L3 ESR 2017-18, S6

UE option Graphes

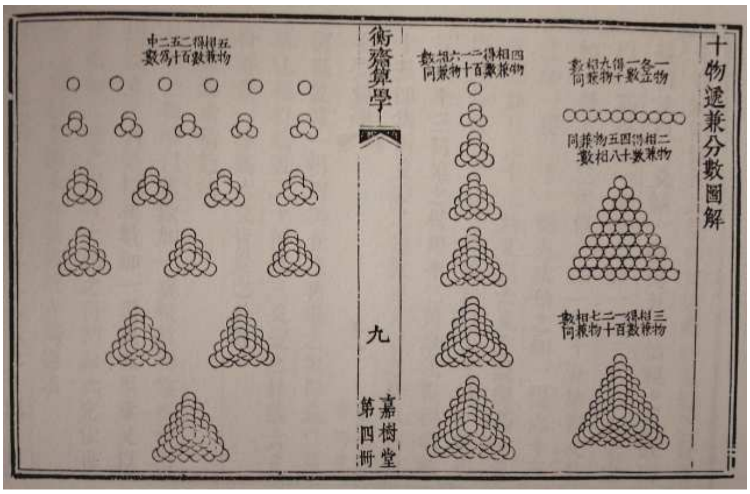
Notes de cours

Partie 1 : Combinatoire

Etienne Fieux

5 mars 2018

Option Graphes : partie 1



Calculs de combinaisons, Wang-Lai (1768-1813)

Chapitre I

Combinatoire élémentaire

I.1 Dénombrements

RAPPELS ET NOTATIONS :

Si X est un ensemble, on notera $|X|$ son `cardinal` et $\mathscr{P}(X)$ ou 2^X, l'ensemble des `parties` (ou `sous-ensembles`) de X. Si Y est un autre ensemble, on note Y^X, l'ensemble des `applications` de X dans Y.

Une application $f : X \to Y$ est dite `injective` si, pour tous $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$.

Une application $f : X \to Y$ est dite `surjective` si $f(X) = Y$ (dit autrement : si tout y de Y admet un antécédent dans X).

Une application $f : X \to Y$ est dite `bijective` si elle est injective et surjective.

Si n et m sont des entiers avec $n \leqslant m$, on note $[\![n, m]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $n \leqslant k \leqslant m$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[n]$ désigne l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des entiers allant de 1 à n et $[n]^+$ désigne l'ensemble $[\![0, n]\!]$ des entiers allant de 0 à n.

I.1.1 Ensembles et applications

Dans tout ce qui suit on se donne un ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de cardinal k et un ensemble Y de cardinal n avec $k, n \in \mathbb{N}$.

Proposition I.1 *Pour tous les sous-ensembles non vides X et Y, $\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}$.*

PREUVE : Se donner une application $f : X \to Y$ équivaut à se donner (de manière indépendante) k valeurs $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_k)$ et il y a n choix possibles pour chacune de ces valeurs ; il y a donc $n^k = |Y|^{|X|}$ choix posibles. □

Corollaire I.2 $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$

PREUVE : Pour toute partie A de X, on définit $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \Xi & : & \mathscr{P}(X) & \longrightarrow & \{0,1\}^X \\ & & A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

est une bijection :

injectivité : Soient $A, B \subset X$. Si $\chi_A = \chi_B$, alors $A = B$ car $x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$.

surjectivité Soit $\varphi : X \to \{0, 1\}$. Il est clair que $\varphi = \Xi(A) = \chi_A$ avec $A := \{x,\ x \in X \text{ et } \varphi(x) = 1\}$.

Ainsi, $|\mathscr{P}(X)| = \left|\{0, 1\}^X\right|$ qui est égal à $|\{0, 1\}|^{|X|}$ d'après la Proposition I.1, soit encore à $2^{|X|}$. □

Remarque I.3 *Pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, χ_A est l'*`application caractéristique` *de A. La bijection entre $\mathscr{P}(X)$ et $\{0, 1\}^X$ « justifie » la notaion 2^X pour $\mathscr{P}(X)$. Par ailleurs, selon cette bijection, pour une numérotation fixée $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de X, chaque partie de X est codée par un k-uplet $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k)$ dont chaque entrée est un 0 ou un 1. Par exemple, $(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ désigne le sous-ensemble $\{x_3, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}$.*

Rappelons que $|X| = k$ et $|Y| = n$. Nous noterons $\mathrm{INJ}(X, Y)$ l'ensemble des injections de X dans Y.

Proposition I.4 *i) Si $k > n$, $\mathrm{INJ}(X, Y) = \varnothing$.*

ii) Si $k \leqslant n$, $|\mathrm{INJ}(X, Y)| = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

Preuve : *i)* Par définition de l'injectivité, si $f : X \to Y$ est injective, les k éléments $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ de Y sont deux à deux distincts. Cela implique que $|Y| \geqslant k$. Dit autrement, si $n = |Y| < |X| = k$, alors $\mathrm{INJ}(X, Y) = \varnothing$.

ii) Se donner une application injective $f : X \to Y$ équivaut à se donner k valeurs $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ deux à deux distinctes. Il y a n choix possibles pour x_1, puis $n-1$ choix possibles pour x_2. Une fois choisis $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_i)$, il reste $n-i$ choix possibles pour $f(x_{i+1})$. Ainsi, en faisant ce raisonnement jusqu'à $f(x_k)$ on obtient bien qu'il existe $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ choix possibles. $\square$

On a $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ et ce nombre sera noté A_n^k

Définition I.5 *Le nombre*

$$A_n^k := \frac{n!}{(n-k)!}$$

est appelé `nombre d'arrangements de` k `objets parmi` n *ou* `nombre de choix de` k `objets ordonnés pris parmi` n `objets`.

Remarque I.6 *Un arrangement de k objets dans un ensemble Y de n objets peut être vu comme l'image d'une application injective de $[k] = [\![1, k]\!]$ dans Y, soit encore comme une suite ordonnée y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_k} d'éléments de Y formée d'éléments deux à deux distincts.*

Exemples I.1
1. *Le nombre de tiercés dans l'ordre possibles dans une course de 20 chevaux est* $A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 18 \times 19 \times 20 = 1140 = 6840$.
2. *Si Y est un alphabet de n lettres, A_n^k est le nombre de mots de k lettres sans répétition d'une même lettre existants dans l'alphabet Y. Si $Y = \{A, B, C, D, E\}$, il y a* $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = 4 \times 5 = 20$ *mots de 2 lettres sans répétition de la même lettre :*

$$AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE, ED$$

Corollaire I.7 *i) Si $k \neq n$, $\mathrm{BIJ}(X, Y) = \varnothing$.*

ii) Si $k = n$, $|\mathrm{BIJ}(X, Y)| = n!$

Preuve : *i)* Par définition de l'injectivité, si $f : X \to Y$ est injective, alors $|Y| \geqslant |X|$ et, par définition de la surjectivité, si f est surjective, on a $|Y| = |f(X)|$, d'où $|Y| \leqslant |X|$ car $|f(X)| \leqslant X$ pour toute application définie sur X. Ainsi, si $\mathrm{BIJ}(X, Y) \neq \varnothing$, alors $|X| = |Y|$.

ii) Si $|X| = |Y|$, une application $f : X \to Y$ est bijective si, et seulement si, elle est injective et on sait d'après la Proposition I.4 qu'il y en a $A_n^k = A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$. $\square$

Une bijection de l'ensemble Y dans lui-même est appelée `permutation` des éléments de Y et lorsque $Y = [n] = [\![1, n]\!] = \{1, 2, \dots, n\}$, l'ensemble des permutaions de $[n]$ est noté $\mathcal{S}_n$.

Corollaire I.8 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, $|\mathcal{S}_n| = n!$*

I.1.2 Coefficients binoniaux

Proposition I.9 *Soit Y un ensemble de cardinal n. Pour tout k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,*

$$|\mathscr{P}_k(Y)| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

où $\mathscr{P}_k(Y)$ est l'ensemble des parties de Y de cardinal k.

Preuve : Toute partie $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}\}$ de Y de cardinal k est l'image de $[k]$ par une application injective $f : [k] \to Y$ (qui envoie j sur y_{i_j} pour tout $j \in [k]$). Dit autrement, on a une application surjective :

$$\begin{array}{rcl} G \;:\; \mathrm{INJ}([k],Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}_k(Y) \\ f: & \longmapsto & f([k]) \end{array}$$

On en déduit que $\mathscr{P}_k(X)$ est en bijection avec $\mathrm{INJ}([k],Y)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $f \sim f' \iff G(f) = G(f')$ pour tous $f, f' \in \mathrm{INJ}([k],Y)$. Mais on note que

$$G(f) = G(f') \iff \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\} = \{f'(1), f'(2), \ldots, f'(k)\} \iff \exists \sigma \in \mathcal{S}_k \text{ tel que } \forall i \in [k], f'(i) = f(\sigma(i))$$

Ainsi, la classe d'équivalence de $f \in \mathrm{INJ}([k],Y)$ pour $\sim$ est $\{f \circ \sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}_k\}$, ce qui signifie que chaque classe d'équivalence est de cardinal $k!$ et donc que $|\mathscr{P}_k(Y)| = |\mathrm{INJ}([k],Y)/\sim| = |\mathrm{INJ}([k],Y)|/k!$, soit encore, d'après la Proposition I.4, $|\mathscr{P}_k(Y)| = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. □

Définition I.10 *Pour $n \geqslant 0$ et $k \in [n]^+$, les nombres*

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

sont appelés ***coefficients binomiaux*** *ou* ***nombre de combinaisons de k objets parmi n*** *ou encore* ***nombre de choix non ordonnés de k objets pris parmi n objets.***

Ce nombre sera le plus souvent noté $\binom{n}{k}$. On a donc

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Remarque I.11 *Une combinaison de k objets dans un ensemble Y de n objets n'est rien d'autre que la donnée d'un sous-ensemble de Y de cardinal k.*

Exemples I.2 *1. Le nombre de tiercés dans le désordre possibles dans une course de 20 chevaux est*

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{18 \times 19 \times 20}{2 \times 3} = 3 \times 19 \times 20 = 1140$$

2. Le nombre de tirages possibles de 6 numéros dans un loto de 49 numéros est

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 22 \times 3 \times 46 \times 47 \times 2 \times 49 = 13\,983\,816$$

Propriétés I.12 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [n]^+ = [\![0, n]\!]$.*

i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

ii) Si $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

iii) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

iv) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

*v) (**égalité de Pascal**)* $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

vi) Si $n \geqslant 1$, $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$*, soit encore* $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Preuve : *i*) Puisque $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de $[n]$ de cardinal k (d'après la Proposition I.9) et que toute partie de $[n]$ est de cardinal j avec $0 \leqslant j \leqslant n$, la somme $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$ compte tout simplement le nombre de parties de $[n]$ qui vaut 2^n d'après le Corollaire I.2.

ii) De la même façon,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = \sum_{j=0, j \text{ pair}}^{n} \binom{n}{j} - \sum_{j=0, j \text{ impair}}^{n} \binom{n}{j}$$

et démontrer l'égalité $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$ équivaut à démontrer que tout ensemble fini contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. Soit donc Y de cardinal n, $\mathscr{P}_{pair}(Y)$ (resp. $\mathscr{P}_{impair}(Y)$) l'ensemble des parties de Y de cardinal pair (resp. de cardinal impair). Pour montrer que $|\mathscr{P}_{pair}(Y)| = |\mathscr{P}_{impair}(Y)|$, considérons un élément y_0 de Y (possible car on a supposé $n \geqslant 1$, i.e. Y non vide) et l'application

$$\begin{array}{rccl} \Pi & : & \mathscr{P}_{pair}(Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{impair}(Y) \\ & & A & \longmapsto & \Pi(A) = \begin{cases} A \cup \{y_0\} \text{ si } y_0 \notin A \\ A \backslash \{y_0\} \text{ si } y_0 \in A \end{cases} \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que Π est une bijection. On note d'abord que Π est bien définie car si $A \in \mathscr{P}_{pair}(Y)$, alors $\Pi(A) \in \mathscr{P}_i(Y)$ puisque $|\Pi(A)| = |A| \pm 1$. On note également que pour tout $A \in \mathscr{P}_p(Y)$, $y_0 \in A \Longleftrightarrow y_0 \notin \Pi(A)$. De plus :

injectivité : Soient $A, A' \in \mathscr{P}_{pair}(Y)$. Si $\Pi(A) = \Pi(A')$, alors

- soit $y_0 \in A$, auquel cas $A\backslash\{y_0\} = \Pi(A) = \Pi(A')$ et y_0 est également dans A' (car, par définition de Π, $\Pi(A') = A'\backslash\{y_0\}$ implique $y_0 \notin \Pi(A')$ et donc $y_0 \in A'$), d'où finalement $A = \Pi(A) \cup \{y_0\} = \Pi(A') \cup \{y_0\} = A'$.
- soit $y_0 \notin A$, auquel cas $A \cup \{y_0\} = \Pi(A) = \Pi(A')$ et y_0 n'est pas non plus dans A' (car, par définition de Π, $\Pi(A') = A' \cup \{y_0\}$ implique $y_0 \in \Pi(A')$ et donc $y_0 \notin A'$), d'où finalement $A = \Pi(A)\backslash\{y_0\} = \Pi(A')\backslash\{y_0\} = A'$.

surjectivité : Soit $B \in \mathscr{P}_{impair}(Y)$. Si $y_0 \in B$, alors $B = \Pi(B\backslash\{y_0\})$ et si $y_0 \notin B$, alors $B = \Pi(B \cup \{y_0\})$.

