Correction du contrôle de Géométrie 1

Exercice 1 : vrai ou faux ?

VF 1. f est une forme linéaire : VRAI.
La linéarité de f découle directement de la linéarité de l'intégrale.

VF 2. A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim A = n$: VRAI et VRAI.
En effet, A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ car $A = \mathrm{Ker}\, f$. Ensuite, par le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim ker f + \dim \mathrm{Im}\, f$, soit encore $\dim A = (n+1) - \dim \mathrm{Im}\, f$. Puisque f est une forme linéaire, $\mathrm{Im}\, f$, comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ est soit réduit à $\{0\}$ (i.e. f est l'application nulle), soit égal à $\mathbb{R}$. Il est clair que $f \neq 0$ (par exemple, $f(1) = \int_0^{2\pi} P(t) \cos^2 t \, dt > 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue strictement positive sur $[0, 2\pi]$). Par conséquent, $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}$; ainsi $\dim \mathrm{Im}\ f = 1$ et $\dim A = (n+1) - 1 = n$.

VF 3. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est défini par $P(X) = X^4 + 2$, alors $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Ker}\ (f) \oplus \mathrm{Vect}(\{P\})$: VRAI.
Il suffit de remarquer que $P \notin A = \mathrm{Ker}\ (f)$ (ce qui est vrai car $f(P) \neq 0$ comme intégrale d'une fonction continue strictement positive sur $[0, 2\pi]$). Par conséquent, on a $A \cap \mathrm{Vect}(\{P\}) = \{0\}$. Comme $\dim A + \dim \mathrm{Vect}(\{P\}) = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, on peut alors conclure que $\mathbb{R}_n[X] = A \oplus \mathrm{Vect}(\{P\})$.

VF 4. B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim B = n - 1$: VRAI et VRAI.
L'application g définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $B = \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\ (g)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ comme intersection de deux sous-espaces vectoriels. Comme dans la question précédente, on voit facilement que $\dim \mathrm{Ker}\ (g) = (n+1) - \dim \mathrm{Im}\ (g) = n$ (car $g \neq 0$ puisque, par exemple, $g(P) = 1$ si $P(X) = X$). On rappelle alors que $\dim\big(\mathrm{Ker}\ (f) + \mathrm{Ker}\ (g)\big) = \dim \mathrm{Ker}\ (f) + \dim \mathrm{Ker}\ (g) - \dim\big(\mathrm{Ker}\ (f) \cap \mathrm{Ker}\ (g)\big)$ et on note que $\dim\big(\mathrm{Ker}\ (f) + \mathrm{Ker}\ (g)\big) = n + 1$ car sinon, on aurait nécessairement $\dim \mathrm{Ker}\ (f) = \dim \mathrm{Ker}\ (g) = \dim\big(\mathrm{Ker}\ (f) + \mathrm{Ker}\ (g)\big)$ et, du fait de l'inclusion de $\mathrm{Ker}\ (f)$ et $\mathrm{Ker}\ (g)$ dans $\mathrm{Ker}\ (f) + \mathrm{Ker}\ (g)$, les trois sous-espaces vectoriels seraient donc égaux mais $\mathrm{Ker}\ (f) = \mathrm{Ker}\ (g)$ est clairement faux (par exemple $P(X) = (X-1)^2$ est dans $\mathrm{Ker}\,(g)$ mais pas dans $\mathrm{Ker}\ (f)$) ; ainsi $\dim B = \dim \mathrm{Ker}\ (f) + \dim \mathrm{Ker}\ (g) - \dim\big(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\ (g)\big) = n + n - (n+1) = n - 1$

Exercice 2

1. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G \neq E$ et si $G \subset F$, alors $F \cup G = F \neq E$. On suppose donc que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ et il existe ainsi $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Alors $x + y \notin F$ (car sinon $y = (x+y) - x$ serait dans F) et $x + y \notin G$ (car sinon $x = (x+y) - y$ serait dans G), ce qui montre que $x + y \notin F \cup G$, i.e. que $F \cup G \neq E$.

2. Si F et G admettent un supplémentaire commun Z, alors les égalités $F \oplus Z = G \oplus Z = E$ entraînent que $\dim E = \dim F + \dim Z = \dim G + \dim Z$ et donc $\dim F = \dim G$.

