Partie 1 : Combinatoire, solutions de quelques exercices

Feuille 1 : dénombrements

Exercice 12 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite qui est donnée à partir d'une autre suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par la formule

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_i$$

1. Montrer qu'on a alors $v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{n-k}$ (le passage de u_n à v_n est appelé *inversion de Pascal*).
2. En déduire la formule

$$d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

où $d(n)$ est le nombre de dérangements (ou permutations sans point fixe) d'un ensemble à n éléments.

Solution 1. Le calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k u_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i v_i \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^i v_i \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^i v_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} v_i \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} v_i \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{(n-k)!}{i!\,(n-k-i)!} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} v_i \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \frac{(n-i)!}{k!\,(n-k-i)!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i v_i \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i}^k \right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n} C_n^i v_i \left((1-1)^{n-i} \right) = C_n^n v_n = v_n
\end{aligned}$$

où l'égalité (2) est donnée par la formule du binôme de Newton et l'égalité (1) correspond simplement à deux manières distinctes de sommer les indices (i, k) avec $i \geq 0$, $k \geq 0$ et $i + k \leq n$.

2. Choisir une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ revient à choisir k entiers qui seront laissés fixes (pour un entier k compris entre 0 et n) puis à choisir une permutation *sans point fixe* des $(n-k)$ éléments restants. Pour chaque k, il y a C_n^k posibilités pour le premier choix puis $d(n-k)$ choix pour le second élément ; autrement dit :

$$n! \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_{n-k}$$

La formule d'inversion de Pascal, avec $u_n = n!$ et $v_n = d(n)$, nous dit alors que

$$d(n) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)! \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Feuille 2 : Formules explicites (ou formules fermées)

Exercice 12 : Soit $c = (c_n)_{n\geq 1}$, la suite définie par

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \ldots + c_{n-1}c_0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_ic_{n-1-i} \quad \text{pour } n \geq 1$$

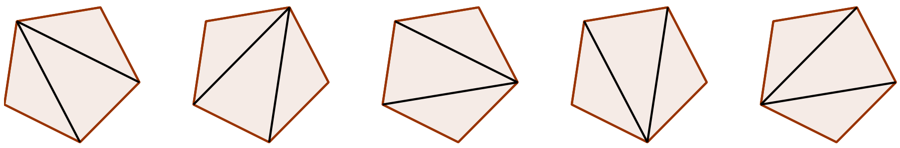
et soit $C(X)$ la fonction génératrice associée à c.

1. Montrer que $C(X) = 1 + XC(X)^2$.
2. En déduire que, pour $n \geq 1$,
$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

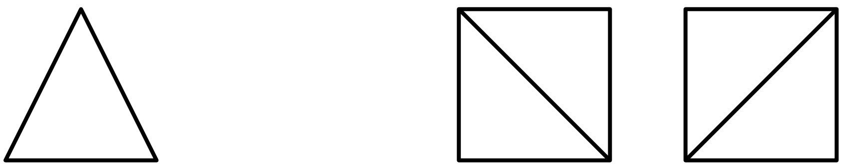
Ces nombres sont appelés *nombres de Catalan.*

Solution : cf. Notes de cours, I.2.3, p. 19-20.

Exercice 13 : De combien de façons peut-on découper un polygone convexe à n côtés en triangles de sorte que les côtés des triangles sont des diagonales du polygone ou des arêtes du polygone et aucune de ces diagonales ne se coupent ; par exemple, pour $n = 5$:

