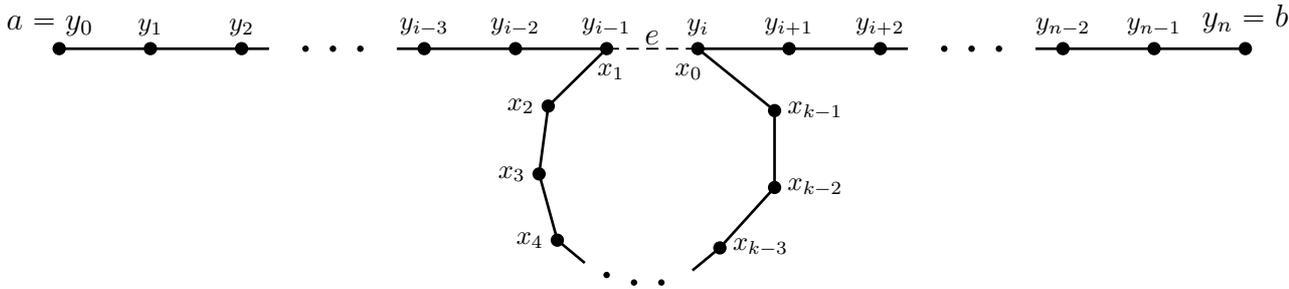


FIGURE I.15 – L'arête  $e = \{y_{i-1}, y_i\}$  a été enlevée.

□

## I.5 Exercices

### Exercice I.1 : Vrai ou Faux ?

Justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux.

- VF 1. Il est possible d'organiser une compétition avec 7 équipes de façon que chaque équipe joue exactement contre trois autres équipes.
- VF 2. Pour tout entier  $n \geq 3$ , on peut trouver un graphe 3-régulier (i.e., un graphe dont tous les sommets sont de degré 3) à  $n$  sommets.
- VF 3. La réciproque de la Proposition I.10 est vraie, c'est-à-dire : si  $f : V(X) \rightarrow V(Y)$  est une bijection telle que  $x$  et  $f(x)$  ont même degré pour tout sommet  $x$  de  $X$ , alors  $X$  et  $Y$  sont des graphes isomorphes.
- VF 4. Dans une soirée à au moins deux personnes, il y a toujours au moins deux personnes qui ont serré un même nombre de mains.

### Exercice I.2 : Les nombres de Ramsey

1. a) Six pays sont en discussion à propos de deux sujets conflictuels et les discussions en sont au stade des échanges bilatéraux, organisés de la manière suivante : toute paire  $\{A, B\}$  de pays donne lieu à une rencontre (entre les pays  $A$  et  $B$ ) qui porte sur un seul des deux sujets conflictuels. Montrer que l'on peut trouver un ensemble de trois pays qui auront discuté (dans les rencontres bilatérales restreintes à ces trois pays) du même sujet.

b) A présent, on considère une organisation composée de 17 pays qui négocient autour de trois sujets conflictuels. Comme précédemment, les discussions progressent par échanges bilatéraux, organisés sur le même mode. Montrer que l'on peut trouver un ensemble de trois pays qui auront discuté (dans les rencontres bilatérales restreintes à ces trois pays) du même sujet. (indication : pour un pays fixé, on pourra appliquer le lemme des tiroirs au décompte de ses échanges bilatéraux).

2. (nombres de Ramsey)  $R(k, l)$  est le plus petit entier tel que tout graphe à  $R(k, l)$  sommets contient au moins une clique à  $k$  sommets (ou  $k$ -clique) ou un stable à  $l$  sommets (ou  $l$ -stable).

- a) Dans la question 1.a), on a montré que  $R(3, 3) \leq 6$ . Utiliser le cycle  $C_5$  pour conclure que  $R(3, 3) = 6$ .
- b) Pour tous les entiers  $k, l > 0$ , montrer que  $R(1, l) = R(k, 1) = 1$ ,  $R(2, l) = R(l, 2) = l$  et (par passage au complémentaire)  $R(k, l) = R(l, k)$ .
- c) Pour tous les entiers  $k, l > 0$ , montrer que  $R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$ . En déduire une autre preuve de  $R(3, 3) \leq 6$ .
- d) Pour tous les entiers  $k, l > 0$ , montrer que  $R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1) - 1$  si  $R(k - 1, l)$  et  $R(k, l - 1)$  sont pairs. En s'aidant du graphe de Wagner (Figure Fig. I.16), calculer  $R(3, 4)$ .

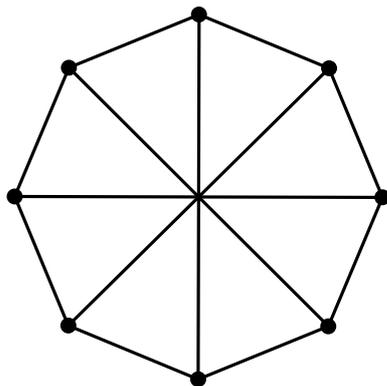


FIGURE I.16 – Le graphe de wagner

**Exercice I.3 : Des problèmes de rencontres**

1. Dans cette réunion à  $n$  personnes où chaque personne a au moins un ami (l'amitié étant une relation réciproque), on ne peut pas former de groupes d'au moins trois personnes comprenant exactement deux paires d'amis. Montrer que chaque personne est l'amie de toutes les autres personnes.

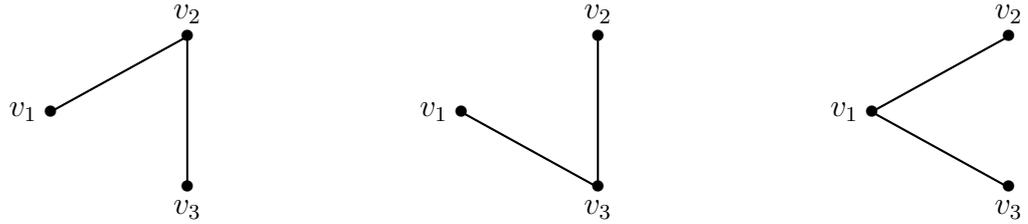
Indication : Pour  $n \geq 4$ , supposer que deux personnes  $A$  et  $B$  ne sont pas amies et montrer qu'il existe alors des personnes  $C$  et  $D$  telles que le sous-graphe induit par  $\{A, B, C, D\}$  contredit l'hypothèse faite sur la relation d'amitié.

2. M. et Mme Dupond ont invité quatre couples. Certains sont des amis de M. Dupond, d'autres de Mme Dupont. Quand les invités arrivent, certaines personnes se serrent la main, d'autres pas et il va de soi qu'on ne serre pas la main entre époux, ni à soi-même. Au moment de commencer le repas, tout le monde est assis autour de la table sauf M. Dupont qui, en hôte très attentif, se fait la réflexion suivante : « Tiens, c'est amusant, si je ne me compte pas, il n'y a pas deux personnes qui ont serré le même nombre de mains. »

Combien Mme Dupont a-t'elle serré de mains ?

**Exercice I.4 : Graphes étiquetés**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on se donne un ensemble  $V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de cardinal  $n$  et on appelle  $\mathcal{G}_n$  l'ensemble des graphes (simples) dont  $V_n$  est l'ensemble des sommets ; autrement dit,  $\mathcal{G}_n$  est l'ensemble des graphes simples à  $n$  sommets et on introduit l'ensemble  $V_n$  uniquement pour souligner que l'on compte tous les graphes (simples). Par exemple, pour  $n = 3$ , les trois graphes suivants sont distincts :



1. Déterminer le cardinal de  $\mathcal{G}_n$ .

2. On note  $\mathcal{G}_n^0$  le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_n$  formé des graphes dont tous les sommets sont de degré pair. En utilisant le fait que (Corollaire I.7), dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair, déterminer le cardinal de  $\mathcal{G}_n^0$ .

**Exercice I.5 : Vrai ou Faux ?**

Justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux.

- VF 1. Si  $d(x) \geq k$  pour tout sommet  $x$  de  $X$ , alors  $X$  contient un chemin de longueur au moins  $k$ .
- VF 2. Si  $d(x) \geq k \geq 2$  pour tout sommet  $x$  de  $X$ , alors  $X$  contient un cycle de longueur au moins  $k + 1$ .
- VF 3. Si  $|V(X)| = |E(X)| \geq 3$ , alors  $X$  contient un cycle.
- VF 4. Un graphe à  $n$  sommets tel que tout sommet soit de degré au moins  $\geq (n - 1)/2$  est nécessairement connexe.

**Exercice I.6 : Matrice d'adjacence**

Soit  $X = (V, E)$  un graphe à  $n$  sommets que l'on notera  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . La matrice d'adjacence  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \sim v_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que  $a_{ij}^{(k)}$  est le nombre de  $k$ -chaînes de  $X$  qui vont de  $v_i$  à  $v_j$ .
- 2. Par définition, la distance  $d_X(v, v')$  entre deux sommets  $v$  et  $v'$  de  $X$  est la longueur du plus court chemin de  $X$  allant de  $v$  à  $v'$ . Montrer que  $d_X(v, v') = \min\{k, k \geq 0, a_{ij}^{(k)} \neq 0\}$ .
- 3. Montre que  $X$  est biparti si, et seulement si, pour tout entier impair positif  $k$ , la diagonale de  $A^k$  est nulle.

**Exercice I.7 : Graphes sans triangle : théorème de Mantel**

Soit  $X = (V, E)$  un graphe fini qui ne contient pas de triangle (i.e. pas de sous-graphe isomorphe à  $K_3$ ).

- 1. On suppose que  $X$  possède deux sommets adjacents  $x$  et  $y$ . On pose  $\alpha(x) = |N_{X-y}(x)|$  et  $\alpha(y) = |N_{X-x}(y)|$  (où  $X - x := X[V(X) \setminus \{x\}]$  est le sous-graphe induit par  $V(X) \setminus \{x\}$ ). Montrer que  $\alpha(x) + \alpha(y) \leq |V| - 2$ .
- 2. En déduire que  $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$  (indication : raisonner par récurrence sur le nombre de sommets).
- 3. Trouver un graphe sans triangle pour lequel on a l'égalité  $|E| = \frac{|V|^2}{4}$  (indication : chercher un graphe biparti complet).

**Exercice I.8 : Coloration des sommets d'un graphe et graphes de Mycielski**

Une coloration d'un graphe  $X$  est l'attribution d'une couleur à chaque sommet de  $X$ . Les couleurs sont souvent remplacées par des entiers strictement positifs et une coloration de  $X$  est donc simplement une application  $c : V(X) \rightarrow [k]$  pour un certain entier strictement positif  $k$ . Une telle coloration est appelée  $k$ -coloration de  $X$ . Une coloration est dite propre si elle attribue des couleurs distinctes à toute paire de sommets adjacents :

$$a \sim b \implies c(a) \neq c(b)$$

Le nombre minimal de couleurs nécessaire pour obtenir une coloration propre de  $G$  est appelé nombre chromatique de  $X$  et noté  $\chi(X)$ .