En conclusion, Π est une bijection et $|\mathscr{P}_{pair}(Y)| = |\mathscr{P}_{impair}(Y)|$.

iii) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ car un ensemble de cardinal n ne possède qu'une seule partie de cardinal 0 (l'ensemble vide) et qu'une seule partie de cardinal n (lui-même).

Pour les propriétés *iv*) à *vi*), on va développer une preuve « combinatoire » (on laisse au lecteur la vérification directe par le calcul).

iv) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: $\binom{n}{k}$ est le nombre de sélection de k objets parmi n. Mais sélectionner k objets parmi n équivaut à en sélectionner $n-k$ (ceux qu'on ne prend pas...), d'où l'égalité demandée. Plus formellement, si Y est de cardinal n, on a $\binom{n}{k} = |\mathscr{P}_k(Y)|$, $\binom{n}{n-k} = |\mathscr{P}_{n-k}(Y)|$ et l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ résulte de la bijection (évidente car la réciproque est définie par la même formule) :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_k(Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{n-k}(Y) \\ A & \longmapsto & \overline{A} = Y \backslash A \end{array}$$

v) On peut voir l'identité de Pascal $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ comme le résultat d'un **double comptage**. Cela veut dire que l'on fait apparaître les deux côtés de l'égalité comme le comptage d'une certaine quantité par deux méthodes distinctes. Ici, on prend Y un ensemble de cardinal $n+1$, on choisit un y_0 dans Y, et on compte les parties de Y qui sont de cardinal k :

1er comptage : $\binom{n+1}{k} = |\mathscr{P}(Y)|$ est le nombre de parties de Y de cardinal k.

2d comptage : une partie de Y de cardinal k contient y_0 ou ne contient pas y_0 (dichotomie)... Or, il y a $\binom{n}{k-1}$ parties de Y de cardinal k qui contiennent y_0 (une fois y_0 choisi, il reste $\binom{n}{k-1}$ choix possibles) et il y a $\binom{n}{k}$ parties de Y de cardinal k qui ne contiennent pas y_0 (y_0 est exclu et il reste $\binom{n}{k}$ choix possibles).

vi) Ici également, on va rendre compte de l'égalité $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ comme résultat d'un double comptage :

1er comptage $n\binom{n-1}{k-1}$ est le nombre de parties de Y (qui est de cardinal $n \geqslant 1$) de cardinal k et obtenues en sélectionnant d'abord un y dans Y, puis en complétant par $k-1$ éléments pris $Y \backslash \{y\}$.

2d comptage Dans le précédent comptage, toute partie B de Y de cardinal k est comptée k fois (suivant le premier élément qui a d'abord été compté) ; puisqu'il y a $\binom{n}{k}$ partie des carinal k, cela veut dire qu'on a dénombré $k\binom{n}{k}$ parties.

□

Le résultat bien connu qui suit justifie l'appellation de *coefficient binomial* :

Théorème I.13 (Formule du binôme) *Pour tous $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Preuve :

preuve 1 Lorsqu'on développe

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ fois le facteur } (x+y)}$$

on obtient une somme de 2^n termes de la forme $x^k y^{n-k}$ correspondant aux 2^n choix possibles (qui résultent du choix de x ou de y à l'intérieur de chaque facteur $x+y$). Pour k allant de 0 à n, on obtient $x^k y^{n-k}$ pour tout choix de k facteur $x+y$ (qui sont ceux dans lesquels on sélectionne x) et il y a bien $\binom{n}{k}$ tels choix possibles.

preuve 2 Démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation Pour $n = 0$, $(x+y)^n = (x+y)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 \times 1 \times 1$: la formule est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité On se donne un entier $n \geqslant 0$ pour lequel on a (HR) : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

On a alors

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&\overset{(HR)}{=} (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n-(j-1)}y^j \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k
\end{aligned}$$

□

I.1.3 Partages

Combien existe-t-il de manières de distribuer les 4 parts (indivisibles !) d'un gâteau à 3 enfants ? Si a_i est le nombre de parts reçues par l'enfant i, on cherche donc le nombre de triplets d'entiers positifs (au sens large) (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = 4$. En voici la liste :

$(4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,4)$
$(3,1,0)$, $(1,3,0)$, $(3,0,1)$, $(1,0,3)$, $(0,3,1)$, $(0,1,3)$
$(2,2,0)$, $(2,0,2)$, $(0,2,2)$
$(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$

Il en existe donc 15. Notons que si on impose aux a_i d'être strictement positifs (on veut que chaque enfant ait au moins une part de gâteau), il ne reste plus que 3 triplets.

Théorème I.14

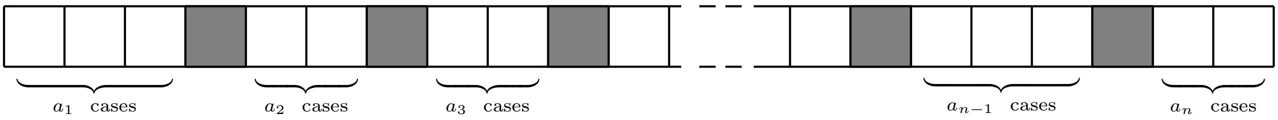
i) Il y a $\binom{n+k-1}{n-1}$ *n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ formés d'<u>entiers</u> vérifiant* $\begin{cases} a_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k \end{cases}$

ii) Il y a $\binom{k-1}{n-1}$ *n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ formés d'<u>entiers</u> vérifiant* $\begin{cases} a_i > 0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k \end{cases}$

Preuve : $i)$ Imaginons que l'on a un ensemble de boules de n couleurs différentes (avec au moins k boules de chaque couleur). Les différents n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ correspondent aux différentes manières de réunir k boules en notant a_i le nombre de boules de la couleur i pour tout i de $[n]$.

Pour un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ fixé, on va ranger ces k boules dans un alignement de cases, chacune contenant une boule.

On met les a_1 boules de couleur 1 dans les a_1 premières cases, puis on « bouche » la case suivante. Et on recommence le même processus avec la couleur 2 : mettre les a_2 boules de couleur 2 dans les a_2 cases suivantes et « boucher » la case qui suit ; on procède ainsi jusqu'à la couleur $(n-1)$ après quoi on termine en remplissant a_n cases avec les a_n boules de couleur n.



On note que les a_i peuvent être nuls (cela se traduit par la première case bouchée si $a_1 = 0$, par la dernière case bouchée si $a_n = 0$ et par deux cases bouchées côte-à-côte dans les autres cas). On a ainsi une répartition de $(n-1)$ cases bouchées parmi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n - 1 = k + n - 1$ cases. Il est clair que deux k-uplets distincts $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ et $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = k$ donnent lieu à des répartitions distinctes (les séparateurs - i.e. les cases bouchées - ne sont pas placés au même endroit). Réciproquement un choix de $n-1$ cases bouchées parmi $k+n-1$ donne un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ (a_1 est le nombre de cases avant la première case bouchée, puis a_i est le nombre de cases entre la $(i-1)$-ème et la i-ème cases bouchées pour $2 \leqslant i < n$ et a_n est le nombre de cases après la dernière case bouchée).

Ainsi, il y a autant de n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ que de choix de $(n-1)$ cases parmi $(k+n-1)$, soit $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$.

ii) Ce calcul se déduit du précédent. En effet, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \iff (a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_n - 1) \in \mathbb{N}^n$ et le nombre cherché (en posant $a'_i = a_i - 1$) est donc le nombre de n-uplets $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ formés d'<u>entiers</u> vérifiant $\begin{cases} a'_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = k - n \end{cases}$ qui est égal $\binom{(k-n)+n-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}$ d'après *i)*.
□

Remarque I.15 *On note que la valeur $\binom{k-1}{n-1}$ impose que $k \geqslant n$, ce qui est concordant avec le fait qu'il ne peut pas exister de n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ si $n > k$.*

Exemple I.1 *Si l'on revient à l'exemple traité ci-dessus où $k = 4$ et $n = 3$, on trouve bien $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6}{2} = 15$ et $\binom{n-1}{k-1} = \binom{3}{2} = 3$.*

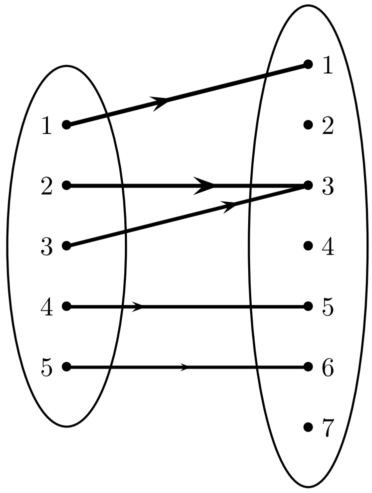
Proposition I.16 *Soient k, n des entiers strictement positifs.*

i) Le nombre d'applications $f : [k] \to [n]$ croissantes au sens large (i.e. $i \leqslant j \Rightarrow f(i) \leqslant f(j)$) est $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$.

ii) Si $k \leqslant n$, le nombre d'applications $f : [k] \to [n]$ strictement croissantes (i.e. $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$) est $\binom{n}{k}$.

Preuve : Voici un cas particulier ($k = 5$, $n = 7$) pour illustrer les deux preuves que l'on va voir :

$\varphi : [5] \to [7]$:



PREUVE 1 Cette preuve utilise le fait toute application croissante $f : [k] \to [n]$ est entièrement déterminée par la suite des cardinaux des images réciproques $f^{-1}(\{j\})$, $j \in [n]$. Pour l'exemple φ, cette suite est $(1, 0, 2, 0, 1, 1, 0)$. Il suffit donc de montrer que l'application qui suit est bijective :

$$H \quad : \quad \begin{array}{rcl} \{f : [k] \to [n],\ f \text{ croissante au sens large}\} & \longrightarrow & \{(a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{N}^n,\ a_1 + \ldots + a_n = k\} \\ f & \longmapsto & \big(\left|f^{-1}(\{1\})\right|, \left|f^{-1}(\{2\})\right|, \ldots, \left|f^{-1}(\{n\})\right|\big) \end{array}$$

On note que si $f : [k] \to [n]$ est croisssante et $x \in [k]$, alors $f(x) = i \iff x = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a$ avec $1 \leqslant a \leqslant a_i$ et $a_j = \left|f^{-1}(\{j\})\right|$ pour tout $j \in [n]$. On définit donc

$$K \quad : \quad \begin{array}{rcl} \{(a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{N}^n,\ a_1 + \ldots + a_n = k\} & \longrightarrow & \{f : [k] \to [n],\ f \text{ croissante au sens large}\} \\ \alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) & \longmapsto & K(\alpha) \end{array}$$

où $K(\alpha)$ est défini, pour tout $j \in [n]$, par

$$\begin{cases} K(\alpha)^{-1}(\{1\}) = [\![1, a_1]\!] \text{ si } a_1 \geqslant 1 \text{ et } K(\alpha)^{-1}(\{1\}) = \varnothing \text{ sinon} \\ K(\alpha)^{-1}(\{i\}) = [\![a_1 + \ldots + a_{i-1} + 1, a_1 + \ldots + a_i]\!] \text{ si } a_i \geqslant 1 \text{ et } K(\alpha)^{-1}(\{i\}) = \varnothing \text{ sinon} \end{cases}$$

Vérifions que $K = H^{-1}$.