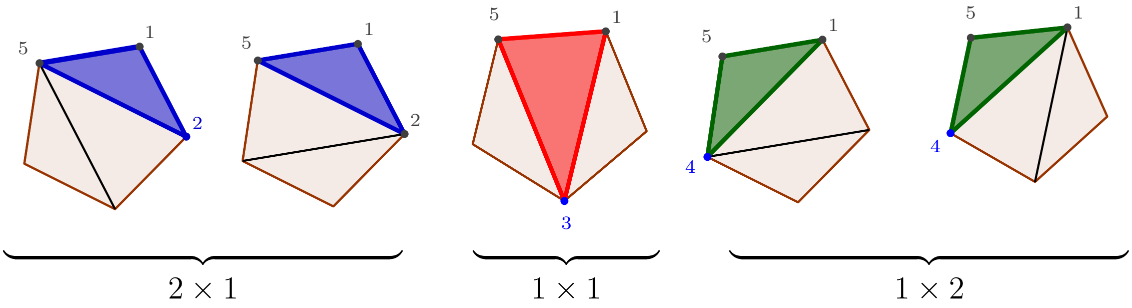


Solution Appelons a_n le nombre de façons de découper un polygone convexe à n côtés en triangles. On suppose $n \geq 3$ (il faut au moins trois côtés pour pouvoir tracer un triangle) et les valeurs $a_3 = 1$ et $a_4 = 2$ sont évidentes :

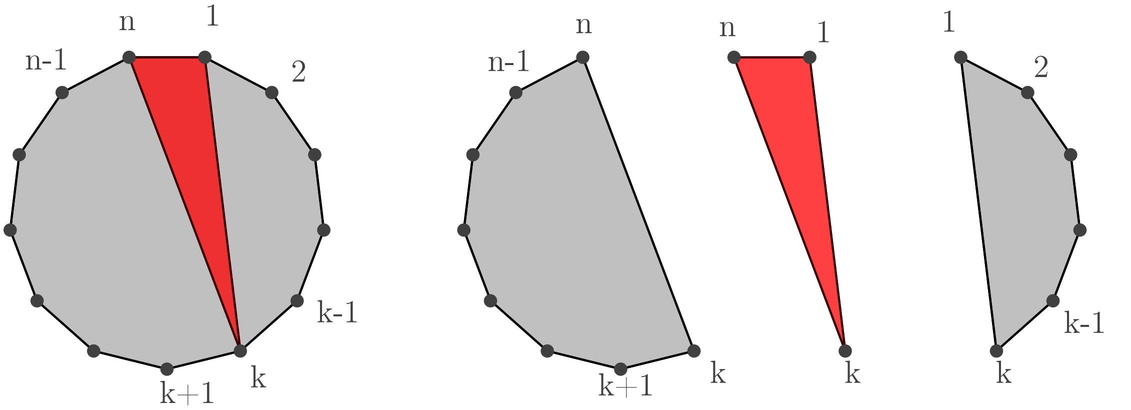


$a_3 = 1$ $\qquad\qquad$ $a_4 = 2$

On sait aussi que $a_5 = 5$. Ces premières valeurs évoquent les nombres de Catalan... Avant de faire le cas général, précisons la démarche suivie avec les cinq triangulations obtenues lorsque $n = 5$. On étiquette de 1 à 5 les sommets du pentagone et on va repérer les différentes triangulations suivant le triangle dans lequel se trouve le segment $[1; 5]$ reliant les sommets étiquetés 1 et 5 (il y a donc 3 cas suivant que le troisième sommet de ce triangle est 2, 3 ou 4) :



En suivant, ce principe, pour dénombrer les triangulations d'un polygone P_n à $n \geq 3$ côtés, on va numéroter de 1 à n ses sommets. On note que, quelle que soit la triangulation du polygone, tout côté du polygone est le côté d'un et un seul triangle de cette triangulation. Par exemple, le côté $[1;n]$ (reliant les sommets étiquetés 1 et n) est le côté d'un triangle $[1;n;k]$ reliant les sommets étiquetés 1, n et k avec $k \in [\![2, n-1]\!]$. On va donc compter séparément les triangulations suivant la valeur k de l'étiquette du troisième sommet du triangle dont les deux autres sommets sont 1 et n. Pour k fixé dans $[\![2, n-1]\!]$, on voit qu'une fois mis à part le triangle « central » $[1;n;k]$, le nombre de triangulations possibles est le produit du nombre de triangulations du « polynôme de droite » D_k (à k sommets étiquetés $1, 2, \ldots, k-1, k$) et du nombre de triangulations du « polynôme de gauche » G_{n-k+1} (à $n-k+1$ sommets étiquetés $k, k+1, \ldots, n-1, n$) :