Réciproquement, si on suppose que $\dim E = \dim F$, on va raisonner par récurrence sur $k = \dim E - \dim F = n - \dim F$ pour montrer que F et G admettent un supplémentaire commun. Pour $k = 0$, $F = G = E$ et $\{0_E\}$ est un supplémentaire commun à F et G. On suppose (hypothèse de récurrence) que si $\dim F = \dim G = n - k$ pour un certain entier $k \geq 0$, alors F et G admettent un supplémentaire commun et on se donne F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F = \dim G = n - (k+1) = n - k - 1$. Alors, nécessairement, $F \neq E$ et $G \neq E$ (car $\dim F = \dim G \leq n - 1 < n = \dim E$) et, d'après la question 1., il existe $x \in E \setminus (F \cup G)$. On considère alors les sous-espaces vectoriels $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(\{x\})$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(\{x\})$. On a clairement $\dim F' = \dim F + 1 = n - k$ et $\dim G' = \dim G + 1 = n - k$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, F' et G' admettent un supplémentaire commun Z'. Mais $E = F' \oplus Z' = G' \oplus Z$ implique $E = F \oplus \mathrm{Vect}(\{x\}) \oplus Z' = G \oplus \mathrm{Vect}(\{x\}) \oplus Z'$. Autrement dit, F et G admettent un supplémentaire commun $Z = \mathrm{Vect}(\{x\}) \oplus Z'$.

Exercice 3

1. Soient $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Par définition de la structure d'espace vectoriel de $Mat_n(\mathbb{K})$, $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$, $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$, $\mu B = (\mu b_{i,j})$ et on a bien les égalités

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \mu b_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$$

qui montrent que $\mathrm{Tr} : A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une forme linéaire sur $Mat_n(\mathbb{K})$.

2. Soient $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$; on sait que $AB = (c_{i,j})$ avec, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$. On a donc, en notant $BA = (d_{i,j})$:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} d_{k,k} = \mathrm{Tr}(BA)$$

3. Par définition, si A et B sont deux matrices de $Mat_n(\mathbb{K})$ semblables, il existe une matrice inversible P dans $Mat_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et les égalités

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PBP^{-1}) \overset{2.}{=} \mathrm{Tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{Tr}(B\mathrm{I}_n) = \mathrm{Tr}(B)$$

montrent que deux matrices semblables ont même trace.

4. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, alors on sait que $M_{\mathscr{B}}(f)$ et $M_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables (puisqu'on a $M_{\mathscr{B}'}(f) = (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}\, M_{\mathscr{B}}(f)\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ où $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$). D'après la question 3, cela montre que $\mathrm{Tr}(M_{\mathscr{B}}(f)) = \mathrm{Tr}(M_{\mathscr{B}'}(f))$ et que l'application Tr est ainsi bien définie sur $\mathrm{End}(E)$ (car elle ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$).

Cette application est une forme linéaire. En effet, si $f, g \in \mathrm{End}(E)$ et $a, b \in \mathbb{K}$, on sait que $M_{\mathscr{B}}(af + bg) = aM_{\mathscr{B}}(f) + bM_{\mathscr{B}}(g)$ et la linéarité de l'application Tr sur $\mathrm{End}(E)$ découle de la linéarité de l'application $\mathrm{Tr} : Mat_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ (vérifiée dans la question 1.).

Exercice 4

1.a. On a $f^{k+1}(E) = f^k(f(E)) \subset f^k(E)$ puisque $f(E) \subset E$. Or, par définition, $\mathrm{Im}\,(f^k) = f^k(E)$ et cela montre donc que $\mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(f^k)$ pour tout entier $k \geq 0$.

b. D'après 1.a., la suite $(\mathrm{Im}\,(f^k))_{k\geq 1}$ est une suite décroissante de sous-espace vectoriels de E et on en déduit que la suite $(\dim \mathrm{Im}\,(f^k))_{k\geq 1}$ est une suite d'entiers positifs majorée par n et décroissante. Une telle suite est nécessairement constante à partir d'un rang K. Pour tout entier $i \geq 0$, on a donc alors $\dim \mathrm{Im}\,(f^{K+i}) = \dim \mathrm{Im}\,(f^K)$ et $\mathrm{Im}\,(f^{K+i}) \subset \mathrm{Im}\,(f^K)$ (puisque $(\mathrm{Im}\,(f^k))_{k\geq 1}$ est décroissante) et cela entraîne bien que $\mathrm{Im}\,(f^{K+i}) = \mathrm{Im}\,(f^K)$ pour tout entier $i \geq 0$.