• Si $f : [k] \to [n]$ est croissante au sens large, alors pour tout $j \in [n]$:

$$\begin{array}{rcl} x \in K(H(f))^{-1}(\{j\}) & \iff & \left|f^{-1}(\{1\})\right| + \ldots + \left|f^{-1}(\{j-1\})\right| < x \leqslant \left|f^{-1}(\{1\})\right| + \ldots + \left|f^{-1}(\{j\})\right| \\ & \iff & x \in f^{-1}(\{j\}) \end{array}$$

•• Si $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $a_1 + \ldots + a_n = k$, alors $H(K(\alpha)) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ avec pour tout $j \in [n]$:

$$b_j = \left|K(\alpha)^{-1}(\{j\})\right| = (a_1 + \ldots + a_j) - (a_1 + \ldots + a_{j-1} = a_j$$

Ainsi, K est bijective et on peut donc conclure que le nombre d'applications croissantes au sens large de $[k]$ vers $[n]$ est égal au nombre de n-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme k. D'après le Théorème I.14, ce nombre est $\dbinom{n+k-1}{n-1} = \dbinom{n+k-1}{k}$.

PREUVE 2 Pour cette autre approche, on va considérer les « sauts » (éventuellement nuls) de $f(i)$ à $f(i+1)$ pour tout $f : [k] \to [n]$ croissante. En ajoutant les valeurs $f(0) = 1$ et $f(k+1) = n$, on obtient une suite de $k + 1$ entiers positifs ou nuls :

$$f(1) - f(0), f(2) - f(1), \ldots, f(k) - f(k-1), f(k+1) - f(k)$$

et on note que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} (f(j) - f(j-1)) = f(k+1) - f(0) = k - 1$. Par exemple, pour l'application φ donnée en exemple, on obtient $(0, 2, 0, 2, 1, 1)$. Montrons que l'application qui suit est bijective :

$$\begin{array}{rcl} H \;:\; \{f : [k] \to [n],\ f \text{ croissante au sens large}\} & \longrightarrow & \{(b_1, \ldots, b_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1},\ b_1 + \ldots + b_{k+1} = n-1\} \\ f & \longmapsto & \beta = (b_1, \ldots, b_{k+1}) \\ & & \text{avec } \begin{cases} b_i = f(i) - f(i-1),\ i \in [k+1] \\ f(0) := 1,\ f(k+1) := n \end{cases} \end{array}$$

Injectivité de H. Si $f, g : [k] \to [n]$ sont deux applications croissantes, alors $H(f) = H(g)$ implique $f(i) - f(i-1) = g(i) - g(i-1)$ pour tout i de $[k+1]$ avec $f(0) = g(0)$ et $f(k+1) = g(k+1)$. De $f(1) - f(0) = g(1) - g(0)$ et $f(0) = g(0)$, on déduit $f(1) = g(1)$. Puis de $f(2) - f(1) = g(2) - g(1)$ et $f(1) = g(1)$, on déduit $f(2) = g(2)$. Et ainsi de suite..., par une récurrence évidente, on obtient $g(i) = f(i)$ pour tout i de $[k]$ et $f = g$.

Surjectivité de H. Soit $\beta = (b_1, \ldots, b_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$ tel que $b_1 + \ldots + b_{k+1} = n-1$. Alors, $\beta = H(f)$ avec $f : [k] \to [n]$ croissante définie par $f(i) = 1 + b_1 + \ldots + b_i$ pour tout i de $[k]$ puisque

• $f(i) - f(i-1) = b_i$ pour $i \in [\![2, k]\!]$

•• avec $f(0) := 1$, on obtient $f(1) - f(0) = 1 + b_1 - 1 = b_1$

• • • et avec $f(k+1) = n$, on obtient $f(k+1) - f(k) = n - (1 + b_1 + \ldots + b_k) = b_{k+1}$ puisque $b_1 + \ldots + b_k + b_{k+1} = n-1$

L'application H étant bijective, le nombre cherché est égal au nombre de $(k+1)$-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme $n-1$. D'après le Théorème I.14, ce nombre est $\binom{(k+1)+(n-1)-1}{k} = \binom{k+n-1}{k}$.

ii) Cette question est beaucoup plus facile. En effet, se donner une application strictement croissante f de $[k]$ dans $[n]$ équivaut à se donner une suite strictement croissante de k valeurs $f(i)$:

$$1 \leqslant f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(k-1) < f(k) \leqslant n$$

ce qui équivaut encore à se donner un sous-ensemble $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ de $[n]$ de cardinal k que l'on écrit en ordonnant ses éléments : $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ (un tel sous-ensemble définit ainsi une unique application strictement croissante en posant $b_i = f(i)$). Ainsi, il y a autant d'applications strictement croissantes de $[k]$ dans $[n]$ que de parties de $[n]$ de cardinal k, soit $\binom{n}{k}$ (d'après la Proposition I.9). □

I.1.4 Coefficients multinomiaux

Définition I.17 *Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et tout k-uplet $(a_1, k_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, le nombre*

$$\frac{n!}{a_1!\, a_2!\, \ldots\, a_k!}$$

est appelé ***`coefficient multinomial`*** *et il est noté*

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$$

Remarque I.18 *Cette définition étend bien entendu celle des coefficients binomiaux (qui correspondent au cas $k = 2$ dans la Définition I.17) et on a*

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{n-a} = \binom{n}{a, n-a}$$

Exemple I.2 *Supposons que l'on a k urnes numérotées, soit par exemple U_1, U_2, ..., U_k, et que l'on veut répartir n boules dans ces k urnes, en laissant n_i boules dans l'urne U_i pour tout $i \in [k]$. On suppose* *également que les boules sont distinguables (par exemple, elle sont numérotées de 1 à n). Le nombre de répartitions différentes que l'on peut faire est alors*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!}$$

puisque la procédure de répartition des n boules peut être présentée comme un choix ordonné des n boules (il y en a $n!$) puis le rangement des n_1 premières boules dans l'urne U_1, puis les n_2 boules suivantes dans U_2, etc... jusqu'aux n_k dernières boules qui vont dans U_k. Pour chaque urne U_i, il y a alors clairement $n_i!$ tels choix ordonnés qui donnent le même ensemble de boules dans l'urne U_i (d'où la division par $n_i!$ pour tout i).

Les coefficients multinomiaux peuvent être vus comme un produit de coefficients binomiaux :

Proposition I.19 *Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ et tout k-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$,*

$$\begin{aligned}\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} &= \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\ldots\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}}{a_{k-1}} \\ &= \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\ldots\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}}{a_{k-1}}\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}-a_{k-1}}{a_k}\end{aligned}$$

Preuve : La seconde égalité est évidente puisque $n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}-a_{k-1} = a_k$. Le calcul direct donne la première égalité.

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\ldots\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-3}}{a_{k-2}}\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}}{a_{k-1}}$$

$$= \frac{n!}{a_1!\,\cancel{(n-a_1)!}}\ \frac{\cancel{(n-a_1)!}}{a_2!\,\cancel{(n-a_1-a_2)!}}\ \ldots\ \frac{\cancel{(n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-3})!}}{\cancel{(n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2})!}\,a_{k-2}!}\ \frac{\cancel{(n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2})!}}{a_{k-1}!\,a_k!}$$

Remarque I.20 *En suivant la Proposition I.19, le coefficient multinomial $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ est le nombre de choix de n objets, a_1 du type 1, a_2 du type 2, ..., a_k du type k.*

Par exemple, c'est le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres formé à partir de k lettres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ avec a_i fois la lettre α_i. Ainsi le nombre d'anagrammes du mot AMPEREMETRE est $\binom{11}{1,2,1,4,2,1} = \frac{11!}{2!\,4!\,2!} = 5\times 6\times 7\times 2\times 9\times 10\times 11 = 415800.$

De la même façon, le calcul de l'Exemple I.2 peut être présenté comme celui du choix de n_1 boules parmi n (qu'on dépose dans l'urne U_1), puis du choix de n_2 boules parmi $n-n_1$ (qu'on dépose dans l'urne U_2), puis du choix de n_3 boules parmi $n-n_1-n_2$ (qu'on dépose dans l'urne U_3), etc...

Théorème I.21 (Formule du binôme) *Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ et tout k-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$,*

$$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k, \quad (x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_k)\in\mathbb{N}^k \\ a_1+a_2+\ldots+a_k=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$$

Preuve :

preuve 1 Lorsqu'on développe

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \underbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_k)(x_1+x_2+\ldots+x_k)\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_k)}_{n \text{ fois le facteur } (x_1+x_2+\ldots+x_k)}$$

on obtient une somme de k^n monômes de la forme $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$ avec $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$ et correspondant aux k^n choix possibles (qui résultent du choix d'un x_i à l'intérieur de chaque facteur $x_1+x_2+\ldots+x_k$). Pour un k-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$ fixé, le coefficient du monôme $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$ est donné par le nombre de n-uplets $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ où $u_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ pour tout i de $[n]$ et tels que x_i apparaît a_i fois pour tout i de $[n]$. Cela revient à prendre a_1 fois x_1 parmi les n facteurs, puis a_2 fois x_2 parmi les $n-a_1$ facteurs restants, puis a_3 fois x_3 parmi les $n-a_1-a_2$ facteurs restants, etc... Compte tenu de la Proposition I.19, ce nombre est $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$.

PREUVE 2 Démonstration (pour n fixé) par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation Pour $k = 1$, il n'y a rien à montrer puisque les deux côtés de l'égalité sont identiques.
Hérédité On suppose que l'égalité à montrer est vraie pour un $k \geqslant 1$ (c'est l'hypothèse de récurrence (HR)) et on se donne $k+1$ nombres x_1, x_2, …, x_k et x_{k+1}. Les égalités qui suivent montrent que la formule est alors valable au rang $k+1$:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-2} + x_k + x_{k+1})^n$$

$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-2} + (x_k + x_{k+1}))^n$$

$$\overset{(HR)}{=} \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_{k-1},a')\in\mathbb{N}^k \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a'=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} (x_k + x_{k+1})^{a'}$$

$$\overset{(\dagger)}{=} \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_{k-1},a')\in\mathbb{N}^k \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a'=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} \sum_{a_k+a_{k+1}=a'} \binom{a'}{a_k} x_k^{a_k} x_{k+1}^{a_{k+1}}$$

$$= \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_k,a_{k+1})\in\mathbb{N}^{k+1} \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} \binom{a'}{a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} x_k^{a_k} x_{k+1}^{a_{k+1}}$$

$$\overset{(\dagger\dagger)}{=} \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_k,a_{k+1})\in\mathbb{N}^{k+1} \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} x_k^{a_k} x_{k+1}^{a_{k+1}}$$

où l'égalité (†) utilise la formule du binôme (Théorème I.13) et l'égalité (††) résulte du calcul direct

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} \binom{a'}{a_k} = \frac{n!}{a_1!\, a_2!\, \ldots a_{k-1}!\, \cancel{a'!}} \frac{\cancel{a'!}}{a_k!\, a_{k+1}!} = \frac{n!}{a_1!\, a_2!\, \ldots a_k!\, a_{k+1}!} = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}}$$

□

I.2 Suites de nombres

I.2.1 Un exemple : les nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... sont définis par

$$(Fibo) \qquad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette définition à l'aide d'une formule de récurrence donne une formule *implicite* pour le calcul des nombres de Fibonacci. Nous allons à présent voir deux manières distinctes de trouver une formule *explicite* (ou « `formule fermée` » ou encore « `formule close` ») pour le calcul de ces nombres. Ces deux méthodes seront systématisées dans les section)s qui suivent.

PREMIÈRE MÉTHODE

Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z = \alpha x + \beta y$. On note que $z = (z_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}$ puisque pour $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} z_{n+2} = \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2} = \alpha(x_{n+1} + x_n) + \beta(y_{n+1} + y_n) &= \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} + \alpha x_n + \beta y_n \\ &= z_{n+1} + z_n \end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (x_0, x_1) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (la vérification de la linéarité est automatique et le fait qu'elle soit un isomorphisme traduit simplement le fait que les éléments de $\mathcal{F}$ sont des suites entièrement définies si, et seulement si, les deux premiers termes sont connus).

Cet isomorphisme traduit donc simplement le fait que $\mathcal{F}$ est constitué de suites entièrement définies par la donnée de leurs deux premiers termes. Il nous dit que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et il suffit donc de connaître deux suites linéairement indépendantes de $\mathcal{F}$ pour exprimer toutes les suites de $\mathcal{F}$ comme combinaison linéaire de ces deux suites.

On cherche alors des suites géométriques $(x_n) = (\lambda^n)$ linéairement indépendantes et qui appartiennent à $\mathcal{F}$:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \iff \lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n \iff \lambda^n(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

Ainsi en posant $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, les suites géométriques $(\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta^n)_{n\geqslant 0}$ sont dans $\mathcal{F}$ et elles sont linéairement indépendantes car, pour tous scalaires $A, B \in \mathbb{C}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad A\alpha_n + B\beta_n = 0 \implies \left\{ \begin{array}{ll} A + B = 0 & (n = 0) \\ A\alpha + B\beta = 0 & (n = 1) \end{array} \right. \implies A = B = 0$$

Ainsi, $\{(\alpha^n)_{n\geqslant 0}, (\beta^n)_{n\geqslant 0}\}$ est une base de $\mathcal{F}$. On note que $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ et $\alpha\beta = -1$.