1. a) Calculer  $\chi(K_n)$  où  $K_n$  est le graphe complet à  $n$  sommets (graphe qui possède toutes les arêtes sauf les boucles). b) Que peut-on dire de  $\chi(X)$  si  $X$  contient un  $K_n$  comme sous-graphe ?

2. Tous les cycles ont-ils le même nombre chromatique ?

3. (construction de Mycielski) Soit  $X = (V(X), E(X))$  un graphe. On construit un nouveau graphe  $M(X)$  de la manière suivante :  $V(M(X)) = V(X) \times \{0, 1\} \cup \{z\}$  (où  $z$  est un nouveau sommet) avec les adjacences :  $(x, 0) \sim (x', 0)$  si  $x \sim_X x'$ ,  $(x, 1) \sim_{M(X)} (x', 0)$  si  $x \sim_X x'$  et  $(x, 1) \sim_{M(X)} z$  pour tout  $x$  de  $V(X)$ .

a) dessiner  $M(C_4)$  et  $M(C_5)$ .

b) Montrer que  $M(X)$  ne contient pas de triangles (ou de  $K_3$ ) si  $X$  ne contient pas de triangles.

c) Montrer que  $\chi(M(X)) = \chi(X) + 1$

d) En déduire qu'il existe des graphes sans triangle de nombre chromatique aussi grand que l'on veut.

**Exercice I.9 : Coloration des sommets d'un graphe et graphes de Kneser**

Soit  $k, n$  des entiers positifs,  $n \geq 2k$  et  $X = [n]$ . On considère le graphe  $KG(n, k)$  dont l'ensemble des sommets  $V(KG(n, k))$  est formé de tous les sous-ensembles à  $k$  éléments de  $X$  (autrement dit  $V(KG(n, k)) = \mathcal{P}_k([n])$ ), les arêtes étant définies par la relation  $A \sim B$  si  $A \cap B = \emptyset$  pour tout couple  $(A, B)$  de sous-ensembles à  $k$  éléments de  $X$ .

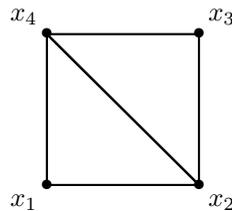
1. Dessiner  $K(5, 2)$ .

2. (graphes de Kneser) Montrer que  $\chi(KG(n, k)) \leq n - 2k + 2$  (indication : partitionner  $V(KG(n, k))$  en considérant les ensembles de sommets formés de tous les sous-ensembles à  $k$  éléments de  $X$  qui contiennent 1, puis qui contiennent 2 et ainsi de suite... tant que l'on peut!).

**Exercice I.10 : Autre problème sur les colorations**

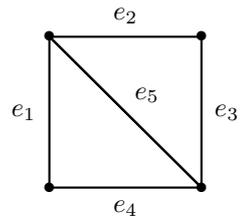
1. Rappeler l'énoncé du principe d'inclusion-exclusion.

2. Pour tout entier  $k$  strictement positif, on note  $N_k$  le nombre de  $k$ -coloriages propres du graphe  $X$  suivant :



a. Calculer  $N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$ .

b. On nomme les arêtes de  $X$  comme indiqué sur ce dessin :



et on note  $A_i$  l'ensemble des  $k$ -coloriages de  $X$  pour lesquels les deux sommets de l'arête  $e_i$  sont de la même couleur. Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour trouver une formule générale pour  $N_k$ ,  $k$  entier  $> 0$ .

# Chapitre II

## Arbres

### II.1 Caractérisations

Un graphe est dit **acyclique** s'il ne contient aucun cycle (i.e., s'il ne possède pas de sous-graphe isomorphe à un cycle).

**Définitions II.1** Une **arbre** est un graphe connexe acyclique. Une **forêt** est un graphe acyclique.

**Définition II.2** Une **feuille** ou **sommet pendent** est un sommet de degré 1.

**Lemme II.3** Tout arbre fini à au moins 2 sommets admet au moins deux feuilles.

PREUVE : Soit  $P$  un  $a, b$ -chemin de longueur maximale (un tel chemin existe puisque l'ensemble des chemins est non vide et le graphe est fini). Montrons que  $d(a) = 1$  (il en ira de même pour  $d(b)$ ).

Il existe un sommet  $x$  tel que  $a \sim x$  (sinon  $a$  est isolé et le graphe n'est pas connexe). Pour tout sommet  $y$  de  $P$  distinct de  $x$  (si un tel sommet n'existe pas, alors  $x = b$ ,  $P$  se réduit à  $a \sim b$  et  $d(a) = d(b) = 1$ ), on a  $a \not\sim y$  car sinon on obtiendrait un cycle via le chemin de  $a$  à  $y$  (sous-chemin de  $P$ ) complété en un cycle avec  $y \sim a$ . Et, pour tout sommet  $y'$  hors de  $P$ , on a  $a \not\sim y'$  car sinon  $P$  ne serait pas maximal (puisqu'on pourrait le prolonger avec  $a \sim y'$ ). On conclut donc que  $d(a) = 1$ .

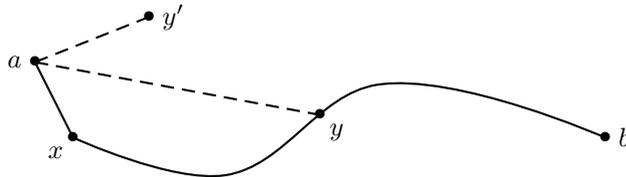


FIGURE II.1 – Dans un arbre, les extrémités de tout chemin maximal sont des feuilles. Les liaisons en pointillés correspondent à des arêtes qui ne peuvent pas exister.

□

**Remarque II.4** On a en fait montré (cf. illustration dans la Figure II.1) que, dans un arbre, les extrémités de tout chemin maximal sont nécessairement des feuilles (ou sommets pendants). La réciproque est bien entendu vraie : tout chemin dont les extrémités sont des feuilles est maximal.

On rappelle que, pour tout sommet  $x$  d'un graphe  $X$ ,  $X - x = X[V(X) \setminus \{x\}]$  est le sous-graphe induit par  $V(X) \setminus \{x\}$ .

**Lemme II.5** Soit  $X$  un graphe et  $x$  une feuille de  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $X$  est un arbre
- ii)  $X - x$  est un arbre

PREUVE :

$i) \implies ii)$  : Si  $X$  est acyclique, *a fortiori*,  $X - x$  l'est aussi. Montrons que  $X - x$  est connexe. Soient  $a, b$  deux sommets de  $X - x$ . Comme  $X$  est connexe, il existe un  $a, b$ -chemin  $P$  dans  $X$ . Tous les sommets intérieurs à un chemin étant de degré 2, ils sont distincts de  $x$  et ils sont donc aussi des sommets de  $X - x$ . Par conséquent,  $P$  est un  $a, b$ -chemin dans  $X - x$  et  $X - x$  est connexe.

$ii) \implies i)$  : Pour montrer que  $X$  est acyclique, raisonnons par l'absurde et supposons que  $X$  contienne un cycle  $C = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  avec  $x_1 \sim x_k$ . On note alors que la feuille  $x$  ne peut pas être un sommet de  $C$  (car tout sommet d'un cycle est de degré au moins 2), par conséquent  $C$  serait un cycle de  $X - x$ , ce qui est impossible (puisque  $X - x$  est un arbre). Donc  $X$  est acyclique. Montrons que  $X$  est connexe. Soient  $a, b$  deux sommets de  $X$ . Si  $a$  et  $b$  sont tous les deux distincts de  $x$ , il existe un  $a, b$ -chemin dans  $X - x$  (et donc dans  $X$ ) par connexité de  $X - x$ . Si  $a = x$  et  $b \neq x$ , soit  $u$  l'unique voisin de  $x$ ; par connexité de  $X - x$ , il existe un  $u, b$ -chemin dans  $X - x$  qui se prolonge en un  $a, b$ -chemin avec  $a \sim u$ . Et on raisonne de la même façon si  $a \neq x$  et  $b = x$ . □

**Remarque II.6** *On notera que l'on a en fait montré que, sous l'hypothèse  $d(x) = 1$ , on a les deux équivalences :*

- a)  $X - x$  acyclique  $\iff X$  acyclique
- b)  $X - x$  connexe  $\iff X$  connexe

**Théorème II.7** *Soit  $X = (V(X), E(X))$  un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $X$  est un arbre
- ii)  $X$  est connexe et  $|E(X)| = |V(X)| - 1$ .
- iii)  $X$  est acyclique et  $|E(X)| = |V(X)| - 1$ .
- iv) (graphe acyclique maximal)  $X$  est acyclique et tout graphe obtenu en ajoutant une adjacence entre deux sommets non adjacents n'est pas acyclique.
- v) (graphe connexe minimal)  $X$  est connexe et tout graphe obtenu en supprimant une arête n'est pas connexe.
- vi) Pour tous les sommets  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe un unique chemin allant de  $x$  à  $y$ .

PREUVE : Si  $X$  se réduit à un sommet isolé,  $|V(X)| = 1$ ,  $|E(X)| = 0$  et toutes les équivalences sont triviales. Cela permettra de raisonner par récurrence sur  $n$ , le nombre de sommets de  $X$ . On suppose donc (hypothèse de récurrence) que toutes les équivalences sont vraies jusqu'à un certain  $n \geq 1$  et on se donne un graphe  $X$  à  $n + 1$  sommets.

On va commencer par montrer que l'assertion i) implique toutes les autres.

D'après le Lemme II.3, on peut choisir un sommet  $x$  de  $X$  de degré 1 ( $x$  est une feuille de l'arbre). On note que, puisque  $d(x) = 1$ , on a les égalités

$$(\star\star) \quad |V(X - x)| = |V(X)| - 1 \quad \text{et} \quad |E(X - x)| = |E(X)| - 1$$

Par ailleurs, d'après le Lemme II.5, on sait que  $X - x$  est un arbre (ce qui permet de faire jouer l'hypothèse de récurrence sur  $X - x$ ).

$i) \implies ii)$  et  $i) \implies iii)$  : Il suffit de vérifier que  $|E(X)| = |V(X)| - 1$  et cette égalité découle de  $|E(X - x)| = |V(X - x)| - 1$  (hypothèse de récurrence) et de  $(\star\star)$ .

$i) \implies iv)$  : Il reste à montrer que tout graphe obtenu en ajoutant une adjacence entre deux sommets non adjacents n'est pas acyclique. Ici, on va raisonner directement, sans récurrence. Soit donc  $a \sim b$  une nouvelle arête (qui n'est pas dans  $E(X)$ ). Comme  $X$  est connexe, il existe un  $a, b$ -chemin dans  $X$  et l'ajout d'une arête  $a \sim b$  crée donc un cycle.