2. a. Il faut donc montrer que, pour tout entier $i \geq 0$, $f^{k_0+i}(E) = f^{k_0}(E)$ sachant $f^{k_0+1}(E) = f^{k_0}(E)$. Une récurrence sur i le montre facilement. Pour $i = 0$, il n'y a rien à montrer et pour $i = 1$, c'est l'hypothèse de départ. Et si on suppose que $f^{k_0+i}(E) = f^{k_0}(E)$ (hypothèse de récurrence), on a alors $f^{k_0+i+1}(E) = f(f^{k_0+i}(E)) = f(f^{k_0}(E)) = f^{k_0+1}(E) = f^{k_0}(E)$.

b. Raisonnons par l'absurde. Si on suppose que $\mathrm{Im}\,(f^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Im}\,(f^n)$ alors, d'après la question a., on a également $\mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subsetneq \mathrm{Im}\,(f^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. On a donc une suite strictement décroissante de $n+1$ sous-espaces-vectoriels dont la suite des dimensions est aussi strictement décroissante

$$0 \leq \dim \mathrm{Im}\,(f^{n+1}) < \dim \mathrm{Im}\,(f^n) < \dim \mathrm{Im}\,(f^{n-1}) < \ldots < \dim \mathrm{Im}\,(f^2) < \dim \mathrm{Im}\,(f)$$

qui prouve que $\dim \mathrm{Im}\, f^{n-k} \geq k+1$ et, en particulier, $\dim \mathrm{Im}\,(f)) \geq n$. On en déduit que $\dim \mathrm{Im}\,(f) = n$ (car $\mathrm{Im}(f) \subset E$ et $\dim E = n$) ; autrement dit, on aurait $\mathrm{Im}(f) = E$, soit encore f surjective ou $f(E) = E$. Mais alors, on aurait également $f^{n+1}(E) = f^n(f(E)) = f^n(E)$, ce qui contredit $\mathrm{Im}\,(f^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Im}\,(f^n)$. Par conséquent, on a bien $\mathrm{Im}\,(f^n) = \mathrm{Im}\,(f^{n+1})$.

c. Il est clair que $\mathrm{Ker}\,(f^n) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$ car $f^n(x) = 0$ entraîne $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$ pour tout x de E. Par ailleurs, en appliquant le théorème du rang et la question 2.b., on obtient $\dim \mathrm{Ker}\,(f^n) = \dim E - \dim \mathrm{Im}\,(f^n) = \dim E - \dim \mathrm{Im}\,(f^{n+1}) = \dim \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$. De $\mathrm{Ker}\,(f^n) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$ et de $\dim \mathrm{Ker}\,(f^n) = \dim \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$, on conclut que $\mathrm{Ker}\,(f^n) = \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$.

3.a. La suite $(\text{Ker } f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E car $f^k(x) = 0$ entraîne $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ pour tout x de E et tout entier $k \geq 1$. A présent, pour tout entier $i \geq 0$ et tout x de E, $f^{k_0+i+1}(x) = 0 \Rightarrow f^{k_0+1}(f^i(x)) = 0 \Rightarrow f^i(x) \in \text{Ker } f^{k_0+1} = \text{Ker } f^{k_0} \Rightarrow f^{k_0}(f^i(x)) = 0 \Rightarrow f^{k_0+i}(x) = 0$. Autrement dit, $\text{Ker } f^{k_0+1+i} \subset \text{Ker } f^{k_0+i}$ et on peut donc conclure que, pour tout entier $i \geq 0$, $\text{Ker } f^{k_0+1+i} = \text{Ker } f^{k_0+i}$.