Retour à la suite de Fibonacci

On cherche $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$. On doit avoir $\left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A\alpha + B\beta = 1 \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{l} B = -A \\ A(\alpha - \beta) = 1 \end{array} \right.$, d'où : et $A = \dfrac{1}{\alpha - \beta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ puis $B = -A = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. En conclusion, on a la formule explicite $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, soit encore

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Deuxième méthode

On considère la série $f(X) = \sum_{n\geqslant 0} F_n X^n$ (on ne se pose pas ici la question de la convergence, cette série est un objet algébrique très bien défini ; on reviendra sur cette question dans la section §I.2.3). On note alors que

$$Xf(X) = \sum_{n\geqslant 0} F_n X^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} F_{n-1} X^n$$

et

$$X^2 f(X) = \sum_{n\geqslant 0} F_n X^{n+2} = \sum_{n\geqslant 2} F_{n-2} X^n$$

La relation $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$ nous donne (en tenant compte de $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$) :

$$\begin{aligned} Xf(X) + X^2 f(X) &= \sum_{n\geqslant 1} F_{n-1}X^n + \sum_{n\geqslant 2} F_{n-2}X^n \\ &= F_0 X + \sum_{n\geqslant 2}(F_{n-1} + F_{n-2})X^n \\ &= F_0 X + \sum_{n\geqslant 2} F_n X^n \\ &= F_0 X - F_0 - F_1 X + \sum_{n\geqslant 0} F_n X^n \\ &= -X + f(X) \end{aligned}$$

soit encore $f(X) = Xf(X) + X^2 f(X) + X$ ou

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2}$$

Rappelons que racines $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ de $X^2 - X - 1$ vérifient $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$, si bien que $1 - X - X^2 = 1 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta X^2 = (1-\alpha X)(1-\beta X)$. On cherche alors la décomposition en éléments simples

$$f(X) = \frac{X}{1-X-X^2} = \frac{X}{(1-\alpha X)(1-\beta X)} = \frac{A}{1-\alpha X} + \frac{B}{1-\beta X}$$

Les égalités $\dfrac{X}{1-X-X^2} = \dfrac{A}{1-\alpha X} + \dfrac{B}{1-\beta X} = \dfrac{A+B-(A\beta+B\alpha)X}{1-X-X^2}$ donne $\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A\beta + B\alpha = -1 \end{array}\right.$ et $A(\beta-\alpha) = -1$, puis $A = \dfrac{-1}{\beta-\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -B$. En utilisant la somme de la série géométrique :

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n\geqslant 0} u^n$$

on obtient

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\alpha X} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\beta X} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geqslant 0}(\alpha X)^n - \sum_{n\geqslant 0}(\beta X)^n\right)$$

d'où finalement

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\geqslant 0}(\alpha^n - \beta^n)X^n$$

qui redonne la formule fermée pour les nombres de Fibonacci :

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

On va généraliser les deux méthodes que l'on vient de voir dans les deux sections qui suivent.

I.2.2 Récurrences linéaires (à coefficients constants)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé et pour tout k-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ de $\mathbb{C}^k$, appelons $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$(\star_k) \qquad a_{n+k} = \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \ldots + \alpha_{k-1} a_{n+k-1}$$

Les éléments de $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ sont des suites récurrentes d'ordre k : elles sont entièrement définies par la donnée de leur k premiers termes a_0, a_1, …, a_k. Come dans le cas des suites de Fibonacci (suite récurrente d'ordre 2), on vérifie facilement que $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ (a_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Ainsi, $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k dont on va trouver une base en cherchant des suites géométriques solutions de $(\star_k)$:

$$\begin{aligned}(\lambda^n)_{n\geqslant 0} \text{ est solution de } (\star_k) &\iff \lambda^{n+k} = \alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n+1} + \alpha_2\lambda^{n+2} + \ldots + \alpha_{k-1}\lambda^{n+k-1} \\ &\iff \lambda^n(\lambda^k - \alpha_0 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 - \ldots - \alpha_{k-1}\lambda^{k-1}) = 0\end{aligned}$$

On est ainsi ramené à considérer les racines de

$$P(\lambda) = \lambda^k - \alpha_0 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 - \ldots - \alpha_{k-1}\lambda^{k-1}$$

qui est appelé `polynôme caractéristique` associé à la récurrence $(\star_k)$. Si toutes les racines de P sont simples, on obtient aussitôt n suites récurrentes dont on vérifie sans difficultés qu'elles sont linéairement indépendantes. Lorsqu'une racine λ est de multiplicité $m > 1$, on vérifie qu'elle donne lieu aux suites linéairement indépendantes données par les termes géneraux :

$$\lambda^n,\ n\lambda^n,\ \ \ldots\ \ ,n^{m-1}\lambda^n$$

(on laisse la vérification en exercice). En résumé, on a obtenu le résultat suivant :

Théorème I.22 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soient λ_1, λ_2, ..., λ_t les t racines de*

$$P(\lambda) = \lambda^k - \alpha_0 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 - \ldots - \alpha_{k-1}\lambda^{k-1}$$

de multiplicité, respectivement, m_1, m_2, ..., m_t. L'ensemble $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, solutions de

$$(\star_k) \qquad a_{n+k} = \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \ldots + \alpha_{k-1} a_{n+k-1}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k dont une base et donnée par les k suites de terme général

$$\lambda_1^n,\ n\lambda_1^n,\ \ \ldots\ \ ,n^{m_1-1}\lambda^n, \lambda_2^n,\ n\lambda_2^n,\ \ \ldots\ \ ,n^{m_2-1}\lambda^n,\ \ \ldots,\ \ \ldots,\ \ \ldots, \lambda_t^n,\ n\lambda_t^n,\ \ \ldots\ \ ,n^{m_t-1}\lambda^n$$

Remarque I.23 *En reprenant les notations du Théorème I.22, on a bien entendu $m_1+m_2+\ldots+m_t = k$.*

Exemples I.3 *1. Cherchons l'ensemble de suites solutions de la récurrence*

$$(1) \qquad a_{n+3} = 12a_n - 4a_{n+1} + 3a_{n+2}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = (\lambda^2 - 4)(\lambda - 3) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ et l'ensemble $SR(12, -4, 3)$ est constitué des suites $(a_n)_{\geqslant 0}$ telles que

$$\exists\,(A, B, C) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = 2^n A + (-2)^n B + 3^n C$$

2. Cherchons l'ensemble de suites solutions de la récurrence

$$(2) \qquad a_{n+3} = 8a_n - 12a_{n+1} + 6a_{n+2}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$ et l'ensemble $SR(8, -12, 6)$ est constitué des suites $(a_n)_{\geqslant 0}$ telles que

$$\exists\,(A, B, C) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = (A + nB + n^2C)\, 2^n$$

Si l'on veut connaître une suite récurrente particulière, il suffit de rajouter les « conditions initiales » :

Exemples I.4 *Cherchons la suite solution de la récurrence*

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{n+3} = -2a_n + 3a_{n+1} \\ \text{avec } a_0 = 3,\ a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 8 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$ et l'ensemble $SR(-2, 3, 0)$ est constitué des suites $(a_n)_{\geqslant 0}$ telles que

$$\exists\,(A, B, C) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = A + nB + (-2)^n C$$

Ensuite, du système

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ A + B - 2C = 1 \\ A + 2B + 4C = 8 \end{cases}$$

on déduit $A = 2$, $B = 1$ et $C = 1$. La solutions de (3) est donc la suite $(a_n)_{\geqslant 0}$ de terme général

$$a_n = 2 + n + (-2)^n$$

Remarque I.24 *On a énoncé le cas général en considérant des récurrences linéaires à coefficients complexes. Il va de soi qui tout ce qui a été dit sur la structure d'espace vectoriel de l'ensemble* $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ *reste vrai en remplaçant* $\mathbb{R}$ *par* $\mathbb{C}$ *: si* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$*, alors* $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* k *(et c'est ce résultat que l'on utilisé dans les Exemples I.3 et I.4. La formulation dans* $\mathbb{C}$ *est plus générale mais permet surtout de parler des* k *racines (en comptant chaque racine avec sa multiplicité) du polynôme caractéristique (qui est de degré* k*). Ainsi, même si on prend* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$*, il est plus simple de résoudre dans* $\mathbb{C}$*, quitte à revenir dans* $\mathbb{R}$ *en considérant, pour toute racine non réelle* λ *du polynôme caractéristique, les valeurs réelles* $\mathrm{Re}(\lambda)$ *et* $\mathrm{Im}(\lambda)$ *données par les parties réelle et imaginaire de* λ *(cf. Exemple I.5)*

Exemples I.5 *Cherchons la suite solution de la récurrence*

$$(4) \qquad a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ *et l'ensemble* $SR_{\mathbb{C}}(-1, -1)$ *est constitué des suites* $(a_n)_{\geqslant 0}$ *telles que*

$$\exists\, (A, B) \in \mathbb{C}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = A\lambda^n + B\overline{\lambda}^n$$

avec $\lambda = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$*. Si l'on veut se restreindre aux suites à coefficients réels, l'ensemble* $SR_{\mathbb{R}}(-1, -1) = SR_{\mathbb{C}}(-1, -1) \cap \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *est constitué des combinaisons linéaires (à coeffcients réels) des suites* $(a_n)_{\geqslant 0} = (\mathrm{Re}(\lambda n))_{\geqslant 0}$ *et* $(b_n)_{\geqslant 0} = (\mathrm{Im}(\lambda n))_{\geqslant 0}$*, soit encore*

$$\begin{cases} a_n = 1 \text{ si } n \equiv 0 \bmod 3 \\ a_n = -1/2 \text{ si } n \not\equiv 0 \bmod 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_n = 0 \text{ si } n \equiv 0 \bmod 3 \\ b_n = \sqrt{3}/2 \text{ si } n \equiv 1 \bmod 3 \\ b_n = -\sqrt{3}/2 \text{ si } n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

I.2.3 Fonctions génératrices

Soit $(a_n)_{\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. La série *formelle*

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$$

est appelée `fonction génératrice (ordinaire)` (ou `série génératrice) de la suite` $(a_n)_{\geqslant 0}$.

NOTA BENE : Une série formelle est simplement une façon d'encoder les termes d'une suite. A ce stade-là, elle n'est pas forcément la somme d'une fonction.

Séries formelles

Une `série formelle` à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ (ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans ces notes) est une expression du type

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{K} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On note $K[[X]]$ l'ensemble des éries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque I.25 *Ainsi,* $\sum_{n \geqslant 0} n! X^n \in \mathbb{R}[[X]]$ *est une série formelle (même si la série* $\sum_{n \geqslant 0} n! x^n$ *n'est la somme d'aucune fonction en dehors de 0. De ce point de vue là, une série formelle est simplement une façon d'encoder la suite formée de ses coefficients.*

Opérations sur les séries formelles

Soient $A(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ et $B(X) = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$ deux séries formelles dans $\mathbb{K}[[X]]$. Les opérations qui suivent ne font que retranscrire les opérations connues sur les suites. On note $1 \in \mathbb{K}[[X]]$ la série associée à la suite $(1, 0, 0, 0, ...)$ (suite dont tous les termes sont nuls, à l'exception du premier qui vaut 1).

a) Egalité : $A(X) = B(X) \Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$

b) Somme : $(A + B)(X) = A(X) + B(X) := \sum_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) X^n$

c) Multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ **:** $(\lambda A)(X) = \lambda A(X) := \sum_{n \geqslant 0} (\lambda a_n) X^n$

d) Produit : $(AB)(X) = A(X)B(X) := \sum_{n \geqslant 0} c_n X^n$ avec, pour tout n de $\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

e) Inverse : Si $b_0 \neq 0$, $\frac{1}{B}(X) = \frac{1}{B(X)}$ est la série telle que $\frac{1}{B}(X) \times B(X) = 1$

f) Quotient : Si $b_0 \neq 0$, $\frac{A}{B}(X) := \frac{A(X)}{B(X)} = A(X)\,\frac{1}{B(X)}$

g) Composition : Si $b_0 = 0$, $(A \circ B)(X) := A(B(X)) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \big(B(X)\big)^n$

h) Dérivation : La série dérivée de A est notée A' et est définie par $A'(X) = \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n\right)' := \sum_{n \geqslant 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} X^n$.