$i) \implies v)$  : Il reste à montrer que tout graphe obtenu en supprimant une arête n'est pas connexe. Soit donc  $\{a, b\}$  une arête de  $X$  que l'on enlève. Si  $\{a, b\}$  est une arête de  $X - x$  (i.e. si  $a \sim b$  avec  $a$  et  $b$  distincts de  $x$ ) alors l'hypothèse de récurrence nous dit que  $(X - x) - \{\{a, b\}\}$  n'est pas connexe. Et on en déduit que  $X - \{\{a, b\}\}$  n'est pas connexe (car le rajout d'un sommet de degré 1 ne peut pas changer la connexité d'un graphe puisqu'un sommet de degré 1 ne peut pas être le sommet intérieur d'un chemin). Sinon, c'est par exemple (et sans perte de généralité), que  $a = x$  et  $b \neq x$  est l'unique voisin de  $x$ . Dans ce cas, le graphe  $X - \{\{a, b\}\} = X - \{\{x, b\}\}$  n'est pas connexe car  $x$  en est un sommet isolé.

$i) \implies vi)$  : Soient  $a$  et  $b$  deux sommets de  $X$ . Si  $x \notin \{a, b\}$ , l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un unique  $a, b$ -chemin dans  $X - x$ . Ce chemin est bien entendu un  $a, b$ -chemin dans  $X$  et il n'y en a pas d'autre (car le rajout de  $x$  ne modifie rien puisqu'il ne peut être sommet intérieur d'aucun chemin). Si  $x \in \{a, b\}$ , on suppose par exemple (et sans perte de généralité) que  $a = x$  et  $b \neq x$  et soit  $u$  l'unique voisin de  $x$ . Il existe alors un unique  $u, b$ -chemin dans  $X - x$  (d'après l'hypothèse de récurrence) qui se prolonge en un  $x, b$ -chemin avec  $a \sim u$ ; l'unicité du  $u, b$ -chemin entraîne celle du  $x, b$ -chemin.

$ii) \implies i)$  et  $iii) \implies i)$  : Puisque  $|E(X)| = |V(X)| - 1$ , le Lemme I.5 nous dit que

$$\sum_{x \in V(X)} d(x) = 2|E(X)| = 2|V(X)| - 2$$

On en déduit (application du principe des tiroirs) qu'il existe au moins un sommet  $x$  tel que  $d(x) < 2$  et donc  $d(x) = 1$  (sinon  $x$  serait isolé et  $X$  non connexe). Ainsi,  $x$  est un sommet pendant de  $X$  et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $X - x$  (en utilisant (\*\*\*) et la Remarque II.6.b) dans l'hypothèse  $ii)$  et en utilisant (\*\*\*) et la Remarque II.6.a) dans l'hypothèse  $iii)$ ). Ainsi  $X - x$  est un arbre et on conclut que  $X$  est un arbre grâce au Lemme II.5.

Les trois dernières implications seront directes (sans recours à l'hypothèse de récurrence).

$iv) \implies i)$  : Il reste à montrer que  $X$  est connexe. Soient  $a$  et  $b$  deux sommets de  $X$ . Si  $a \sim b$ , alors l'arête  $\{a, b\}$  est un  $a, b$ -chemin de longueur 1. Si  $a \not\sim b$ , d'après  $iv)$ , le rajout de l'arête  $a \sim b$  crée un cycle; cela veut dire qu'il existe déjà un chemin de  $a$  à  $b$  dans  $X$ . Ainsi,  $X$  est connexe.

$v) \implies i)$  : (sans récurrence) Il reste à montrer que  $X$  est acyclique. Supposons qu'il existe un cycle  $C$  dans  $X$ . D'après la Proposition I.23, aucune arête  $a \sim b$  de ce cycle n'est un pont; cela signifie que  $C - \{a, b\}$  est connexe pour toute arête  $a \sim b$  de  $C$  et contredit  $v)$ ; donc  $X$  est acyclique.

$vi) \implies i)$  : (sans récurrence) Il reste à montrer que  $X$  est acyclique. Supposons qu'il existe un cycle  $C$  dans  $X$ . Pour tous sommets  $a$  et  $b$  de  $C$ , il existe alors deux  $a, b$ -chemins distincts. Mais cela contredit  $vi)$ ; donc  $X$  est acyclique.

□

**Remarque II.8** Si  $X$  est une forêt, on a donc  $|E(X)| \leq |V(X)| - 1$ ; avec égalité si, et seulement si,  $X$  est connexe (i.e., si  $X$  est un arbre).

**Proposition II.9** Un graphe connexe à  $n \geq 2$  sommets est un arbre si, et seulement si, la suite des degrés de ses sommets  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$  satisfait la condition  $\sum_{i \in [n]} d_i = 2(n - 1)$ .

PREUVE :

$\implies$  : Soit  $X$  un arbre à  $n$  sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  avec  $d(v_i) = d_i$  pour tout  $i$  de  $[n]$ . Le Lemme des poignées de mains (Lemme I.5) donne l'égalité  $\sum_{i \in [n]} d_i = 2|E(X)|$ , soit encore  $\sum_{i \in [n]} d_i = 2(n - 1)$  d'après le Théorème II.7.

$\impliedby$  : Preuve par récurrence sur  $n \geq 2$ .

**Initialisation** : Pour  $n = 2$ , la seule séquence de degrés possible pour un graphe simple connexe est  $(d_1, d_2) = (1, 1)$  et  $X$  est le graphe  $K_2$  (c'est bien un arbre).

**Hérédité** : On suppose (HR) que tout graphe connexe à  $(n - 1)$  sommets dont la suite des degrés (tous strictement positifs) vérifie  $\sum_{i \in [n-1]} d_i = 2(n - 2)$  est un arbre pour un  $n \geq 3$  et on se

donne un graphe connexe  $X$  à  $n$  sommets dont la suite des degrés (tous strictement positifs) vérifie  $\sum_{i \in [n]} d_i = 2(n - 1)$ . D'après le Lemme II.3, il existe au moins deux sommets de degré 1.

Sans perte de généralité, on peut supposer que le sommet  $v_n$  est une feuille, i.e. que  $d_n = 1$ . Soit  $v_k$  de degré  $d_k$ , l'unique voisin de  $v_n$ . Le graphe  $X - v_n$  est connexe et a pour suite de

degrés  $(d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, d_k - 1, d_{k+1}, \dots, d_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$  (où  $d_k - 1 > 0$  car sinon les sommets  $\{v_n, v_k\}$  induiraient une composante connexe de  $X$  isomorphe à  $K_2$ ). Par ailleurs

$$d_1 + \dots + d_{k-1} + d_k - 1 + d_{k+1} + \dots + d_{n-1} = \left( \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) - 1 = \left( \sum_{i=1}^n d_i \right) - (1 - d_n) = 2(n-1) - (1-1) = 2(n-2)$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on conclut que que  $X - v_n$  est un arbre. En rajoutant  $v_n$  à ce graphe avec  $v_n v_k$  comme unique arête supplémentaire, on retrouve le graphe  $X$  et cela montre que  $X$  est aussi un arbre (puisqu'on a ajouté un sommet et une arête).

## II.2 Dénombrements

La *Formule de Cayley* constitue le dénombrement d'arbres le plus célèbre ; il compte, pour un nombre entier  $n > 0$  fixé, le nombre d'arbres à  $n$  sommets. Ce nombre tient compte des « labels » ou « étiquettes » de chaque sommet<sup>1</sup>. Cela revient à dire que l'on compte les arbres dont l'ensemble des sommets est  $[n]$  ; le label d'un sommet est alors simplement sa valeur dans  $[n]$ . Les Figures Fig.II.2 et Fig.II.3 donnent la liste complète des arbres étiquetés pour  $n \in [4]$  :

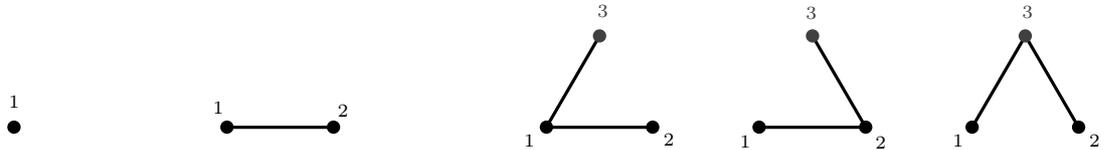


FIGURE II.2 – Les arbres à 1, 2 et 3 sommets

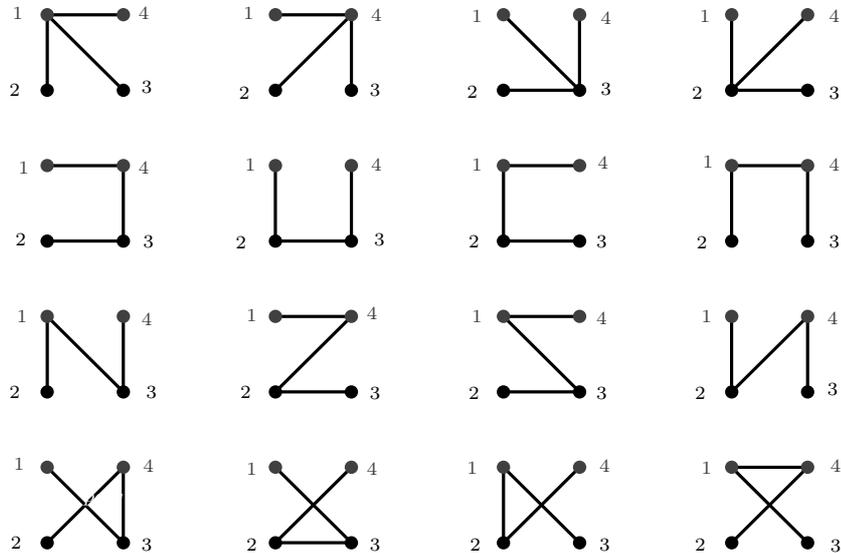


FIGURE II.3 – Les 16 arbres à 4 sommets

Soit  $n \geq 3$  entier. Pour dénombrer les arbres à  $n$  sommets, on introduit le codage de Prüfer des arbres. Si  $T$  est un arbre à  $n$  sommets (dont les sommets sont étiquetés  $1, 2, \dots, n$ ), son codage de Prüfer  $Pf(T)$  est le  $(n - 2)$ -uplet  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$  défini par :

1. On enlève dans  $T$  la feuille  $v$  dont l'étiquette a la plus faible valeur et  $a_1$  est la valeur de l'étiquette du seul voisin de  $v$ .

1. De tels graphes sont aussi parfois dits « numérotés » ou encore « décorés ».

2. On enlève dans  $T - v$  la feuille  $w$  dont l'étiquette a la plus faible valeur et  $a_2$  est la valeur de l'étiquette du seul voisin de  $w$ .
3. etc... On continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste que deux sommets.