b. Puisque $\dim E = \dim \text{Ker } (f^{k_0}) + \dim \text{Im } (f^{k_0})$ par le théorème du rang, il suffit de montrer que $\text{Ker } (f^{k_0}) \cap \text{Im } (f^{k_0}) = \{0\}$ pour conclure $E = \text{Im } (f^{k_0}) \oplus \text{Ker } (f^{k_0})$. Soit donc $x \in \text{Ker } (f^{k_0}) \cap \text{Im } (f^{k_0})$. Ainsi, $f^{k_0}(x) = 0$ et il existe un vecteur y tel que $x = f^{k_0}(y)$. On en déduit que $y \in \text{Ker } (f^{2k_0})$ car $f^{2k_0}(y) = f^{k_0}(f^{k_0}(y)) = f^{k_0}(x) = 0$. Or, d'après 4.a., $\text{Ker } (f^{2k_0}) = \text{Ker } (f^{k_0+k_0}) = \text{Ker } (f^{k_0})$ (cela découle immédiatement du fait que, pour tout entier $i \geq 0$, $\text{Ker } f^{k_0+1+i} = \text{Ker } f^{k_0+i}$) ; et ceci signifie que $y \in \text{Ker } (f^{k_0})$ et $x = f^k(y) = 0$.

4. a. Nous savons déjà que la suite $(\text{Ker } f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E. Par ailleurs, $\text{Ker } (f^{N-1}) \subsetneqq \text{Ker } f^N$ par hypothèse (puisque $f^N = 0$ et $f^{N-1} \neq 0$). Enfin, exactement par le même raisonnement (qui utilise le théorème du rang) que celui suivi dans la question 3., si $\text{Ker } (f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$, alors $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$. On sait alors (question 2.a) que $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+i})$ pour tout entier $i \geq 0$ et, à nouveau par le même raisonnement, on en déduit que l'on a également $\text{Ker } (f^k) = \text{Ker } (f^{k+i})$ pour tout entier $i \geq 0$. Cela montre que $\text{Ker } (f^k) \subsetneqq \text{Ker } (f^{k+1})$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ puisque la supposition contraire entraînerait $\text{Ker } (f^{N-1}) = \text{Ker } (f^N)$.

b. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{K}^N$ tels que $u = \sum_{i=0}^{N-1} a_i f^i(v) = a_0 v + a_1 f(v) + \ldots + a_{N-1} f^{N-1}(v) = 0$. Il faut montrer que nécessairement $a_0 = a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$. On peut raisonner par récurrence sur l'indice i des coefficients a_i. Pour $i = 0$, on note que

$$f^{N-1}(u) = f^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i f^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i f^{N-1+i}(v) = a_0 f^{N-1}(v) + f^N\left(\sum_{i=1}^{N-1} a_i f^{i-1}(v)\right) = a_0 f^{N-1}(v)$$

Ainsi, $u = 0 \Rightarrow f^{N-1}(u) = 0 \Rightarrow a_0 f^{N-1}(v) = 0$ et $a_0 = 0$ car $f^{n-1}(v) \neq 0$. Ensuite, si on suppose (hypothèse de récurrence) qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $a_k = 0$ pour $i \in [\![0, k-1]\!]$, on obtient

$$f^{N-1-k}(u) = f^{N-1-k}\left(\sum_{i=k}^{N-1} a_i f^i(v)\right) = \sum_{i=k}^{N-1} a_i f^{N-1-k+i}(v) = a_k f^{N-1}(v) + f^N\left(\sum_{i=k+1}^{N-1} a_i f^{i-k-1}(v)\right) = a_k f^{N-1}(v)$$

Ainsi, $u = 0 \Rightarrow f^{N-1-k}(u) = 0 \Rightarrow a_k f^{N-1}(v) = 0$ et $a_k = 0$ car $f^{n-1}(v) \neq 0$.

Ceci montre que famille $\mathscr{F}_v := \{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{N-1}(v)\}$ est une famille libre de E.

c. D'après la quetion b., la famille $\mathscr{F}_v := \{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ est une famille libre et c'est une base de E car elle a n éléments et que $n = \dim E$. Puisque $f(f^k(v)) = f^{k+1}(v)$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et $f(f^{n-1}(v)) = f^n(v) = 0$, on a

$$M_{\mathscr{F}_v}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit encore $M_{\mathscr{F}_v}(f) = (m_{i,j}) \in Mat_n(\mathbb{K})$ avec $m_{i,i-1} = 1$ si $2 \leq i \leq n$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.