L'ensemble $\mathbb{K}[[X]]$ a donc une structure algébrique riche :

Proposition I.26 *i) Muni de la somme et de la mutiplication par les scalaires,* $\mathbb{K}[[X]]$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

ii) Muni de la somme et du produit, $\mathbb{K}[[X]]$ *est un anneau commutatif unitaire.*

iii) $\mathbb{K}[[X]]$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre commutative appelée* ***algèbre des séries formelles à une indéterminée sur*** $\mathbb{K}$.

La proposition qui suit justifie la définition qui a été donnée de l'inverse.

Proposition I.27 *La série formelle* $A(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ *admet un inverse si, et seulement si,* $a_0 \neq 0$ *(et, si l'inverse existe, il est unique).*

Preuve : Supposons que l'inverse de A existe, notons-le $\frac{1}{A}$ avec $\frac{1}{A}(X) = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$. On a donc $\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n\right)\left(\sum_{n \geqslant 0} b_n X^n\right) = 1$ et, d'après la définition du produit de séries formelles $1 = \sum_{n \geqslant 0} c_n X^n$ avec $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ pout tout $n \geqslant 0$. Pour $n = 0$, on obtient l'égalité $1 = a_0 b_0$ qui montre que $a_0 \neq 0$ (et $b_0 = \frac{1}{a_0}$). De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 = c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i} \implies b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$$

Les égalités $b_0 = \frac{1}{a_0}$ et $b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$ pour $n \geqslant 1$ montre l'unicité de l'inverse (lorsqu'il existe).

Réciproquement, si l'on pose $b_0 = \frac{1}{a_0}$ et $b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$ pour $n \geqslant 1$ si $a_0 \neq 0$, il est clair d'après ce qui vient d'être dit que $B(X) = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$ est l'inverse de A. □

Exemple I.3 *Cet exemple est fondamental (même s'il n'est pas très nouveau...) :*

$$\frac{1}{1 - X} = \sum_{n \geqslant 0} X^n$$

Autrement dit, la série formelle $1 - X$ *est l'inverse de la série formelle associée à la suite* $(1, 1, 1, 1...)$*, la suite constante de valeur 1. On note que ce résultat découle de la définition du produit dans* $\mathbb{K}[[X]]$ *puisque*

$$(1 - X) \sum_{n \geqslant 0} X^n = \sum_{n \geqslant 0} X^n - \sum_{n \geqslant 0} X^{n+1} = 1 + \sum_{n \geqslant 0} X^n - \sum_{n \geqslant 0} X^n = 1$$

Applications aux comptages

Exemple I.4 *On cherche ici une formule « close » (ou fermée) pour la suite* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par*

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 100 \\ a_0 = 50 \end{cases}$$

On pose alors

$$f(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$$

et on a

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}X^{n+1} & = & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 4a_nX^{n+1} - \sum_{n\geqslant 0} 100X^{n+1} \\ \iff \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n - a_0 & = & \displaystyle 4X\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n - 100X\sum_{n\geqslant 0} X^n \end{array}$$

soit $f(X) - a_0 = 4Xf(X) - 100X\dfrac{1}{1-X}$ *dont on déduit*

$$f(X) = \frac{a_0}{1-4X} - \frac{100X}{(1-X)(1-4X)}$$

On effectue alors le décomposition en éléments simples

$$\frac{100X}{(1-X)(1-4X)} = \frac{A}{1-X} + \frac{B}{1-4X}$$

Recherche de A et B : $\begin{cases} \times(1-X) \text{ puis } X = 1 \text{ implique } A = -100/3 \\ \times(1-4X) \text{ puis } X = 1/4 \text{ implique } B = \frac{25}{3/4} = 100/3 \end{cases}$

On trouve donc

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & \displaystyle\left(a_0 - \frac{100}{3}\right)\frac{1}{1-4X} + \frac{100}{3}\frac{100X}{1-X} \\ & = & \displaystyle\left(50 - \frac{100}{3}\right)\sum_{n\geqslant 0}(4X)^n + \frac{100}{3}\sum_{n\geqslant 0} X^n \\ & = & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{50}{3}\times 4^n + \frac{100}{3}\right)X^n \end{array}$$

dont on déduit

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}\left(50 \times 4^n + 100\right) \quad \text{pour tout } n \geqslant 0}$$

Généralisation des coefficients binomiaux

Soit $k \geqslant 0$ entier, nous savons que

$$f(X) = (1+X)^k$$

est la fonction génératrice associée à la suite des coefficients binomiaux $\begin{cases} a_n = \dbinom{k}{n} \text{ si } n \in [\![0, k]\!] \\ a_n = 0 \text{ si } n > k \end{cases}$

Proposition-définition I.28 *Par extension, pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et pour tout* $n > 0$ *entier, on pose*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ \ldots\ (\alpha-n+1)}{n!}$$

et on pose également $\dbinom{\alpha}{0} := 1$. *On a alors*

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n\geqslant 0}\binom{\alpha}{n}X^n$$

C'est la `formule du binôme généralisée`.

Preuve : Rappelons que si f est une fonction qui admet un développement en série entière $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_k z^k$ pour $|z| < R$ et $R > 0$, on a alors :

$$f^{(n)}(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)z^{k-n}$$

et, pour $z = 0$, $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, soit encore

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

A présent, si on considère $f(z) = (1+z)^\alpha$ (qui converge pour $|z| < 1$), on a

$$f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$$

et pour $z = 0$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

dont on déduit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

et

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} X^n$$

□

Exemples I.6

<u>$\alpha = 0$ **et** $\in \mathbb{N}^*$</u> **:** $\binom{0}{n} = 0$

<u>$\alpha = i \in [\![1, n-1[\![$</u> **:** $\binom{i}{n} = 0$

<u>$\alpha = n$</u> **:** $\binom{n}{n} = 1$

<u>$\alpha = -1$</u> **:** $\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n$

Et on note par exemple que

$(1+x)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots$

$(1-x)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n (-x)^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots$

<u>$\alpha = -\frac{1}{2}$</u> **:** $\binom{-1/2}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$

En effet :

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \dots \times \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{2n} \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!\, n!} \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Et on note en particulier que

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{-1/2}{n}(-4x)^n = \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$$

Autrement dit, $F(x) = (1-4x)^{-1/2}$ *est la fonction génératrice de* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $a_n = \binom{2n}{n}$.

Proposition I.29 $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$, $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(n)(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} \\
&= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}
\end{aligned}$$

□

Les nombres de Catalan

Il s'agit des nombres C_0, C_1, C_2, C_3, …, définis par $\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \end{cases}$.

On a donc

$$\begin{cases}
C_1 = C_0C_0 = 1 \\
C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 2 \\
C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 5 \\
C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 2(C_0C_3 + C_1C_2) = 14 \\
C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 2(C_0C_4 + C_1C_3) + C_2C_2 = 42
\end{cases}$$

et on note $C(X) = \sum_{n\geqslant 0} C_n X^n$ la fonction génératrice associée.

Expression de la fonction génératrice $C(X)$

On remarque que

$$\begin{aligned}
C(X)^2 &= \left(\sum_{n\geqslant 0} C_n X^n\right)^2 \\
&= \sum_{n\geqslant 0} Q_n X^n \qquad \text{avec } Q_n = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = C_{n+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} C_{n+1} X^n
\end{aligned}$$

Ainsi, $C(X) = \sum_{n\geqslant 0} C_n X^n = C_0 + \sum_{n\geqslant 1} C_n X^n = C_0 + X \sum_{n\geqslant 0} C_{n+1} X^n = C_0 + XC(X)^2$ et de

$$XC(X)^2 - C(X) + 1 = 0$$

on déduit

$$C(X) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2X}$$

et donc, en tenant compte de $C(0) = C_0 = 1$:

$$C(X) = \frac{1 - \sqrt{1-4X}}{2X}$$

car $\dfrac{1-\sqrt{1-4X}}{2X}$ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1 tandis que $\dfrac{1+\sqrt{1-4X}}{2X}$ n'admet pas de prolongement par continuité en 0. D'après la Proposition I.28, on a

$$\sqrt{1-4X} = (1-4X)^{1/2} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} (-4X)^n$$

avec

$$\begin{aligned}
(-4)^n \binom{1/2}{n} &= (-4)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \ldots \times \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \\
&= (-4)^n \frac{(1) \times (-1) \times (-3) \times \ldots \times (-2n+3)}{2^n\, n!} \\
&= -2^n \frac{(1) \times (1) \times (3) \times \ldots \times (2n-3)}{n!} \\
&= -2^n \frac{(2n-2)!}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n-2) \times n!} \\
&= -2^n \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} \times (n-1)! \times n!} \\
&= -2 \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}
\end{aligned}$$

Et finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
C(X) &= \frac{1}{2X} \left(1 - \left(1 + \sum_{n\geqslant 1} \binom{1/2}{n} (-4)^n \right) \right) \\
&= \frac{2}{2X} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} X^n \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2} X^{n-1} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k+1} \frac{(2k)!}{k!\,k!} X^k
\end{aligned}$$

dont on déduit l'expression des nombres de Catalan :

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0}$$

Autres applications

Pour $I \subset \mathbb{N}$, on pose $F_I(X) := \sum_{n\in I} X^n$. Par exemple, $X + X^2 + X^5 + X^{11} = F_{\{1,2,5,11\}}(X)$.

Théorème I.30 *Soient I_1, I_2, …, $I_k \subset \mathbb{N}$ et $P = F_{I_1} F_{I_2} \ldots F_{I_k}$. Alors*

$$P(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$$

où a_n est le nombre de k-uplets d'entiers $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ tels que $\begin{cases} n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \\ \forall\, i \in [k],\ n_i \in I_i \end{cases}$.

Preuve : Le produit $P(X) = \left(\sum_{n\in I_1} X^n\right)\left(\sum_{n\in I_2} X^n\right)\ldots\left(\sum_{n\in I_k} X^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ est une somme de monômes $X^{n_1}X^{n_2}\ldots X^{n_k}$ avec $n_j \in I_j$ pour tout $j \in [k]$. le coefficient a_n de X^n est donc le nombre de k-uplets d'entiers $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ tels que $\left\{\begin{array}{l} n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \\ \forall\, i \in [k],\ n_i \in I_i \end{array}\right.$. □

Exemple I.5 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de k-uplets $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \{0,1\}^k$ tels que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ est bien entendu égal à 0 si $k < n$ et à $\binom{k}{n}$ si $k \geqslant n$. Le Théorème I.30 dit que $\binom{k}{n}$ est le coefficient de X^n dans $(1+X)(1+X)\ldots(1+X) = (1+X)^k$ (ce qui n'est pas une nouveauté...).*

Exemple I.6 $F(X) = (1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(X+X^2+X^3)(X^2+X^3+X^4+X^5+X^6)(X^5+X^6+X^7) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ *est la fonction génératrice de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ où a_n est le nombre de quadruplets $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4$ tels que*

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n \\ 0 \leqslant a_1 \leqslant 5,\ 1 \leqslant a_2 \leqslant 3,\ 2 \leqslant a_3 \leqslant 6,\ 5 \leqslant a_4 \leqslant 7 \end{array}\right.$$

I.3 Principes ou méthodes

I.3.1 Preuves par bijection

Par définition, deux ensembles A et B ont même cardinal (ou sont équipotents) s'il existe une bijection de l'un des deux ensembles vers l'autre.

principe **1** *Soient A et B deux ensembles. Si $BIJ(A,B) \neq \varnothing$, alors $|A| = |B|$.*

Selon ce principe, pour dénombrer les éléments d'un ensemble, il suffit d'établir une bijection entre cet ensemble et un autre ensemble dont on connaît déjà le cardinal. On a déjà utilisé cette méthode, par exemple dans les preuves des Théorème I.14 et Proposition I.16. ; voici un autre exemple

Exemple I.7 *Combien d'éléments de $\mathscr{P}_k([n])$ ne contiennent pas deux entiers consécutifs ?*

On cherche le cardinal de l'ensemble

$$\mathscr{A}_{k,n} = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_k),\ \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset [n],\ a_i \leqslant a_{i+1} - 2 \text{ pour } i \in [k-1]\big\}$$

Utilisant $a_i < a_{i+1} - 1$ pour $i \in [k-1]$, on va montrer que l'application suivante H est une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_{k,n} & \longrightarrow & \mathscr{P}_k([n-k+1]) \\ (a_1, a_2, \ldots, a_k) & \longmapsto & \{a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k - k + 1\} \end{array}$$

H **est bien définie :** *Si $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k - k + 1)$, alors $a_1 = b_1 \geqslant 1$, $b_k = a_k - k + 1 \leqslant n - k + 1$ (car $a_k \leqslant n$) et $b_{k+1} - b_k = (a_{k+1} - k) - (a_k - (k-1)) = (a_{k+1} - a_k) - 1 \geqslant 2 - 1 = 1$. Ceci montre bien que $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \in \mathscr{P}_k([n-k+1])$.*

H **est bijective** *car on vérifie de la même manière que, si $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \in \mathscr{P}_k([n-k+1])$ et $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, alors $K : \mathscr{P}_k([n-k+1]) \longrightarrow \mathscr{A}_{k,n}$ définie par*

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \mapsto (b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, \ldots, b_k + k - 1)$$

est bine définie et est telle que $H \circ K = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}_k([n-k+1])}$ et $K \circ H = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}_{k,n}}$.