**Remarque II.10** *Le codage de Prüfer des 16 arbres pour  $n = 4$  tels qu'ils sont présentés dans la Figure Fig.II.3 donne :*

11	44	33	22
43	23	21	14
13	42	31	24
34	32	12	41

**Remarque II.11** *Par définition du codage de Prüfer, on note que les valeurs des étiquettes des feuilles de  $T$  ne peuvent pas apparaître dans  $Pf(T)$ . Par ailleurs, les valeurs des étiquettes des nœuds de  $T$  (i.e. des sommets de degré  $\geq 2$ ) apparaissent forcément dans  $Pf(T)$  (car, pour tout sommet, le codage de Prüfer procède par abaissement du degré du sommet jusqu'à sa suppression ou jusqu'à ce qu'il soit parmi les deux sommets restants, tous deux de degré 1).*

**Théorème II.12 (Formule de Cayley)** *Il y a  $n^{n-2}$  arbres ayant  $[n]$  pour ensemble de sommets.*

PREUVE : Il suffit de montrer que la correspondance de Prüfer qui associe à tout arbre  $T$  à  $n$  sommets le  $(n - 2)$ -uplet  $Pf(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$  définit une bijection de l'ensemble des arbres ayant  $[n]$  pour ensemble de sommets vers  $[n]^{n-2}$ . On va le montrer avec un raisonnement par récurrence sur  $n$ .

**initialisation.** La formule est clairement vraie pour  $n = 1$  et  $n = 2$  car  $1^{-1} = 2^0 = 1$  et il n'existe qu'un seul arbre à un sommet et qu'un seul arbre à 2 sommets (cf. Figure II.2). On peut noter que le résultat est aussi vrai pour  $n = 3$  puisque  $[3]^1 = [3]$  et

$$Pf\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \\ \hline \end{array}\right) = 2, Pf\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \\ \hline \end{array}\right) = 1 \text{ et } Pf\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \\ \hline \end{array}\right) = 3$$

**Hérédité.** On suppose à présent que  $n$  est un entier  $\geq 3$  pour lequel la formule de Cayley est vraie. Soit  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in [n + 1]^{n-1}$ . Montrons qu'il existe un unique arbre  $T_{n+1}$  avec  $V(T_{n+1}) = [n + 1]$  tel que  $Pf(T_{n+1}) = a$ . Soit  $b_1 = \inf_{k \in [n+1]} \{k, \forall i \in [n - 1], k \neq a_i\}$  et  $c = (c_2, c_3, \dots, c_{n-1})$  la suite obtenue à partir de  $a$  en posant  $c_i = a_i - 1$  pour tout  $a_i > b_1$  (et  $c_i = a_i$  sinon). Ainsi,  $c \in [n]^{n-2}$  et, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un arbre  $T_n$  avec  $V(T_n) = [n]$  tel que  $Pf(T_n) = c$ . On renumérote alors les sommets de  $T_n$  en ajoutant 1 à tous les sommets de valeur supérieure ou égale à  $b_1$  et on définit un graphe  $T_{n+1}$  en adjoignant à  $T_n$  un  $(n + 1)$ -ème sommet de valeur  $b_1$  et voisin du sommet  $a_1$ . Il découle de cette construction que l'on a bien alors  $Pf(T_{n+1}) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ . L'existence et l'unicité du graphe  $T_n$  assure de l'existence et de l'unicité du graphe  $T_{n+1}$ .

Il y a donc une correspondance bijective entre arbres ayant  $[n]$  pour ensemble de sommets et éléments de  $[n]^{n-2}$ . Par conséquent, il y a  $n^{n-2}$  arbres ayant  $[n]$  pour ensemble de sommets.  $\square$

Une autre formulation du Théorème II.12 est la suivante :

*Pour tout ensemble  $A \subset \mathbb{N}$  de cardinal  $n$ , il y a  $n^{n-2}$  arbres ayant pour ensemble de sommets  $A$ .*

Et voici une preuve adaptée à cette formulation, également par récurrence sur le cardinal  $n$  de l'ensemble  $A$  de sommets. Comme dans la preuve de Théorème II.12, on montre que le codage de Prüfer établit une bijection entre les arbres d'ensemble de sommets  $A \subset \mathbb{N}$  et l'ensemble  $A^{n-2}$ . Par vérification immédiate, la formule est vraie pour les  $n \leq 3$  et on suppose que  $n$  est un entier  $\geq 3$  tel que, pour tout ensemble  $A$  de cardinal  $n$ , il y a  $n^{n-2}$  arbres ayant pour ensemble de sommets  $A$ .

Soit à présent  $A$  un ensemble de cardinal  $(n + 1)$  et  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$ . Montrons qu'il existe un unique arbre  $T$  avec  $V(T) = A$  tel que  $Pf(T) = a$ . Puisque les feuilles de  $T$  sont les éléments qui ne sont pas dans  $Pf(T)$  (cf. Remarque II.11), la première feuille à supprimer doit être

$$v = \inf_{k \in A} \{k, \forall i \in [n - 1], v \neq a_i\}$$

et elle doit être adjacente à  $a_1$ . Soit  $A' = A \setminus \{v\}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un unique arbre  $T'$  tel que  $V(T') = A'$  et  $Pf(T') = (a_2, \dots, a_{n-1}) \in A'^{n-2}$ . Le seul moyen d'obtenir un arbre  $T$  avec  $V(T) = A$  tel que  $Pf(T) = a$  est alors d'ajouter le sommet  $v$  et l'arête  $va_1$  au graphe  $T'$ . L'existence et l'unicité de  $T'$  montre donc l'existence et l'unicité de  $T$ .  $\square$

Le lemme qui suit sera utilisé pour dénombrer les nombres d'arbres pour une suite de degrés fixée.

**Lemme II.13** *Si  $n > 0$  est un entier et  $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  est tel que  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , alors*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{i \text{ t.q. } n_i \geq 1} \binom{n-1}{n_1, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_k}$$

PREUVE : Cela découle de l'expression du coefficient de  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$  dans les deux membres de l'égalité :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^{n-1}$$

puisque le terme général dans le membre de gauche est

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

tandis que le terme général dans le membre de droite est

$$\sum_{i \text{ t.q. } n_i \geq 1} x_i \binom{n-1}{n_1, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_{i-1}^{n_{i-1}} x_i^{n_i-1} x_{i+1}^{n_{i+1}} \dots x_k^{n_k}$$

$\square$

**Proposition II.14** *Soient  $n$  un entier  $\geq 2$  et  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$  tel que  $\sum_{i \in [n]} d_i = 2(n-1)$ . Le nombre d'arbres ayant  $n$  sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de degrés respectifs  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , est*

$$\mathcal{T}_n(d_1, d_2, \dots, d_n) = \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! (d_2-1)! \dots (d_n-1)!}$$

PREUVE : On peut supposer  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  avec  $d_i = d(v_i)$ . Le Lemme II.3 nous dit que  $d_1 = d_2 = 1$ . On va raisonner par récurrence sur  $n \geq 2$ .

**Initialisation.** Pour  $n = 2$ , on a nécessairement  $d_1 = d_2 = 1$ , il existe un unique arbre (constitué de l'arête  $v_1 \sim v_2$ ) et la formule demandée est vérifiée (car  $1 = \frac{0!}{0!0!}$ ).

**Hérédité.** On suppose, hypothèse de récurrence (HR), la formule demandée vérifiée pour la valeur  $n-1$  avec  $n \geq 3$ . Le sommet  $v_1$  est une feuille (puisque son degré est 1) et, si on enlève  $v_1$ , on obtient un arbre à  $(n-1)$  sommets  $v_2, v_3, \dots, v_n$  associé à la suite de degrés  $(d_2, d_3, \dots, d_{i-1}, d_i-1, d_{i+1}, \dots, d_n)$  si  $v_i$  est le voisin de  $v_1$ . Le décompte des arbres à  $n$  sommets se ramène ainsi au décompte des arbres à  $n-1$  sommets décomposé suivant l'unique voisin  $v_i$  (avec  $i \geq 3$ ) de  $v_1$  :

$$\mathcal{T}_n(d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{i \text{ t.q. } d_i \geq 2} \mathcal{T}_{n-1}(d_2, \dots, d_{i-1}, d_i-1, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(d_1, d_2, \dots, d_n) &\stackrel{(HR)}{=} \sum_{i \text{ t.q. } d_i \geq 2} \binom{n-3}{d_2-1, \dots, d_{i-1}-1, d_i-2, d_{i+1}-1, \dots, d_n-1} \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \binom{n-2}{d_2-1, \dots, d_n-1} \\ &\stackrel{(\ddagger)}{=} \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1} \end{aligned}$$

où l'égalité (†) vient du Lemme II.13, applicable ici car  $\sum_{i=2}^n (d_i - 1) = \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = \sum_{i=1}^n d_i - n = 2(n - 1) - n = n - 2$  du fait que  $d_1 = 1$  et que  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n - 1)$  dans un arbre à  $n$  sommets et l'égalité (††) provient du fait que  $d_1 = 1$ . □

**Remarque II.15** (*arbres non étiquetés*) On remarque avec les Figures Fig.II.2 et Fig.II.3 qu'à isomorphisme près, il n'existe que l'arbre  pour  $n = 3$  et que les arbres  et  pour  $n = 4$ .

On termine ce chapitre en considérant les arbres planaires enracinés.

**Définitions II.16** Pour tout arbre  $T$  et tout sommet  $x$  de  $T$ , le couple  $(T, x)$  est appelé **arbre enraciné** et on dit que  $x$  est la **racine** de  $T$ .

Si  $(T, x)$  un arbre enraciné. On dit que le sommet  $a$  est un **descendant** du sommet  $b$  s'il existe un chemin (nécessairement unique d'après le Théorème II.7.vi) de  $x$  à  $a$  passant par  $b$ .

Le sommet  $a$  est un **fil**s du sommet  $b$  si  $a$  est un descendant de  $b$  tel que  $a \sim b$ . On dit alors aussi que  $b$  est un **père** de  $a$ .

Un arbre qui est dessiné dans le plan est appelé **arbre planaire**. Un arbre planaire enraciné sera dessiné avec sa racine « en haut » puis les fils de sa racine distribués sur une ligne horizontale inférieure, puis les fils des fils de la racine sur une ligne horizontale inférieure, et ainsi de suite... En particulier, il y a pour chaque niveau de « descendance » un ordre naturel des sommets de gauche à droite du simple fait d'avoir un dessin dans le plan. Le fait d'avoir ce type de représentation graphique entraîne une notion d'isomorphisme entre arbres planaires enracinés plus forte que la relation d'isomorphisme obtenue en considérant les arbres simplement comme des graphes. Des arbres enracinés planaires  $(T, x)$  et  $(T', x')$  seront dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de graphe  $f : V(T) \rightarrow V(T')$  tel que  $f(x) = x'$  et tel que soit préservé le nombre de fils en chaque sommet quand on parcourt chaque niveau de descendance de gauche à droite (cf. Figure II.4 pour une illustration).