Le « polynôme de gauche » G_k

Le « polynôme de droite » D_k

Pour chaque k, il y a donc $a_k a_{n-k+1}$ triangulations possibles (en décrétant que $a_2 = 1$ car, dans le raisonnement qui précède, pour $k = 2$, le « polynôme de droite » D_2 est réduit au côté $[1;2]$ et il faut seulement compter les a_{n-1} triangulations « polynôme de gauche » G_2 et, de même, pour $k = n-1$, on se retrouve à compter uniquement les a_{n-1} triangulations du « polynôme de droite » D_{n-1} car G_{n-1} est réduit à l'arête $[n-1, n]$). On a donc trouvé l'égalité :

$$a_n = \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n-k+1} = a_2 a_{n-1} + a_3 a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} a_3 + a_{n-1} a_2$$

(en rappelant la convention : $a_2 = 1$). Ainsi en posant $a_n = c_{n-2}$, on retrouve exactement la récurrence qui définit les nombres de Catalan :

$$c_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} c_k c_{n-3-k} = c_0 c_{n-3} + c_1 c_{n-4} + \ldots + c_{n-4} c_1 + c_{n-3} c_0$$

Comme les premiers termes sont les mêmes : $a_2 = c_0 = 1$ et $a_3 = c_1 = 1$, on a

$$a_n = c_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}, \quad \text{pour tout } n \geq 3$$

Feuille 3 : principe des tiroirs et principe d'inclusion-exclusion (PIE)

Exercice 9 : (indicatrice d'Euler) Pour un entier positif k, on note $\varphi(k)$ le nombre d'entiers n vérifiant $1 \leq n \leq k$ et $\mathrm{pgcd}(n,k) = 1$. Montrer que si n admet $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_q^{k_q}$ comme décomposition en facteurs premiers, alors

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)$$

Indication : considérer les ensembles $A_i = \{x;\ x \leq n \text{ et } p_i | x\}$ pour $i \in [q]$.

Solution Un entier est premier avec n si, et seulement s'il n'est divisible par aucun des nombres premiers p_1, p_2, ..., p_{q-1} et p_q. Si l'on pose $A_j = \{f;\ p_j \mid n\}$ pour $1 \leq j \leq q$, on a $\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q|$. Les éléments de A_1 sont les multiples de p_1 et $|A_1| = \dfrac{n}{p_1}$ (car, quand on va de 1 à n, les multiples de p_1, sont $p_1, 2p_1, 3p_1, \ldots, \dfrac{n}{p_1}p_1)$ [1]. De la même façon, les éléments de $A_1 \cap A_2$ sont les multiples de p_1p_2 et $|A_1 \cap A_2| = \dfrac{n}{p_1p_2}$ et, plus généralement, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \dfrac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}}$.

Le principe d'inclusion-exclusion nous dit alors que :

$$\varphi(n) \ = \ n - \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\alpha_i \ = \ n + \sum_{i=1}^{q}(-1)^i \alpha_i \qquad \text{avec} \qquad \alpha_i := \sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_i\} \in \mathscr{P}_i([q])} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_i}|$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n + \sum_{i=1}^{q}(-1)^i \sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_i\} \in \mathscr{P}_i([q])} \frac{n}{p_{k_1}p_{k_2}\ldots p_{k_i}} \\
&\overset{(1)}{=} n\left(\sum_{i=0}^{q} \sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_i\} \in \mathscr{P}_i([q])} \frac{(-1)^i}{p_{k_1}p_{k_2}\ldots p_{k_i}}\right) \\
&\overset{(2)}{=} n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_q}\right)
\end{aligned}$$

L'égalité (1) englobe le cas $i = 0$ en posant que $\dfrac{1}{p_{k_1}p_{k_2}\ldots p_{k_i}} = 1$ si $i = 0$ et l'égalité (2) s'écrit, pour $q = 2$, $\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) = 1 - \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{p_1p_2}$ et, pour $q = 3$, $\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) = 1 - \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{p_1p_2} + \dfrac{1}{p_1p_3} + \dfrac{1}{p_2p_3} - \dfrac{1}{p_1p_2p_3}$.