La conclusion est que $|\mathscr{A}_{k,n}| = |\mathscr{P}_k([n-k+1])| = \binom{n-k+1}{k}$. Ce nombre est nul si $n-k+1 < k$, i.e. $n \leqslant 2k - 2$.

I.3.2 Le principe des bergers

PRINCIPE **2** *Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application. Si $|f^{-1}(\{b\})| = |f^{-1}(\{b'\})|$ pour tous $b, b' \in B$, alors $|A| = \alpha\,|B|$ où $\alpha = |f^{-1}(\{b\})|$ pour tout b de B.*

PREUVE : Pour toute application $f : A \to B$, on a une relation d'équivalence $\sim$ sur A :

$$\forall\, a, a' \in A, \quad a \sim a' \iff f(a) = f(a')$$

(la réflexivité, la symétrie et la transitivité de $\sim$ sont évidentes). La classe d'équivalence de $a \in A$ est $f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)$. Comme pour toute relation d'équivalence, $A = \bigsqcup_{a\in A} f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)$ est l'union disjointe des classes d'équivalences et, en particulier, $|A| = \sum_{a\in A} \big|f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)\big|$. Ainsi, si on suppose que $\alpha = |f^{-1}(\{b\})|$ pour tout b de B, $|A| = \sum_{b\in B} |f^{-1}(f(b))| = \alpha|B|$. □

Pour les bergers, B est l'ensemble des moutons et A, celui des pattes de moutons (et $\alpha = 4$...). On a déjà utilisé ce principe dans la preuve de la Proposition I.9. De façon générale, ce principe permet de conclure lorsqu'on a une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble X dont toutes les classes d'équivalences ont même cardinal on applique alors le principe des bergers avec $A = X$ et $B = X/\mathcal{R}$, l'espace quotient). Un autre exemple bien connu (et très important) est donné par le Thèorème de Lagrange qui affirme que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre d'un groupe :

Exemple I.8 Théorème de Lagrange *Soit G un groupe fini. Pour tout sous-groupe H de G, $|H|$ divise $|G|$.*

PREUVE : *La relation dans G fini*

$$x\mathcal{R}y \iff \exists\, h \in H,\ x = yh$$

est une relation d'équivalence ($x\mathcal{R}x$ car $x = xe$ avec $e \in H$, $x = yh$ avec $h \in H$ implique $y = xh^{-1}$ avec $h^{-1} \in H$, $x = yh$ et $y = zh'$ avec $h, h' \in H$ impliquent $x = zh'h$ avec $hh' \in H$) dont les classes d'équivalences sont les gH, $g \in G$. Deux classes d'équivalences quelconques sont équipotentes puisque, pour tous $g, g' \in G$, l'application

$$\begin{array}{rccc} H_{g'g^{-1}} & : & gH & \longrightarrow & g'H \\ & & x & \longmapsto & g'g^{-1}x \end{array}$$

est clairement bijective (son inverse est $H_{gg'^{-1}}$. En particulier, toutes les classes d'équivalence ont même cardinal que $eH = H$, soit $|H|$. Le lemme des bergers permet de conclure que $|G| = |H||G/\mathcal{R}|$ et de conclure que $|H|$ divise $|G|$.

I.3.3 Doubles comptages

PRINCIPE **3** *Soit A un ensemble. Si un premier dénombrement des éléments de A mène à la valeur N et si un second dénombrement des éléments de A mène à la valeur M, alors $N = M = |A|$.*

Nous avons déjà utilsé ce principe pour établir quelques égalités entre coeffcients binomiaux (cf. Propriétés I.12). Voici une autre illustration :

Exemple I.9 *Dans un tournoi, chaque participant joue un match contre chaque autre participant. Un match rapporte 1 point au gagnant et 0 point au perdant. Un match nul rapporte 0,5 point à chacun des deux joueurs. Pour chaque joueur, le but du tournoi est de gagner le plus possible de points et on établit un classement par nombres décroissants de points gagnés.*

A la fin du tournoi, on note que chacun des participants a remporté la moitié de ses points contre les dix derniers du classement.

Combien de joueurs participaient au tournoi ?

SOLUTION : *Soit k le nombre de joueurs qui participaient au tournoi et on note $\mathcal{J}$, l'ensemble des joueurs (on a donc $|\mathcal{J}| = k$). On va faire un double comptage sur le nombre de points N distribués sur l'ensemble de tous les matches du tournoi.*

1er comptage de N : *$N = \binom{k}{2}$ puisqu'il y a $\binom{k}{2}$ matches joués et un point distribué par match.*

2d comptage de N : *Soit $\mathcal{D} = \{J_1, J_2, \ldots, J_{10}\}$ l'ensemble des dix derniers joueurs du tournoi.*

- *$\mathcal{D}$ contribue pour $\binom{10}{2} = 45$ à N pour les matches entre joueurs de $\mathcal{D}$.*
- *Mais l'hypothèse selon laquelle chacun des participants a remporté la moitié de ses points contre les dix derniers du classement, montre que 45 est la moitié des points rapportés par les 10 derniers joueurs : autrement dit, les matches avec au moins un joueur de $\mathcal{D}$ contribuent pour 90 à N.*
- *Il reste donc à évaluer le nombre de points apportés par les matches entre joueurs de $\mathcal{J}\backslash\mathcal{D}$. Ce nombre est égal à $\binom{|\mathcal{J}\backslash\mathcal{D}|}{2} = \binom{k-10}{2} = \frac{(k-10)(k-11)}{2}$. Toujours selon l'hypothèse selon laquelle chacun des participants a remporté la moitié de ses points contre les joueurs de $\mathcal{D}$, la contribution de $\mathcal{J} - \mathcal{D}$ à N est donc de $(k-10)(k-11)$.*
- *Par double comptage, on a donc $N = 90 + (k-10)(k-11) = \frac{k(k-1)}{2}$. On en déduit $2(k^2 - 21k + 200) = k^2 - k$, puis $k^2 - 41k + 400 = 0$, soit encore $(k-16)(k-25) = 0$ (le discriminant vaut 81). Pour $k = 16$, les 6 premiers joueurs totalisent $(16-10)(16-11) = 30$ points (soit 6 points en moyenne) tandis que les 10 derniers joueurs totaliseraient 90 points (soit 9 points en moyenne) ; c'est impossible.*

  La conclusion est donc qu'il y avait 25 joueurs.

I.3.4 Le principe des tiroirs

PRINCIPE **4** *Soient A et B deux ensembles avec $|A| > |B|$. Alors, pour toute application $f : A \to B$, il existe $b \in B$ tel que $\left|f^{-1}(\{b\})\right| \geqslant 2$.*

PREUVE : Si on suppose que $\left|f^{-1}(\{b\})\right| \leqslant 1$ pour tout b de B, alors on a

$$|A| = \left|\bigsqcup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})\right| = \sum_{b\in B} \left|f^{-1}(\{b\})\right| \leqslant \sum_{b\in B} 1 = |B|$$

ce qui contredit $|A| > |B|$. □

Exemple I.10 *Voici une illustration de l'usage du principe des tiroirs (on rappelle que $[k]^+ = [\![0,k]\!]$) :*

Théorème I.31 (Théorème des restes chinois) *Soient m, n deux entiers premiers entre eux, $a \in [m-1]^+$ et $b \in [n-1]^+$. Alors, il existe un entier x solution de*

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} x \equiv a \bmod m \\ x \equiv b \bmod n \end{cases}$$

PREUVE : *Une solution du système $(\mathcal{S})$ sera donnée par un entier de la liste suivante (d'entiers congrus à a modulo m) :*

$$a,\ a+m,\ a+2m,\ a+3m,\quad \ldots\quad ,\ a+(n-2)m,\ a+(n-1)m$$

qui est congru à b modulo n. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'aucun de ces entiers n'est congru à b modulo n. Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $r_j \equiv a + jm \bmod n$ avec $r_j \in [\![0, n-1]\!]$ (autrement dit, r_j est le reste de la division euclidienne de $a + m_j$ par n). Les n valeurs $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ sont dans l'ensemble $[\![0, n-1]\!]\backslash\{b\}$ de cardinal $n-1$. D'après le principe des tiroirs, il existe donc $i, j \in [\![0, n-1]\!]$ avec $i < j$ tels que $r_i = r_j$ (et notons $r = r_i = r_j$). De $a + im \equiv r \bmod n$ et $a + jm \equiv r \bmod n$, on déduit $(a+jm) - (a+im) \equiv 0 \bmod n$, soit encore $(j-i)m \equiv 0 \bmod n$. Ainsi, n divise $(j-i)m$ et, comme m et n sont premiers entre eux, on peut conclure (Lemme de Gauss) que n divise $j-i$. Mais ceci est absurde car $0 < j-i < n$. On peut donc conclure que le système (S) admet une solution.

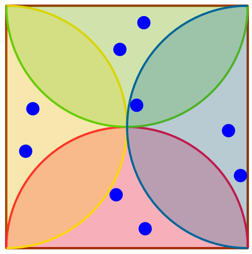
NOTA BENE *: Le Théorème des restes chinois est en fait plus précis puisqu'il précise que deux solutions quelconques diffèrent d'un multiple de mn mais cela s'obtient automatiquement puisque deux solutions de $(\mathcal{S})$ différant d'un multiple de m et d'un multiple de n, elles diffèrent forcément (à nouveau par le Lemme de Gauss) d'un multiple de mn.* □

Le principe des tiroirs dit que si n chaussettes sont rangées dans k tiroirs et si $n > k$, au moins un des tiroirs contient au moins deux chaussettes. On utilisera en fait souvent la forme suivante du principe des tiroirs (dont la preuve est similaire) :

PRINCIPE **5 (principe des tiroirs généralisé)** *Soient A et B deux ensembles et $k \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $|A| > k|B|$. Alors, pour toute application $f : A \to B$, il existe $b \in B$ tel que $\left|f^{-1}(\{b\})\right| \geqslant k+1$.*

Exemple I.11 *Soient 9 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon $\frac{1}{2}$ qui contient au moins 3 de ces 9 points).*

SOLUTION : *Par application du principe des tiroirs (généralisé), cela découle du fait que $9 > 4 \times 2$ où 4 est ici le nombre de demi-disques qui recouvrent le carré (chacun ayant pour diamètre un côté du carré).*



Exemple I.12 *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n entiers positifs ou nuls. Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble de l'ensemble de ces nombres dont la somme des éléments est divisible par n.*

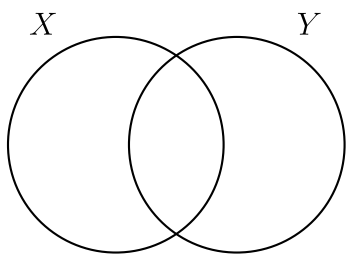
SOLUTION : *Comme 0 est un multiple de n, on peut supposer que les a_i sont non nuls et deux à deux distincts (le résultat étant évident dans le cas contraire). Considérons les nombres b_i (également deux à deux distincts) définis par $b_1 = a_1$ et $b_i = b_{i-1}+a_i$ pour i allant de 2 à n (on a donc $b_i = a_1+a_2+\ldots+a_i$). Si l'un de ces nombres est divisible par n, on a trouvé ce que l'on cherchait. Si aucun n'est divisible par n, on considère alors les restes $\overline{b_1}$, $\overline{b_1}$, $\ldots$, $\overline{b_n}$ de ces nombres modulo n. Comme on a n nombres et qu'ils ne peuvent prendre que $(n-1)$ valeurs (de 1 à $(n-1)$), il existe (*principe des tiroirs*) i et j distincts tels que $b_j - b_i$ soit divisible par n. Mais cela signifie (en supposant $j > i$) que n divise $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ et termine donc la preuve.*

REMARQUE : *On a en fait montré que le sous-ensemble cherché peut être indexé par une suite d'entiers consécutifs.*

I.3.5 Le principe d'inclusion-exclusion (PIE) ou « formule du crible »

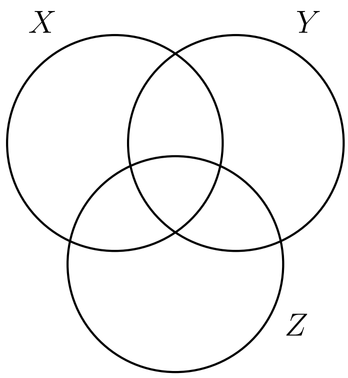
Le `principe d'inclusion-exclusion` (aussi appelé `formule du crible`) donne le cardinal d'une union à partir des cardinaux de chacun des ensembles dont il est l'union. Par exemple, le cardinal de $X \cup Y$ se déduit des cardinaux de X, Y et $X \cap Y$:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$



Le principe est simple : on compte les éléments de X, ceux de Y et on enlève ceux de l'intersection (pour ne pas les compter deux fois). La principe se généralise au cas de trois ensembles : on compte les éléments de X, ceux de Y et ceux de Z puis on enlève ceux qu'on a comptés deux fois mais il faut alors rajouter ceux qu'on avait initialement compter trois fois (i.e. ceux qui sont dans les trois ensembles) :

$$\begin{aligned}|X \cup Y \cup Z| &= |X| + |Y| + |Z| \\ &\quad - \big(|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z| \big) \\ &\quad + |X \cap Y \cap Z|\end{aligned}$$



Le PIE ne fait que généraliser ces comptages.