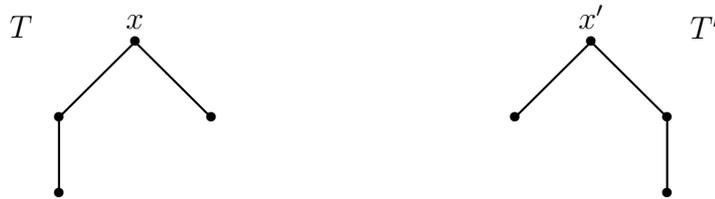


FIGURE II.4 – Les deux graphes  $T$  et  $T'$  sont isomorphes mais les arbres planaires enracinés  $(T, x)$  et  $(T', x')$  ne sont pas isomorphes.

La Figure II.5 indique les arbres planaires enracinés à  $n$  arêtes pour  $0 \leq n \leq 3$  (à isomorphisme d'arbres enracinés planaire près). On reconnaît les premières valeurs des nombres de Catalan  $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$c_n$	1	1	2	5	14	42	132	429

**Proposition II.17**

Le nombre d'arbres planaires enracinés à  $n$  arêtes (ou  $n + 1$  sommets) est  $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

PREUVE : Appelons  $t_n$  le nombre d'arbres planaires enracinés à  $n$  arêtes et raisonnons par récurrence (forte).

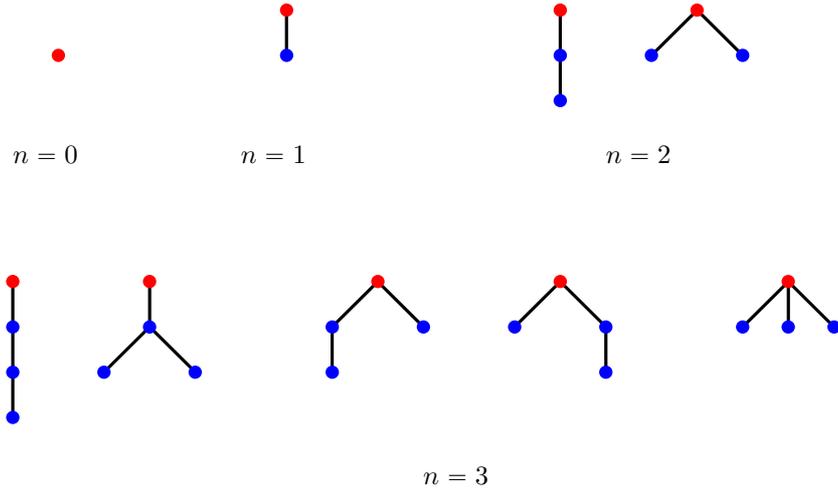
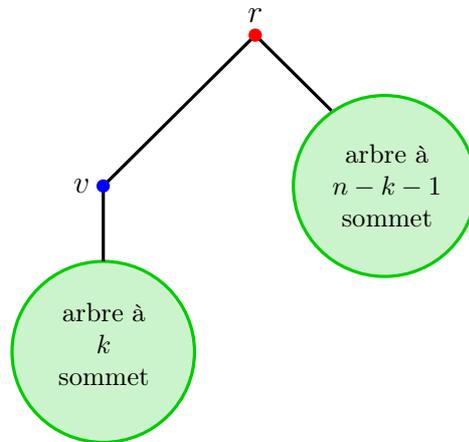


FIGURE II.5 – Les arbres planaires à  $n$  arêtes pour  $0 \leq n \leq 3$

**Initialisation.** On a bien  $t_0 = c_0$  (et même  $t_i = c_i$  pour  $i \in [3]$  comme le montre la liste exhaustive de la Figure Fig.II.5).

**Hérédité.** On suppose le résultat vrai jusqu'à  $n - 1$  pour un  $n \geq 4$  et soit un arbre enraciné  $(T, r)$  à  $n$  arêtes. Il existe au moins une arête reliant la racine à un de ses fils  $v$ . Les  $n - 1$  arêtes restantes sont ensuite distribuées entre celles qui sont dans un arbre constitué de descendants de  $v$  et celles qui sont dans un arbre constitué de descendants de  $r$  qui ne sont pas des descendants de  $v$ . Autrement dit, pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , on complète avec un arbre enraciné en  $v$  à  $k$  arêtes et avec un arbre enraciné en  $r$  à  $n - k - 1$  arêtes.



En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient donc l'égalité

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{n-k-1}$$

qui est exactement la relation de récurrence qui définit les nombres de Catalan.

□

### II.3 Exercices

**Exercice II.1 :** Vrai ou Faux ? (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

VF 1. Tout arbre est biparti.

VF 2. Tout arbre possédant au moins 2 sommets a au moins un sommet pendant.

VF 3. Un graphe connexe est un arbre si, et seulement si, toute arête est un pont.

VF 4. La suite  $d_1, d_2, \dots, d_n$  est la suite des degrés des sommets d'un arbre si, et seulement si, 
$$\sum_{i \in [n]} d_i = 2(n-1).$$

**Exercice II.2 :** Un sous-graphe  $Y$  d'un graphe  $X$  est un **sous-graphe couvrant** si  $V(Y) = V(X)$ . Un **arbre couvrant** de  $X$  est un sous-graphe couvrant qui est aussi un arbre. Montrer que tout graphe connexe admet un arbre couvrant.

**Exercice II.3 :** Montrer que cette généralisation du Lemme II.3 est vraie : tout arbre possédant un sommet de degré  $k \geq 2$  possède au moins  $k$  feuilles.

**Exercice II.4 :** Le complémentaire  $\overline{X}$  d'un graphe simple  $X$  est défini par  $V(\overline{X}) = V(X)$  et  $E(\overline{X}) = \mathcal{P}_2(X) \setminus E(X)$  (i.e. les arêtes de  $\overline{X}$  sont les *non-arêtes* - ou arêtes inexistantes - de  $X$ ).

1. Trouver tous les arbres  $X$  tel que le complémentaire  $\overline{X}$  soit aussi un arbre.
2. Montrer que si  $X$  est un graphe à au moins 5 sommets, alors soit  $X$ , soit  $\overline{X}$  contient un cycle.

**Exercice II.5 :** Vérifier les codages de Prüfer indiqués dans la Remarque II.10.

**Exercice II.6 :** Utiliser la Proposition II.14 pour donner une autre preuve de la Formule de Cayley (Théorème II.12).

**Exercice II.7 :** 1. Pour  $n \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$ , écrire toutes les suites de degré possibles pour un arbre à  $n$  sommet et pour chaque suite de degrés  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  :

- dessiner un arbre dont  $d$  est la suite des degrés

- puis donner le nombre d'arbres étiquetés par l'ensemble de sommets  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dont  $d$  est la suite des degrés.

2. Pour chaque  $n$  dans  $\llbracket 2, 6 \rrbracket$ , retrouver ainsi la formule de Cayley.

**Exercice II.8 :** Un arbre binaire est un arbre planaire enraciné dans lequel tout sommet a au plus deux fils. Si tout sommet a 0 ou 2 fils, on dit qu'il est complet. Soit  $\mathcal{T}_n$  le nombre de classes d'isomorphismes d'arbres binaires complets à  $n$  sommets internes (sommets qui ne sont pas des feuilles) La Figure II.6 la liste des arbres binaires complets à  $n$  sommets internes pour  $0 \leq n \leq 3$ .

1. Montrer que  $T_n$  est égal à  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  ( $n$ -ième nombre de Catalan).
2. Montrer que c'est aussi le nombre d'arbres binaires à  $n$  sommets.

**Exercice II.9 : La formule de Cayley par un autre comptage**

On note  $T_n$  le nombre d'arbres étiquetés à  $n$  sommets (en étiquetant  $1, 2, \dots, n$  les  $n$  sommets). On rappelle que, par exemple,  $T_3 = 3$  :

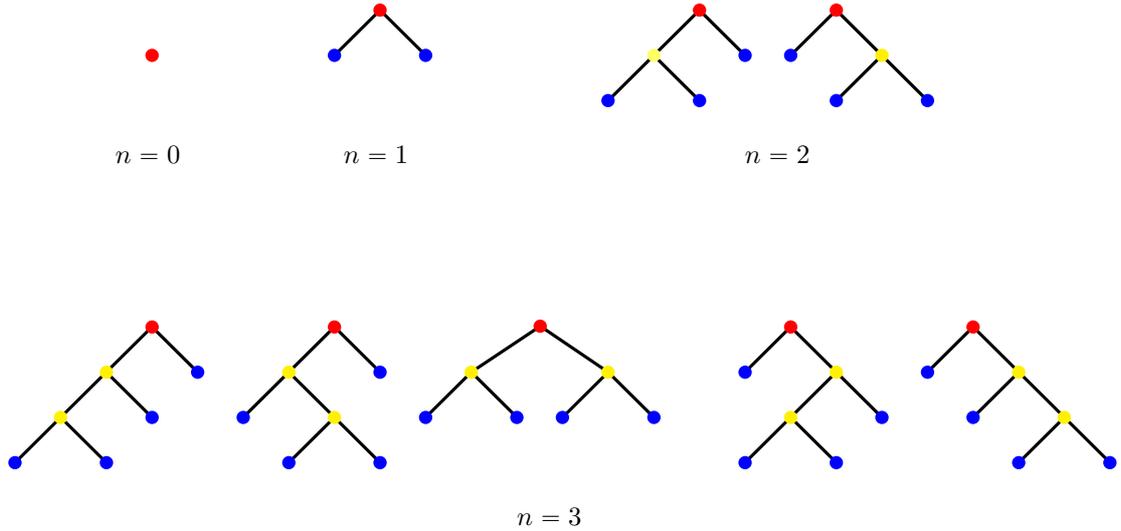
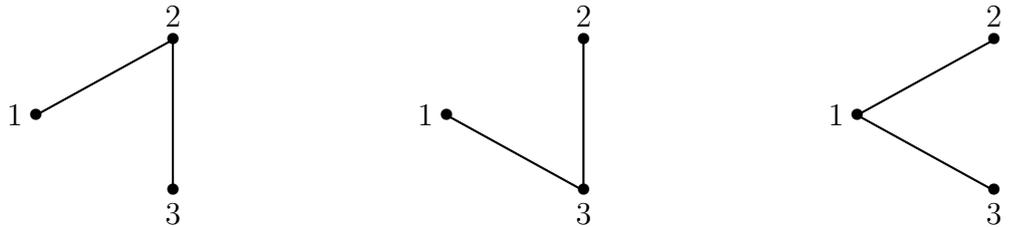


FIGURE II.6 – Les arbres binaires complets à  $n$  sommets internes pour  $0 \leq n \leq 3$



Le but de cet exercice est de prouver la formule de Cayley  $T(n) = n^{n-2}$ . On note  $\mathcal{T}(n)$  l'ensemble des arbres étiquetés à  $n$  sommets (on a donc  $T_n = |\mathcal{T}(n)|$ ).

1. Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles tels que  $|X| = k$  et  $|Y| = n$ . On rappelle la formule qui donne de nombre  $\sigma(k, n)$ , le nombre de surjections de  $X$  vers  $Y$  :

$$(\dagger) \quad \sigma(k, n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i)^k \binom{n}{i}$$

En déduire que si  $n > k$ , alors  $n^k = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} (n-i)^k \binom{n}{i}$ .

2. Pour  $1 \leq i \leq n$ , on s'intéresse aux arbres pour lesquels  $i$  est une feuille (i.e., le sommet étiqueté  $i$  est de degré 1). Pour cela, on pose  $\mathcal{T}_i(n) := \{T, T \in \mathcal{T}(n), i \text{ est une feuille de } T\}$ . Plus généralement, pour tout sous-ensemble  $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  de  $[n]$ , on pose

$$\mathcal{T}_{i_1, i_2, \dots, i_m}(n) = \bigcap_{j=1}^m \mathcal{T}_{i_j}(n) = \{T, T \in \mathcal{T}(n), i_1, i_2, \dots, i_m \text{ sont des feuilles de } T\}$$

a. Montrer que  $|\mathcal{T}_i(n)| = (n-1)T_{n-1}$  pour tout  $i \in [n]$  et  $|\mathcal{T}_{i,j}(n)| = (n-2)^2 T_{n-2}$  pour tout  $i, j \in [n]$  tels que  $i \neq j$ .

b. Plus généralement, quelle formule similaire a-t-on pour  $|\mathcal{T}_{i_1, i_2, \dots, i_m}(n)|$  avec  $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  un sous-ensemble de  $[n]$  de cardinal  $m$  ?

c. On suppose  $n \geq 3$ . Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour montrer que

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)^i T_{n-i}$$

d. Utiliser la formule (†) pour montrer que

$$(\dagger\dagger) \quad n^{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^i (n-i)^{n-i-2}$$

e. Conclure

**Exercice II.10 :** 1. a) Montrer que la représentation graphique des alcanes (hydrocarbures) de formule  $C_n H_{2n+2}$  est un arbre (on rappelle que l'atome de carbone est de valence 4 et celui d'hydrogène, de valence 1).

b) Pour  $n$  entier allant de 4 à 7, donner le nombre d'isomères de formule  $C_n H_{2n+2}$  et dessiner la représentation graphique de chaque isomère obtenu. On rappelle que deux molécules sont des isomères si elles sont composées des mêmes atomes (elles ont la même formule brute) mais ont des propriétés chimiques, physiques ou autres distinctes.

2. a) Les molécules de formule  $C_n H_{2n+1} OH$  (alcools) ont-elles aussi une représentation graphique qui est un arbre ?

b) Les molécules de formule  $C_n H_{2n+1} OH$  ont-elles autant d'isomères que les molécules de formule  $C_n H_{2n+2}$  ? Illustrer la réponse avec  $n = 3$ .

## Chapitre III

# Parcours dans un graphe

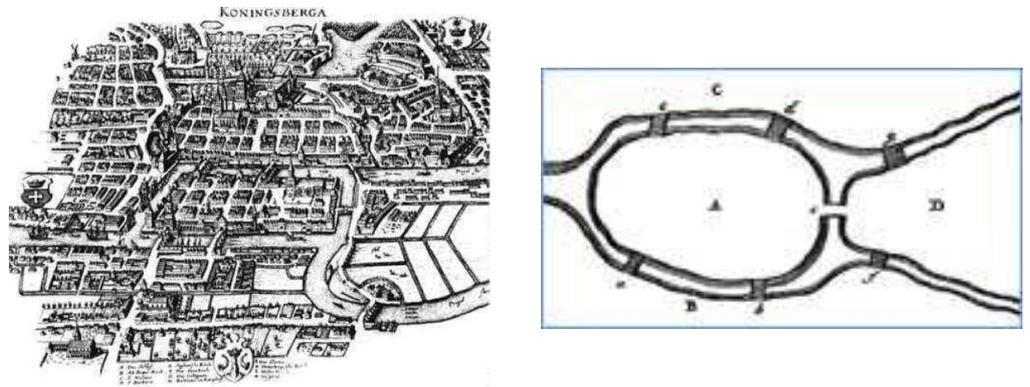


FIGURE III.1 – Koenigsberg et ses 7 ponts

### III.1 Parcours eulériens

Il est difficile de trouver un ouvrage d'introduction à la théorie des graphes qui ne mentionne pas le « *problème des 7 ponts de Koenigsberg* » (qui était de savoir si l'on pouvait faire une certaine promenade passant une fois - et une seule - par une série de ponts). En 1736, devant l'Académie des Sciences de Saint Petersburg, Euler présentera la solution de ce problème (pour être plus exact, sa résolution est partielle<sup>1</sup>) qui fait - à raison! - figure de problème fondateur dans l'histoire de la théorie des graphes.

1. Euler n'a montré que la condition nécessaire (CN) de son résultat principal qui énonce une condition nécessaire et suffisante (CNS) :

*S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra. Cette règle satisfait donc pleinement au problème proposé.*

S'il ne démontre pas la condition suffisante (CS), à savoir qu'il existe (ce qu'on appelle aujourd'hui...) un circuit eulérien si un nombre pair de ponts part de chaque région et qu'il existe une chaîne semi-eulérienne si un nombre pair de ponts de toutes les régions sauf exactement deux, c'est peut-être parce que cela allait de soi (au vu de l'analyse qu'il avait faite)! La première preuve mathématique en bonne et due forme ne sera publiée qu'en 1873 par C. Hierholzer (Math. Annalen 6 (1873), 30-32.). Il semble qu'il ne connaissait pas les travaux d'Euler (N.L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, GRAPH THEORY, 1736-1936, rééd. 2006, Oxford Univ. Press, chap. 1, p. 12.). On notera que le texte original d'Euler (rédigé en

**Définitions III.1**

Une chaîne dans un graphe  $X$  est dite *eulérienne* si elle passe une et une seule fois par chaque arête de  $X$ .

Un circuit du graphe  $X$  est dit *eulérien* s'il passe une et une seule fois par chaque arête de  $X$ .

**Définitions III.2**

Un graphe est *eulérien* s'il possède un circuit eulérien.

Un graphe est *semi-eulérien* s'il possède une chaîne eulérienne.

Un circuit étant une chaîne fermée, tout graphe eulérien est aussi semi-eulérien, la réciproque étant fautive :

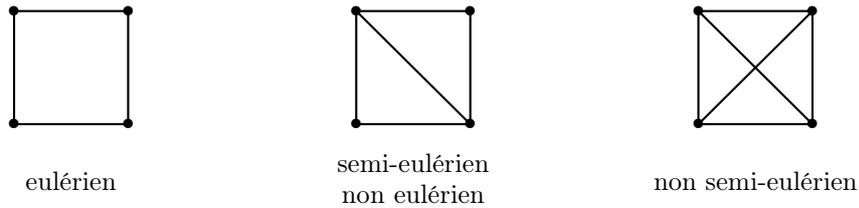


FIGURE III.2 – parcours eulériens (ou pas) : exemples

S'il est facile de se convaincre du résultat pour les trois graphes de la Figure III.2, nous allons voir qu'il existe une caractérisation générale très simple des graphes eulériens et des graphes semi-eulériens. Avant cela, notons que le graphe associé à la situation des ponts de Koenigsberg (cf. Figure III.1) :

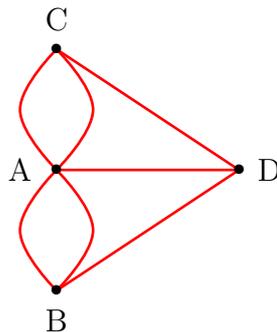


FIGURE III.3 – Le graphe correspondant au problème des sept ponts de Koenigsberg.

n'est pas un graphe simple. De façon générale, les parcours eulériens sont compatibles avec les multi-arêtes (et insensibles aux boucles...) et, dans cette section, les graphes ne seront pas supposés simples.

On appellera **promenade eulérienne** une chaîne qui ne passe deux fois par aucune arête. Un circuit qui est aussi une promenade eulérienne sera appelé **promenade eulérienne fermée**.

**Théorème III.3** Soit  $X$  un graphe connexe fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $X$  est eulérien
- ii) Tous ses sommets sont de degré pair
- iii)  $X$  est l'union arête-disjointe de cycles (i.e., cf. §I.4,  $E(X)$  se partitionne en  $E(C_1) \amalg E(C_2) \amalg \dots \amalg E(C_k)$  où  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sont des cycles de  $X$ ).

PREUVE :

i)  $\implies$  ii) Soit  $X$  un graphe eulérien et  $C$  un circuit eulérien :

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1} = v_0$$

---

latin) ne sera connu en langue française qu'avec la traduction d'E. Coupy en 1851, soit 115 ans après la présentation d'Euler.

Pour tout sommet  $v_i \neq v_0$ , chaque fois que  $C$  traverse  $v_i$ , il arrive par une nouvelle arête et part par une autre nouvelle arête ; si  $v_i$  est traversé  $k_i$  fois, son degré sera donc  $2k_i$  (puisque le cycle  $C$  a emprunté toutes les arêtes incidentes à  $v_i$ ). Le même raisonnement vaut aussi pour  $v_0$  pour lequel il faut rajouter les deux arêtes  $v_0 \sim v_1$  et  $v_k \sim v_0$  et  $v_0$  est également de degré pair.

$ii) \implies iii)$  Puisque tout sommet est de degré au moins égal à 2,  $X$  contient un cycle  $C_1$  (Proposition I.21). Soit  $X_1$  le graphe obtenu à partir de  $X - E(C_1)$  en enlevant les éventuels sommets isolés. Si  $X_1$  n'est pas vide (i.e. si  $V(X_1) \neq \emptyset$ ), tous les sommets de  $X_1$  sont aussi de degré pair (puisque un sommet de  $X_1$  a le même degré qu'il avait dans  $X$  ou bien a vu son degré diminuer de 2 dans le cas où il s'agit d'un sommet de  $C_1$ ). Et, à nouveau, d'après la Proposition I.21,  $X_1$  contient un cycle  $C_2$ . Par répétition de ce raisonnement, il ne restera qu'un certain nombre (éventuellement nul) de sommets isolés. Ceci montre qu'il existe un entier  $k$  tel que  $E(X)$  se partitionne en  $E(C_1) \sqcup E(C_2) \sqcup \dots \sqcup E(C_k)$  où  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sont des cycles de  $X$ .