REAMRQUE : Quelques valeurs prises par l'indicatrice d'Euler :

— $\varphi(56) = 56\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{7}\right) = 56 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{7} = 4 \times 6 = 24$

— $\varphi(120) = 120\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 120 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = 4 \times 8 = 32$

— $\varphi(1200) = 1200\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 1200 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = 40 \times 8 = 320$

1. Résultat vu dans l'Exercice 8

Exercice 10 : Un dérangement d'un ensemble X est une permutation des éléments de X sans point fixe ($f : X \to X$, f bijective et $f(x) \neq x$ pour tout x de X). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. On pose $d(0) = 1$.

1. Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour montrer que $d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$.

Indication : considérer les ensembles $A_i = \{f ; f \text{ permutation de } [n] \text{ et } f(i) = i\}$.

2. Montrer que $d(n)$ est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$.

Solution 1. On peut poser $X = \{1, 2, \ldots, n\}$; l'ensemble des permutations de X est donc $\mathcal{S}_n$ (de cardinal $n!$). Par définition des A_i, un dérangement est une permutation qui n'est dans aucun A_i (i.e., une permutation qui ne fixe aucun entier). On a donc $d(n) = |\mathcal{S}_n| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ et, d'après le principe d'inclusion-exclusion :

$$d(n) \;=\; |\mathcal{S}_n| - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_i \qquad \text{avec} \qquad \alpha_i := \sum_{\{k_1, k_2, \ldots, k_i\} \in \mathscr{P}_i([n])} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_i}|$$

Si k_1, k_2, $\ldots$, k_i sont i entiers deux à deux distincts, il existe $(n-i)!$ permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui laissent fixes k_1, k_2, $\ldots$, k_i. Comme il y a $\binom{n}{i}$ choix pour les nombres k_1, k_2, $\ldots$, k_i, on en déduit que $\alpha_i = (n-i)! \binom{n}{i} = (n-i)! \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{i!}$ et finalement

$$d(n) \;=\; |\mathcal{S}_n| - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

2. Puisque $d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$ et $\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$, on a

$$(\star) \qquad \frac{n!}{e} - d(n) = n! \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$

On déduit de $(\star)$ les égalités :

$$\frac{n!}{e} - d(n) = (-1)^{n+1} n! \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+2j-1)!} - \frac{1}{(n+2j)!} \right)$$

Puisque, pour tout $n, j \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+2j-1)!} - \frac{1}{(n+2j)!} > 0$, on conclut que $\frac{n!}{e} - d(n)$ est du signe de $(-1)^{n+1}$. Par ailleurs, on déduit également de $(\star)$ que

$$\begin{aligned} \frac{n!}{e} - d(n) &= (-1)^{n+1} \left[\frac{n!}{(n+1)!} - n! \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+2j)!} - \frac{1}{(n+2j+1)!} \right) \right] \\ &= (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n+1} - A(n) \right] \qquad \text{avec} \quad A(n) = n! \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+2j)!} - \frac{1}{(n+2j+1)!} \right) > 0 \end{aligned}$$

On a donc, suivant la parité de n :

— Si n est pair, $\frac{n!}{e} - d(n) < 0$ et $\frac{n!}{e} - d(n) = -\frac{1}{n+1} + A(n)$ et on conclut $-\frac{1}{n+1} < \frac{n!}{e} - d(n) < 0$.

— Si n est impair, $\frac{n!}{e} - d(n) > 0$ et $\frac{n!}{e} - d(n) = \frac{1}{n+1} - A(n)$ et on conclut $0 < \frac{n!}{e} - d(n) < \frac{1}{n+1}$.

Autrement dit, on a bien montré que $\left| \frac{n!}{e} - d(n) \right| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$, i.e. que $d(n)$ est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$.