Soit n un entier strictement positif et $\{X_i, i \in [n]\}$ une famille de n ensembles. On introduit la notation suivante : pour $J \subset [n]$, on note $X_J := \bigcap_{k \in J} X_k$ (par exemple $X_{\{1,3\}} = X_1 \cap X_3$ et $X_{\{1,3,4,6\}} = X_1 \cap X_3 \cap X_4 \cap X_6$) et pour k allant de 1 à n, $\alpha_j := \sum_{\substack{J \subset I \\ |J| = j}} |X_J|$. Par exemple :

$$\alpha_1 = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|\,, \qquad \alpha_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |X_i \cap X_j|\,, \qquad \alpha_3 = \sum_{1 \leqslant i < j < l \leqslant n} |X_i \cap X_j \cap X_l|\,, \qquad \ldots$$

Théorème I.32 (Principe d'inclusion-exclusion, PIE 1)
Pour toute famille $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'ensembles finis

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \alpha_j = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n \qquad (PIE\ 1)$$

Preuve : Soit $x \in X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. Il suffit de montrer que sa contribution dans le membre de droite de l'égalité (PIE) vaut 1. Notons $k = |\{X_i,\ x \in X_i\}|$, le nombre d'ensembles X_i auxquels x appartient. On a ainsi :

— x contribue avec la valeur k dans α_1

— x contribue avec la valeur $\binom{k}{2}$ dans α_2 (car il y a $\binom{k}{2}$ sous-ensembles de $\{X_i,\ x \in X_i\}$ de cardinal 2).

— x contribue avec la valeur $\binom{k}{3}$ dans α_3 (car il y a $\binom{k}{3}$ sous-ensembles de $\{X_i,\ x \in X_i\}$ de cardinal 3).

— ...

— x contribue avec la valeur $\binom{k}{l}$ dans α_l (car il y a $\binom{k}{l}$ parties de $\{X_i,\ x \in X_i\}$ de cardinal $l \leqslant k$).

— ...

— x contribue avec la valeur $1 = \binom{k}{k}$ dans α_k car x est dans une seule intersection X_J avec $|J| = k$.

— x contribue avec la valeur 0 dans α_l, $l > k$ car x n'est dans aucune intersection X_J avec $|J| > k$.

Finalement, la contribution de x dans le membre de droite de l'égalité $(PIE\ 1)$ est

$$\begin{aligned}\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} &= 1 - 1 + \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} \\ &= 1 - \left(1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k}\binom{k}{k}\right) \\ &= 1 - (1-1)^k \\ &= 1\end{aligned}$$

□

Théorème I.33 (Principe d'inclusion-exclusion, PIE 2)
Pour toute famille $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de sous-ensembles d'un ensemble fini X,

$$|X\backslash(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n)| = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \alpha_j = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^n \alpha_n \qquad (PIE\ 2)$$

en posant $\alpha_0 = |X|$.

Preuve : Cela découle du Théorème I.32 puisque que parmi les α_0 éléments dans X, il y en a $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ qui sont dans la réunion $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. □

Si X et Y sont deux ensembles, on note $\mathrm{SURJ}(X, Y)$ l'ensemble des surjections de X sur Y. Nous ne connaissons pas de formule explicite pour le nombre de surjections mais le PIE permet cependant d'affirmer :

Proposition I.34 *Si X et Y sont deux ensembles finis de cardinal, respectivement, k et n, alors*

$$|\mathrm{SURJ}(X, Y)| = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(n-i)^k\binom{n}{i}$$

Preuve : On va noter $|\mathrm{SURJ}(X, Y)| = \sigma(k, n)$. On rappelle que Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y et que son cardinal est $|Y|^{|X|} = n^k$. On peut poser $Y = [n]$ et pour $i \in [n]$, soit $A_i = \{f; f \in Y^X \text{ et } f^{-1}(\{i\}) = \varnothing\}$ l'ensemble des applications de X dans Y qui ne prennent la valeur i en aucune valeur de X. Par définition des A_i, une surjection de X sur Y est une application de X dans Y qui n'est dans aucun A_i. On a donc $\sigma(k, n) = |Y^X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ et, d'après le principe d'inclusion-exclusion :

$$\sigma(k, n) \; = \; |Y^X| - \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\mathcal{A}_i \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{A}_i := \sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_i\}\in\mathscr{P}_i([n])}|A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_i}|$$

Si k_1, k_2, …, k_i sont i entiers deux à deux distincts, il existe $(n-i)^k$ applications de $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ dans $Y\backslash\{k_1, k_2, \ldots, k_i\}$. Comme il y a $\binom{n}{i}$ choix pour les nombres k_1, k_2, …, k_i, on en déduit que $\mathcal{A}_i = (n-i)^k\binom{n}{i}$ et $\sigma(k, n) \; = \; n^k - \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(n-i)^k\binom{n}{i}$, soit encore

$$\sigma(k, n) \; = \; \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(n-i)^k\binom{n}{i}$$

□

Remarques I.35 1. *On note que si $|X| = k$ et $|Y| = n$, alors*

$$|\mathrm{SURJ}(X, Y)| = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(n-i)^k\binom{n}{i} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}j^k\binom{n}{j}$$

2. *On note également que pour $k = n$, on obtient une expression de la factorielle :*

$$n! = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}j^n\binom{n}{j}$$

Par exemple, pour $n = 4$, on trouve

$$-\binom{4}{1} + 2^4\binom{4}{2} - 3^4\binom{4}{3} + 4^4\binom{4}{4} = -4 + 16 \times 6 - 81 \times 4 + 256 = 24$$

3. *Enfin, on insiste sur le fait que la formule de la Proposition I.34 est valable sans conditions sur les cardinaux (finis) de X et Y. En particulier, si $k < n$, $\mathrm{SURJ}(X,Y) = \varnothing$ et on a donc*

$$k < n \implies \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} j^k \binom{n}{j} = 0$$

Par exemple, pour $k = 3$ et $n = 5$, on obtient :

$$-\binom{5}{1} + 2^3\binom{5}{2} - 3^3\binom{5}{3} + 4^3\binom{5}{4} - 5^3\binom{5}{5} = -5 + 8 \times 10 - 27 \times 10 + 64 \times 5 - 125 = 0$$

I.4 Partitions

Soit $n \in \mathbb{N}$.

I.4.1 Partitions d'un entier

Définition I.36 *Une partition de l'entier n en k parties, ou k-partition de n, est une suite d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_k$ telle que*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n \qquad \text{avec} \qquad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_{k-1} \geqslant m_k \geqslant 1$$

Une telle partition sera notée $[m_1, m_2, \ldots, m_k]$.

Exemple I.13 *Les 3-partitions de 7 sont* $[5,1,1]$, $[4,2,1]$, $[3,3,1]$ *et* $[3,2,2]$.

Les 4-partitions de 7 sont $[4,1,1,1]$, $[3,2,1,1]$, $[2,2,2,1]$.

Notations

— Une partition $[m_1, m_2, \ldots, m_k]$ de n sera également notée $[n_1^{i_1}, n_2^{i_2}, \ldots, n_l^{i_l}]$ où i_j est le nombre de fois qu'apparaît l'entier n_j. Par exemple, les quatre 3-partitions de 7 sont

$$[5, 1^2]\,, \quad [4,2,1]\,, \quad [3^2, 1]\,, \quad [3, 2^2]$$

et les trois 4-partitions de 7 sont $[4, 1^3]$, $[3, 2, 1^2]$ et $[2^3, 1]$. Il est clair que si $[n_1^{i_1}, n_2^{i_2}, \ldots, n_l^{i_l}]$ est une k-partition de n, alors $i_1 + i_2 + \ldots + i_l = k$ et $i_1 n_1 + i_2 n_2 + \ldots + i_l n_l = n$.

— On note $p_k(n)$ l'ensemble des k-partitions de n. Par exemple, $p_3(7) = 4$ et $p_4(7) = 3$.

— On note $p(n)$ l'ensemble des partitions de n.

Remarques I.37 1. *On a bien entendu $p_m(n) = 0$ si $m > n$.*

2. *Nous savons (cf. Théorème I.14 ii)) que le nombre de k-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ formés d'entiers strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ est $\binom{n-1}{k-1}$; ces k-uplets sont parfois appelés* **`décompositions de`** *n. Par exemple, pour $n = 7$ et $k = 4$, aux 4 partitions* $[5,1,1]$, $[4,2,1]$, $[3,3,1]$ *et* $[3,2,2]$ *correspondent les $\binom{6}{4} = 15$ décompositions*

   $(5,1,1)$, $(1,5,1)$, $(1,1,5)$
   $(4,2,1)$, $(4,1,2)$, $(2,1,4)$, $(2,4,1)$, $(1,2,4)$, $(1,4,2)$
   $(3,3,1)$, $(3,1,3)$, $(1,3,3)$
   $(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(2,2,3)$

   Les décompositions de n sont également encore appelées **`partitions ordonnées`**.

Contrairement aux partitions ordonnées (ou décompositions) d'un entier, nous ne connaissons pas de formule explicite pour le calcul du nombre de partitions. On a cependant la récurrence qui suit.

Proposition I.38 *Pour $n \geqslant k \geqslant 2$:*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

Tableau des nombres de partitions $p_k(n)$ pour $n \leqslant 9$

Il est clair que $p_1(n) = p_n(n) = 1$ pour tout n et on obtient ainsi les valeurs suivantes :

n	$p(n)$	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$p_3(n)$	$p_4(n)$	$p_5(n)$	$p_6(n)$	$p_7(n)$	$p_8(n)$	$p_9(n)$
1	1	1								
2	2	1	1							
3		1		1						
4		1			1					
5		1				1				
6		1					1			
7		1						1		
8		1							1	
9		1								1

Représentations graphiques des partitions

Les partitions sont représentées graphiquement soit par les `diagrammes de Ferrers`, soit par les `diagrammes de Young` :

FIGURE I.1 – Les diagrammes de Ferrers des 3-partitions de 7 : $[5, 1^2]$, $[4, 2, 1]$, $[3^2, 1]$ et $[3, 2^2]$

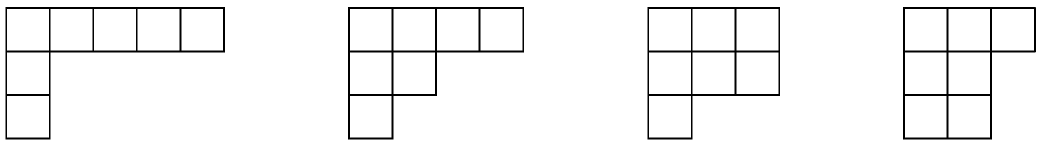


FIGURE I.2 – Les diagrammes de Young des 3-partitions de 7 : $[5, 1^2]$, $[4, 2, 1]$, $[3^2, 1]$ et $[3, 2^2]$

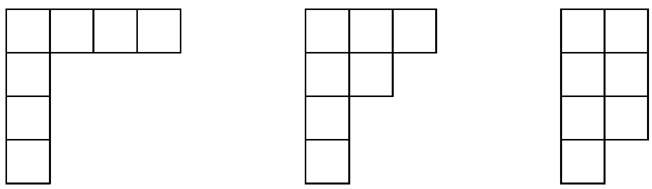


FIGURE I.3 – Les diagrammes de Young des 4-partitions de 7 : $[4, 1^3]$, $[3, 2, 1^2]$ et $[2^3, 1]$

I.4.2 Partitions d'un ensemble et nombres de Stirling de seconde espèce

Définition I.39 *Une* `partition` *d'un ensemble X est une famille $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\} \subset \mathscr{P}(X)$ de parties de X telle que*

1. *Pour tout i de $[k]$, $X_i \neq \varnothing$*
2. *Pour tout (i,j) de $[k] \times [k]$, $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$*
3. *$X = X_1 \cup X_2 \ldots \cup X_k = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$*

Les éléments d'une partition $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ seront appelés `blocs de la partition` *et une partition à k blocs sera appelée k*-`partition`.