$iii) \implies i)$  On suppose que  $X$  est l'union arête-disjointe de cycles. Puisque tout cycle est eulérien, on peut considérer  $C_1$  de longueur maximale parmi l'ensemble des promenades eulériennes fermées de  $X$ . On veut alors vérifier que  $C_1 = X$  (i.e. que  $X$  est eulérien). Supposons que ce ne soit pas le cas (raisonnement par l'absurde) et soit  $X_1$  une composante connexe de  $X - E(C_1)$  telle que  $E(X_1)$  soit non vide. Puisque  $X$  est l'union arête-disjointe de cycles, tous les sommets de  $X$  sont de degré pair  $\geq 2$  et cela est aussi vrai des sommets de  $C_1$  (puisque  $C_1$  est eulérien et qu'on a déjà vérifié que les sommets d'un graphe eulérien sont de degré pair). On en déduit que tous les sommets de  $X_1$  sont aussi de degré pair. Comme  $E(X_1)$  est non vide et  $X$  est connexe, on conclut que  $X_1$  contient un cycle  $C_2$  qui a au moins un point commun  $v$  avec  $C_1$ . Mais alors, la concaténation  $C_1 * C_2$  de  $C_1$  et  $C_2$  (i.e.  $C_1$  parcouru de  $v$  à  $v$ , puis  $C_2$  parcouru de  $v$  à  $v$ ) est un circuit eulérien dans  $X$ , ce qui contredit l'hypothèse de maximalité faite sur  $C_1$  (car  $|E(C_1 * C_2)| > |E(C_1)|$ ). Par conséquent,  $X$  est eulérien. □

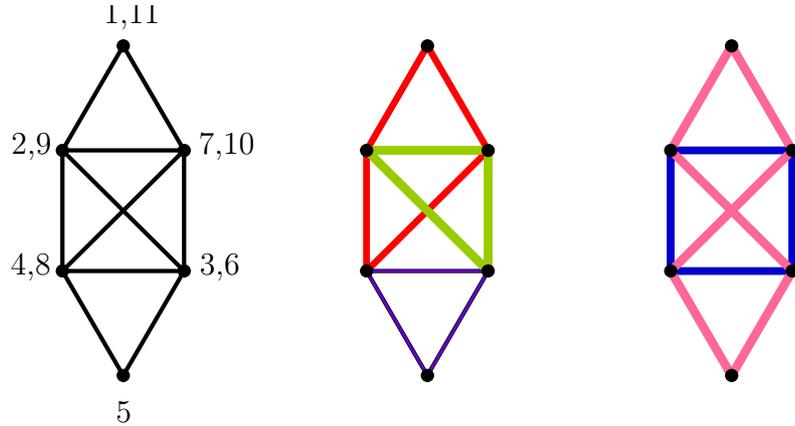


FIGURE III.4 – Un graphe eulérien : un parcours (les numéros indiquent l'ordre de parcours des arêtes) et deux décompositions en union arête-disjointe de cycles distinctes

On déduit du Théorème III.3 la caractérisation des graphes semi-eulériens :

**Corollaire III.4** *Un graphe connexe  $X$  est semi-eulérien si, et seulement si, il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.*

PREUVE : Supposons que  $X$  soit semi-eulérien. S'il est eulérien, il ne possède aucun sommet de degré impair d'après le Théorème III.3. Sinon, soit  $\sigma$  une  $a, b$ -chaîne eulérienne (non fermée). En ajoutant l'arête  $\{a, b\}$ , on obtient un circuit eulérien et on conclut que tous les sommets sont alors de degré pair d'après le Théorème III.3. Cela signifie que, dans le graphe de départ  $X$  (i.e., avant l'ajout de l'arête  $\{a, b\}$ ), tous les sommets distincts de  $a$  et de  $b$  sont de degré pair et que les deux sommets  $a$  et  $b$  sont de degré impair.

Supposons à présent que  $X$  possède 0 ou 2 sommets de degré impair. Si  $X$  ne possède aucun sommet de degré impair, alors  $X$  est eulérien d'après le Théorème III.3. Si  $X$  possède exactement deux sommets

$a$  et  $b$  de degré impair, en ajoutant une arête  $\{a, b\}$ , on obtient un graphe  $X'$  dont tous les sommets sont de degré pair et qui est eulérien d'après le Théorème III.3. Et l'existence d'un cycle eulérien dans  $X'$  entraîne l'existence d'une chaîne eulérienne dans  $X$  (en enlevant dans  $X'$  l'arête  $\{a, b\}$  que l'on avait ajoutée à  $X$ ...).

**Remarque III.5** On notera que la preuve du Corollaire III.4 nécessite de pouvoir utiliser des arêtes multiples : dès que les seuls sommets de degré impair sont adjacents, il faut rajouter une nouvelle arête entre ces deux sommets pour rendre le graphe eulérien (comme dans l'illustration de la Figure III.5).

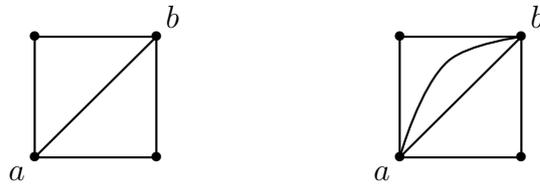


FIGURE III.5 – Le graphe de gauche est semi-eulérien et non eulérien, le graphe de droite est eulérien.

### III.2 Parcours hamiltoniens

Dans cette section, on considère à nouveau que les graphes sont simples. La question des parcours hamiltoniens est en apparence similaire à celle des parcours eulériens, la condition sur les arêtes (pour les graphes eulériens) devenant une condition sur les sommets :

**Définitions III.6**

Un chemin dans un graphe  $X$  est dit **hamiltonien** s'il passe par tous les sommets de  $X$ .  
 Un cycle dans un graphe  $X$  est dit **hamiltonien** s'il passe par tous les sommets de  $X$ .

**Définitions III.7**

Un graphe est **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien.  
 Un graphe est **semi-hamiltonien** s'il possède un chemin hamiltonien.

En d'autres termes (cf. Exercice II.2), un graphe est hamiltonien (resp. semi-hamiltonien) s'il possède un cycle couvrant (resp. un chemin couvrant). On notera donc que tout graphe hamiltonien est aussi semi-hamiltonien, la réciproque étant bien entendu fautive (cf. Fig. III.6). Cependant, si l'on a une caractérisation simple (et facile à manipuler) des parcours eulériens, ce n'est absolument pas le cas pour les parcours hamiltoniens<sup>2</sup>, pour lesquels on ne connaît toujours pas d'algorithme efficace. Parmi le très grand nombre de résultats partiels, nous mentionnerons seulement une CN (Théorème III.8) et une CS (Théorème III.9).

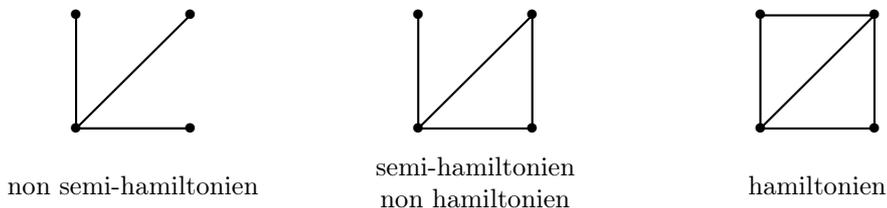


FIGURE III.6 – parcours hamiltoniens (ou pas) : exemples

2. L'origine de cette terminologie est dans les travaux de Hamilton (1805-1865) qui avait notamment inventé un jeu (« icosian game ») qui consistait à trouver des façons de parcourir les 20 sommets d'un dodécaèdre sans passer deux fois par le même sommet. Mais, selon l'ouvrage (p. 35) de Biggs, Lloyd et Wilson (cf. note 1), elle n'est pas totalement justifiée et fait peu de cas des travaux de Kirkman (1806-1895) sur les cycles que l'on nomme aujourd'hui *hamiltoniens*...

**Théorème III.8** *Si  $X$  est un graphe hamiltonien, alors pour tout sous-ensemble non vide  $A$  de  $V(X)$ ,*

$$Coco(X - A) \leq |A|$$

où  $Coco(X - A)$  est le nombre de composantes connexes de  $X - A$ .

De plus, si  $Coco(X - A) = |A|$ , chaque composante de  $X - A$  est semi-hamiltonienne et tout cycle hamiltonien de  $X$  comprend un chemin hamiltonien dans chaque composante connexe.

PREUVE : Soit  $C$  un cycle hamiltonien de  $X$ . Il est clair que  $Coco(X - A) \leq Coco(C - A)$  puisque  $V(C) = V(X)$ . Par ailleurs, on a également  $Coco(C - A) \leq |A|$  (en effet, si  $|A| = 1$ ,  $C - A$  est un chemin et  $Coco(C - A) = 1 = |A|$ ; ensuite, le retrait d'un sommet dans un chemin laisse le chemin connexe s'il s'agit d'une extrémité ou bien le coupe en deux composantes connexes s'il s'agit d'un sommet intérieur et, par une récurrence évidente, cela montre bien que  $Coco(C - A) \leq |A|$  pour tout ensemble  $A$  de sommets).

Si l'on suppose que  $Coco(X - A) = |A|$ , alors  $C - A$  a aussi  $|A|$  composantes connexes et chaque composante connexe de  $C - A$  contient tous les sommets de la composante connexe de  $X$  correspondante; autrement dit,  $C$  induit un chemin hamiltonien dans chaque composante connexe (qui est donc semi-hamiltonienne).  $\square$

**Théorème III.9** *Soit  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets. Si pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents, on a  $d(a) + d(b) \geq n$ , alors  $X$  est hamiltonien.*

PREUVE : Soit la propriété  $(\star)$  d'être un graphe à  $n \geq 3$  sommets vérifiant  $d(a) + d(b) \geq n$  pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents. Et soit  $X$  vérifiant  $(\star)$ . Supposons que  $X$  n'est pas hamiltonien (raisonnement par l'absurde). Ajoutons des arêtes à  $X$  (sans ajouter de sommets) jusqu'à obtenir un surgraphe  $X^+$  de  $X$  (i.e. un graphe dont  $X$  est un sous-graphe) arête-maximal dans la famille des graphes non hamiltoniens possédant la propriété  $(\star)$  (un tel graphe existe puisque  $K_n$  est hamiltonien). Ainsi, pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents de  $X^+$ ,  $X^+ + ab$  possède un cycle hamiltonien  $C$  qui, nécessairement, contient l'arête  $ab$  (sinon  $X^+$  serait hamiltonien). Par conséquent,  $C - ab$  est un chemin hamiltonien dans  $X^+$  :

$$a = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n = b$$

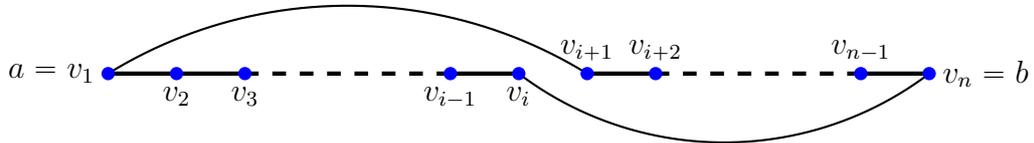
On pose alors (en identifiant  $v_{n+1}$  avec  $v_1$ )

$$A := \{i, a \sim v_{i+1}\} \quad \text{et} \quad B := \{i, b \sim v_i\}$$

On a ainsi  $|A| = d_{X^+}(a)$ ,  $|B| = d_{X^+}(b)$  et  $|A \cup B| \leq n - 1$  car  $n$  n'est ni dans  $A$  (puisque  $v_{n+1} = v_1 \not\sim v_1 = a$ ), ni dans  $B$  (puisque  $b = v_n \not\sim v_n$ ). Comme

