Contrôle de Géométrie 1

durée : 2 h

Exercice 1 : vrai ou faux ?

Chaque fois, une justification de la réponse est attendue !

Pour n entier ≥ 1, on considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel formé des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n, par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = \int_0^{2\pi} P(t)\cos^2 t\, dt$$

On pose

$$A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{2\pi} P(t)\cos^2 t\, dt = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{2\pi} P(t)\cos^2 t\, dt = P(1) = 0 \right\}$$

VF 1. f est une forme linéaire.

VF 2. A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim A = n$

VF 3. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est défini par $P(X) = X^4 + 2$, alors $\mathbb{R}_n[X] = A \oplus \mathrm{Vect}(\{P\})$.

VF 4. ($\star\star$ 2 pts) B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim B = n - 1$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

2. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun (i.e., il existe un sous-espace vectoriel Z de E tel que $F \oplus Z = G \oplus Z = E$) si, et seulement si, $\dim F = \dim G$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On rappelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in Mat_n(\mathbb{K})$, la trace de A est le nombre $\mathrm{Tr}(A)$ défini par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Vérifier que l'application $\mathrm{Tr} : A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une forme linéaire sur $Mat_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que, pour toutes matrices $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E. Si $f \in \mathrm{End}(E)$, $M_{\mathscr{B}}(f)$ dénote la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que l'égalité :

$$\mathrm{Tr}(f) := \mathrm{Tr}(M_{\mathscr{B}}(f))$$

définit une application Tr sur $\mathrm{End}(E)$. Est-elle linéaire ?

Exercice 4

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathrm{End}(E)$, un endomorphisme de E.

1.a. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, $\mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(f^k)$.

b. En déduire qu'il existe un entier K tel que, pour tout entier $i \geq 0$, $\mathrm{Im}\,(f^K) = \mathrm{Im}\,(f^{K+i})$

2. a. Soit $k_0 \geq 0$ tel que $\mathrm{Im}(f^{k_0}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+1})$. Montrer que, pour tout entier $i \geq 0$, $\mathrm{Im}(f^{k_0}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+i})$.

b. Déduire de a. que $\mathrm{Im}\,(f^n) = \mathrm{Im}\,(f^{n+1})$.

c. Déduire de b. $\mathrm{Ker}\,(f^n) = \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$.

3. Soit $k_0 \geq 1$ un entier tel que $\mathrm{Ker}\,(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}\,(f^{k_0+1})$.

a. Montrer que, pour tout entier $i \geq 0$, $\mathrm{Ker}\, f^{k_0+1+i} = \mathrm{Ker}\, f^{k_0+i}$.

b. Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(f^{k_0}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$.

4. On suppose à présent qu'il existe un entier N strictement positif tel que $f^N = 0$ et $f^{N-1} \neq 0$ (un tel endomorphisme est dit *nilpotent*).

a. Vérifier que l'on a alors la suite strictement croissante suivante :

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f^2) \subset \ldots\text{...} \subset \mathrm{Ker}\,(f^{N-1}) \subset \mathrm{Ker}\,(f^N) = E$$

b.($\star\star$ 2 pts) Soit $v \in E$ tel que $f^{N-1}(v) \neq 0$. Montrer que la famille $\mathscr{F}_v := \{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{N-1}(v)\}$ est une famille libre de E.

c. On suppose à présent que $N = n$. Montrer que la famille $\mathscr{F}_v$ est alors une base de E et écrire $M_{\mathscr{F}_v}(f)$, la matrice de f dans cette base.

BARÈME APPROXIMATIF : 5 - 4 - 4 - 11