Remarque I.40 *On note que « se donner une partition d'un ensemble X » équivaut à « se donner une relation d'équivalence sur X ». Toute partition de X définit la relation d'équivalence sur X « être dans le même bloc » (et les blocs de la partition sont alors les classes d'équivalences de cette relation d'équivalence). Réciproquement, les classes d'équivalence de toute relation d'équivalence sur X forment une partition de X.*

Exemple I.14 *Les partitions de $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$ sont*

1-partition : $\big\{\{1,2,3,4\}\big\}$

2-partitions : $\big\{\{1\},\{2,3,4\}\big\}$, $\big\{\{2\},\{1,3,4\}\big\}$, $\big\{\{3\},\{1,2,4\}\big\}$, $\big\{\{4\},\{1,2,3\}\big\}$, $\big\{\{1,2\},\{3,4\}\big\}$, $\big\{\{1,3\},\{2,4\}\big\}$, $\big\{\{1,4\},\{2,3\}\big\}$

3-partitions : $\big\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\big\}$, $\big\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\big\}$, $\big\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\big\}$, $\big\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\big\}$, $\big\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\big\}$, $\big\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\big\}$

4-partitions : $\big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\big\}$

Définition I.41 *Le nombre de partitions de $[n]$ en k blocs est noté $S(n,k)$. Les nombres $S(n,k)$ sont appelés* `nombres de Stirling de seconde espèce`.

Remarque I.42 *Les nombres $S(n,k)$ sont aussi parfois notés $\left\{ n \atop k \right\}$.*

Exemple I.15 *D'après l'Exemple I.14,*

$$S(4,1) = 1\,, \qquad S(4,2) = 7\,, \qquad S(4,3) = 6\,, \qquad S(4,4) = 1$$

Remarque I.43 *Pour tout entier $n > 0$, les valeurs suivantes sont évidentes*
- $S(n,1) = 1$
- $S(n,n) = 1$
- $S(n,k) = 0$ *si* $k > n$

Définition I.44 *Le nombre total de partitions de $[n]$ est noté $B(n)$.*
Les nombres $B(n)$ sont appelés `nombres de Bell`.

Remarque I.45 *D'après la Remarque I.40, $B(n)$ est donc le nombre de relations d'équivalence que l'on peut définir sur un ensemble de cardinal n.*

Exemple I.16 *D'après l'Exemple I.15, $B(4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.*

Rappelons que $SURJ([n],[k])$ désigne l'ensemble des applications sutjectives de $[n]$ dans $[k]$. Toute k-partition $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ de $[n]$ définit une surjection de $[n]$ sur $[k]$ (qui envoie $x \in X_i$ sur i). La proposition suivante précise la relation entre nombres de Stirling de seconde espèce et nombre de surjections :

Proposition I.46 $\big|SURJ([n],[k])\big| = k!\, S(n,k)$.

En tenant compte de la Proposition I.34, on a donc

$$S(n,k) \;=\; \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(k-i)^n\binom{k}{i} \;=\; \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}j^n\binom{k}{j}$$

Par ailleurs, comme pour les nombres de partitions d'un entier, on peut calculer les nombres de Stirling de seconde espèce à l'aide d'une relation de récurrence :

Proposition I.47 *Pour $n \geqslant k \geqslant 2$:*

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$$

Tableau des nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ et des nombres de Bell $B(n)$ pour $n \leqslant 9$

n	$B(n)$	$S(n,1)$	$S(n,2)$	$S(n,3)$	$S(n,4)$	$S(n,5)$	$S(n,6)$	$S(n,7)$	$S(n,8)$	$S(n,9)$
1	1	1								
2	2	1	1							
3		1		1						
4		1			1					
5		1				1				
6		1					1			
7		1						1		
8		1							1	
9		1								1

On note que les nombres de Bell vérifient aussi une relation de récurrence :

Proposition I.48 *En posant $B(0) = 1$, on a pour tout entier $n \geqslant 0$:*

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(k)$$

A présent, pour tout entier $k \geqslant 1$, nous introduisons la notation

$$x_{(k)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$$

et on pose également $x_{(0)} = 1$.

Théorème I.49 *Pour tout entier $n \geqslant 0$,*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, x_{(k)}$$

Corollaire I.50 *Pour les entiers $m, n \geqslant 0$*

$$m^n = \sum_{k=1}^{n} k!\, S(n,k)\binom{m}{k}$$

I.4.3 Permutations d'un ensemble et nombres de Stirling de première espèce

On rappelle que $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de l'ensemble $[n]$ (soit encore, l'ensemble des bijections de $[n]$ dans lui-même). Toute permutation admet une décomposition en un produit de cycles à support à support disjoints et cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Définition I.51 *Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sera dite de* `type cyclique` $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *si c_i est le nombre de i-cycles intervenant dans toute décomposition de σ en un produit de cycles à supports disjoints.*

Exemple I.17 *Voici quelques exemples dans $\mathcal{S}_9$:*
- $\sigma_1 = (341)(67)(5298)$ *est de type* $(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- $\sigma_2 = (341675298)$ *est de type* $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.
- $\sigma_3 = (34)(67)(52)$ *est de type* $(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- $\sigma_4 = (3416)(5298)$ *est de type* $(1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- $\sigma_5 = (5298)$ *est de type* $(5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Théorème I.52 *Dans $\mathcal{S}_n$, le nombre de permutations de type cyclique $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ est*

$$\frac{n!}{c_1!\, c_2! \, \ldots \, c_n!\, 1^{c_1}\, 2^{c_2} \, \ldots \, n^{c_n}}$$

On note qu'il est équivalent de se donner le type cyclique $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ou de se donner la partition de n définie par les cardinaux des supports des cycles à supports disjoints en lesquels σ se décompose. Si on reprend l'exemple précédent, on a

- $\sigma_1 = (341)(67)(5298)$ est de type $(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ou $[4, 3, 2]$.
- $\sigma_2 = (341675298)$ est de type $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ou $[9]$.
- $\sigma_3 = (34)(67)(52)$ est de type $(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ou $[2^3, 1^3]$.
- $\sigma_4 = (3416)(5298)$ est de type $(1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$ ou $[4^2, 1]$
- $\sigma_5 = (5298)$ est de type $(5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ou $[4, 1^5]$.

Le type cyclique d'une permutation de $\mathcal{S}_n$ est donc également donné par une partition de n.

Définition I.53 *Le nombre de permutations de $[n]$ dont la décomposition en un produit de k cycles à supports disjoints est noté $s(n, k)$.*

Les nombres $s(n, k)$ sont appelés `nombres de Stirling` <u>`non signés`</u> `de première espèce`.

Exemple I.18 *Pour $n \leqslant 4$, il est facile de calculer les nombres de Stirling de première espèce :*

n=1 $\mathcal{S}_1 = \{()\}$ *:* $s(1, 1) = 1$ *et* $s(1, k) = 0$ *si* $k > 1$.

n=2 $\mathcal{S}_2 = \{(), (12)\}$ *:* $s(2, 1) = s(2, 2) = 1$ *et* $s(2, k) = 0$ *si* $k > 2$ *; on note que* $s(2, 2) = 1$ *est donné par l'identité, soit encore* $()$ *ou encore* $(1)(2)$ *(produit de deux 1-cycles).*

n=3 $\mathcal{S}_3 = \{(), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ *:* $s(3, 3) = 1$, $s(3, 2) = 3$ *et* $s(3, 1) = 2$ *et* $s(3, k) = 0$ *si* $k > 3$ *; on note ici qu'une transposition* (ab) *est une permutation produit de deux cycles, à savoir* $(ab)(c)$ *avec* $a \neq b \neq c \neq a$.

n=4 *Dans $\mathcal{S}_4$ vu comme ensemble des permutations de $\{a, b, c, d\}$ de cardinal 4, les types cycliques sont*
- $()$ *: 1 permutation*
- (ab) *: 6 permutations*
- (abc) *: 8 permutations*
- $(abcd)$ *: 6 permutations*
- $(ab)(cd)$ *: 3 permutations*

et on a donc :

$$s(4, 4) = 1, \qquad s(4, 3) = 6, \qquad s(4, 2) = 8{+}3 = 11, \qquad s(4, 1) = 6, \qquad s(4, k) = 0 \text{ si } k > 4$$

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient également une relation de récurrence :

Proposition I.54 *Pour $n \geqslant k \geqslant 1$,*

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)$$

Cette relation de récurrence permet de compléter le tableau des valeurs obtenues pour n petit :

Tableau des nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ **et des nombres de Bell** $B(n)$ **pour** $n \leqslant 9$

n	$n!$	$s(n,1)$	$s(n,2)$	$s(n,3)$	$s(n,4)$	$s(n,5)$	$s(n,6)$	$s(n,7)$	$s(n,8)$	$s(n,9)$
1	1	1								
2	2	1	1							
3	6	2	3	1						
4	24	6	11	6	1					
5	120					1				
6	720						1			
7	5040							1		
8	40320								1	
9	362880									1

Théorème I.55 *Pour tout entier $m \geqslant 1$,*

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1) = \sum_{n=1}^{m} s(m,n)x^n$$

I.4.4 Exercices

Exercice I.1 : 1. Montrer que $p_{n-1}(n) = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Montrer que si $n \leqslant 2k-1$, alors $p_k(n) = p_{k-1}(n-1)$.
3. Montrer que $p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor = E(x)$ est la partie entière de x).
4. Remplir le tableau des nombres de partitions $p_k(n)$ pour $n \leqslant 9$.

Exercice I.2 : Montrer que le nombre de k-partitions de n est égal au nombre de k-partitions de $n + \binom{k}{2}$ sans répétitions d'entiers.

Par exemple, pour $n = 6$ et $k = 3$ (et $n + \binom{k}{2} = 6 + \binom{3}{2} = 9$), $p_3(6) = 3$ avec $[4, 1^2]$, $[3, 2, 1]$ et $[2^3]$ et le nombre de 3-partitions de 9 sans répétitions d'entiers est aussi égal à 3 : $[6, 2, 1]$, $[5, 3, 1]$ et $[4, 3, 2]$.

Indication : passer de la partition $[n_1, n_2, \dots, n_k]$ à la partition $[m_1, m_2, \dots, m_k]$ avec $m_i = n_i + k - i$ pour tout i.

Exercice I.3 : Ecrire les termes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 de la série $F(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_n X^n = \prod_{k \geqslant 1} \frac{1}{1-X^k}$ et vérifier que F est la série génératrice associée à la suite (p_n).

Exercice I.4 : 1. Montrer que $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Montrer que $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

3. Remplir le tableau des nombres de Stirling de seconde espèce $S(n, k)$ pour $n \leqslant 9$.

Exercice I.5 : En considérant les applications de $[m]$ dans $[n]$ et en raisonnant sur le cardinal de $\mathrm{Im}(f)$ pour toute application $f : [m] \to [n]$, justifier que

$$n^m = \sum_{k=1}^{n} S(m, k) \binom{n}{k} k!$$

Exercice I.6 : 1. Dans un jeu de bridge, les 52 cartes sont distribuées à quatre joueurs qui en reçoivent chacun treize. De combien de manière distinctes les 52 cartes peuvent-elles être distribuées ?

2. Les 25 élèves d'une classe sont répartis en 4 groupes de trois, 2 groupes de quatre et un groupe de cinq. De combien de manières distinctes peut-on faire cette répartition ?

3. On note $p(n; k_1, k_2, \ldots, k_n)$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ blocs, k_i étant le nombre de blocs de cardinal i (on a donc $k_1 + 2k_2 + \ldots + ik_i + \ldots + nk_n = n$).

a) Calculer $p(7; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$, $p(7; 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$ et $p(7; 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$.

b) Montrer que

$$p(n; k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_n! \,(1!)^{k_1}\, (1!)^{k_1} \,\ldots\, (n!)^{k_n}}$$

c) Comparer le résultat de la question précédente avec celui du Théorème I.52 et s'assurer qu'on a bien compris ce qui rapproche et ce qui distingue les deux dénombrements.

Exercice I.7 : 1. Montrer que $s(n, n-1) = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Montrer que $s(n, 1) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. Remplir le tableau des nombres de stirling de première espèce $s(n, k)$ pour $n \leqslant 9$.