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B| = d_{X^+}(a) + d_{X^+}(b) \geq n$$

on conclut que  $A \cap B \neq \emptyset$  et qu'il existe un  $i \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$  tel que  $a \sim v_{i+1}$  et  $b \sim v_i$ . Mais cela implique que  $X^+$  admet le cycle hamiltonien :



et contredit l'hypothèse selon laquelle  $X^+$  n'est pas hamiltonien. Et on conclut que  $X$  est hamiltonien.  $\square$

Le résultat qui suit est une conséquence immédiate de Théorème III.9 :

**Corollaire III.10 (Théorème de Dirac)** *Soit  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets. Si tout sommet de  $X$  est de degré  $\geq n/2$ , alors  $X$  est hamiltonien.*

**Corollaire III.11** *Soit  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets. Si pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents, on a  $d(a) + d(b) \geq n - 1$ , alors  $X$  est semi-hamiltonien.*

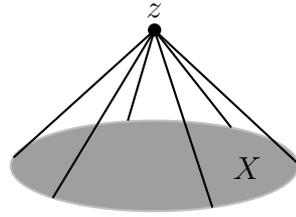


FIGURE III.7 – Le sommet  $z$  est « conique » sur le graphe  $X$  : pour tout  $x$  de  $V(X)$ ,  $x \sim z$ .

PREUVE : Soit  $X'$  le graphe obtenu en ajoutant au graphe  $X$  un sommet « conique »  $z$ , i.e. un nouveau sommet  $z$  adjacent à tous les sommets de  $X$  (illustration dans la Figure III.7). Par construction, les non-arêtes (ou paire de sommets non adjacents) de  $X$  et de  $X'$  sont les mêmes et on a donc, en tenant compte des hypothèses faites sur les degrés des sommets de  $X$ ,  $d_{X'}(a) + d_{X'}(b) = d_X(a) + d_X(b) + 2 \geq n + 1$  pour toute paire  $\{a, b\}$  de sommets non adjacents de  $X'$ . D'après le Théorème III.9,  $X'$  est hamiltonien. Mais si  $C$  est un cycle hamiltonien dans  $X'$ ,  $C - z$  est un chemin hamiltonien dans  $X$ , ce qui montre que  $X$  est semi-hamiltonien.  $\square$

On termine ce chapitre en notant que la preuve du Théorème III.9 repose en fait sur le résultat suivant qui établit une CNS (où  $X + ab$  est le graphe  $X$  auquel on a ajouté l'arête  $\{a, b\}$ , i.e. le graphe  $(V(X), E(X) \cup \{a, b\})$ ) :

**Théorème III.12** *Soit  $X$  un graphe à  $n \geq 3$  sommets. Si  $a$  et  $b$  sont deux sommets distincts non adjacents de  $X$  tels que  $d(a) + d(b) \geq n$ , alors  $X$  est hamiltonien si, et seulement si,  $X + ab$  est hamiltonien*

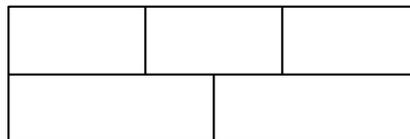
PREUVE : Si  $X$  est hamiltonien, alors  $X + ab$  est hamiltonien (trivialement : un cycle hamiltonien dans  $X$  est aussi un cycle hamiltonien dans  $X + ab$ ). Si  $X + ab$  est hamiltonien, on conclut que  $X$  est hamiltonien en reproduisant le raisonnement fait dans la preuve du Théorème III.9.  $\square$

L'ajout d'arêtes  $ab$  avec  $a$  et  $b$  non adjacents vérifiant  $d(a) + d(b) \geq n$  permet de définir la fermeture  $cl(X)$  de  $X$  (cf. Exercice 9) qui sera hamiltonienne si, et seulement si,  $X$  est hamiltonien (CNS).

### III.3 Exercices

**Exercice III.1** : Vrai ou Faux ? (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

- VF 1. Un graphe eulérien et biparti a un nombre pair d'arêtes.
- VF 2. Un graphe eulérien possédant un nombre pair de sommets a un nombre pair d'arêtes.
- VF 3. Il est possible, sans lever la main, de tracer une courbe fermée qui traverse chacun des 16 segments qui composent cette figure :

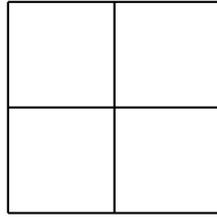


- VF 4. Si  $X$  est un graphe non eulérien, on peut toujours le rendre eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes.

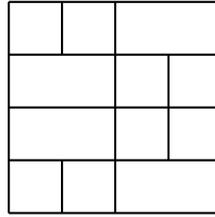
**Exercice III.2** : 1. Donner les valeurs de  $m$  et  $n$  pour lesquelles  $K_{m,n}$  est eulérien.  
 2. Pour quelles valeurs de  $n \geq 3$ ,  $C_n$  et son complémentaire  $\overline{C_n}$  sont des graphes eulériens ?

**Exercice III.3** : Pour chacun des trois dessins qui suivent, dire s'il est possible, sans lever la main (et sans repasser sur un trait déjà dessiné), de dessiner une courbe fermée qui traverse exactement

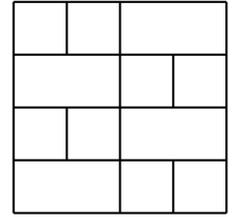
une fois chacun des segments qui composent la figure (sachant que chaque croisement délimite un nouveau segment : les dessins  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  possèdent respectivement 12, 33 et 34 segments). Et si l'on enlève la condition que la courbe soit fermée, cela change-t-il quelque chose ?



Dessin  $D_1$



Dessin  $D_2$



Dessin  $D_3$

Pour répondre à ces deux questions, pour chaque dessin  $D_i$ , on explicitera un graphe  $X_i$  qui permet d'y répondre et, lorsqu'elles existent, on dessinera des courbes qui illustrent ces réponses.

**Exercice III.4 :** Compléter le tableau suivant :

	eulérien	semi-eulérien non eulérien	non semi-eulérien
hamiltonien			
semi-hamiltonien non hamiltonien			
non semi-hamiltonien			

- Exercice III.5 :**
1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que le graphe complet  $K_n$  admet  $\frac{(n-1)!}{2}$  cycles hamiltoniens.
  2. Soit  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Combien de cycles hamiltoniens peut-on trouver dans un graphe biparti complet  $K_{m,n}$  ?
  3. Pour quelles valeurs de  $n \geq 3$ ,  $C_n$  et son complémentaire  $\overline{C_n}$  sont des graphes hamiltoniens ?
  4. Montrer qu'un graphe  $k$ -régulier (i.e., tout sommet est de degré  $k$ ) à  $2k - 1$  sommets est hamiltonien.

**Exercice III.6 :** Euler avait déjà traité un problème hamiltonien <sup>3</sup> en résolvant le « problème du cava-

3. L. Euler, *Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse*, Mém. Acad. Sci. Berlin 15 (1759,

lier », c'est-à-dire en montrant qu'un cheval peut parcourir toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois par la même case et de telle sorte que la dernière case du parcours soit à un saut de cheval de la première case du parcours (cf. Fig III.8). Dit autrement, Euler a montré que le graphe dont les sommets sont donnés par les cases de l'échiquier et les arêtes par les déplacements du cheval est hamiltonien.

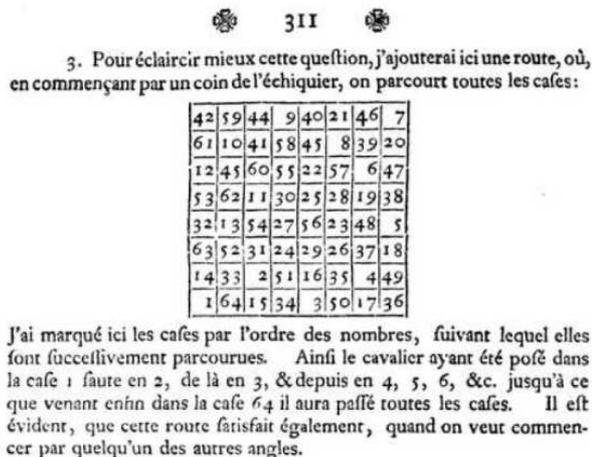


FIGURE III.8 – Réponse d'Euler à une « question curieuse ». Il indique dans cet extrait un chemin hamiltonien et indiquera un peu plus loin un cycle hamiltonien.

Est-ce également vrai si l'on prend un échiquier  $4 \times 4$  ?

**Exercice III.7 :** Pour  $n$  entier  $\geq 2$ , le « cube »  $Q_n$  est le graphe de sommets  $\{0, 1\}^n$  tel que deux  $n$ -uplets sont adjacents si, et seulement si, ils diffèrent en une unique coordonnée.

1. Dessiner  $Q_2$  et  $Q_3$ .
2. Montrer que les cubes sont hamiltoniens.

**Exercice III.8 :** Soit  $X = (V(X), E(X))$  un graphe à au moins 3 sommets. Le but de cet exercice est de montrer l'implication

$$(**) \quad |E(X)| > \binom{|V(X)| - 1}{2} + 1 \implies X \text{ est hamiltonien}$$

1. Rappeler la définition d'un cycle hamiltonien et d'un graphe hamiltonien.
2. Soit  $n$  entier,  $n \geq 4$ . On suppose que la formule  $(**)$  est vérifiée pour tout graphe possédant au plus  $(n - 1)$  sommets et on se donne un graphe  $X = (V(X), E(X))$  avec  $|V(X)| = n$  et  $|E(X)| > \binom{n - 1}{2} + 1$ .
  - 2.a) Montrer que  $X$  possède un sommet  $v$  tel que  $d(v) \geq n - 2$  (où  $d(v)$  est le degré du sommet  $v$ ).
  - 2.b) En considérant  $X - v$ , montrer que  $X$  est hamiltonien (indication : distinguer les cas  $d(v) = n - 2$  et  $d(v) = n - 1$ ).
3. Prouver la formule  $(**)$ .

**Exercice III.9 :** 1. Pour un graphe  $X$  à  $n$  sommets, on définit  $cl(X)$  comme étant le graphe obtenu par addition d'arêtes  $ab$  avec  $a \neq b$  et  $d(a) + d(b) \geq n$  tant que de telles paires  $\{a, b\}$  existent.

Montrer que  $cl(X)$  est bien défini.

2. Montrer que  $X$  est hamiltonien si, et seulement si,  $cl(G)$  est hamiltonien.

---

publié en 1766), 310-337.