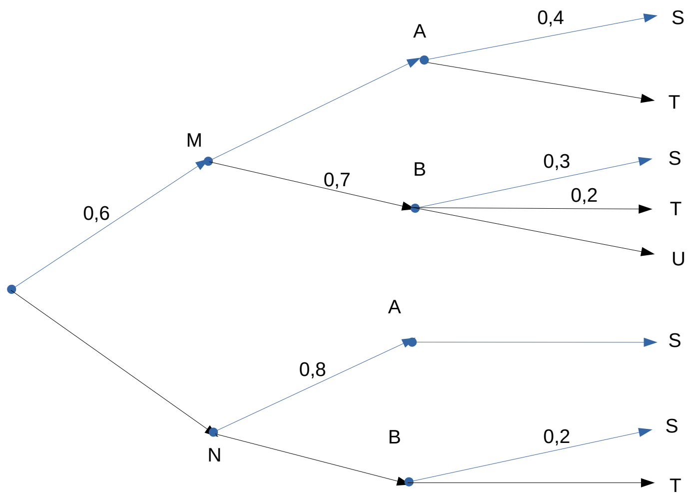
Partiel du mercredi 9 novembre 2016

Durée : 2h. Documents et téléphone portable interdits. Calculatrice autorisée.

Questions de cours et applications. Soit l'arbre suivant donnant les probabilités d'une expérience aléatoire composée de 3 phases successives.



1. Traduire mathématiquement les données de l'arbre.

   $\mathbb{P}(M) = 0,6; \mathbb{P}(B|M) = 0,7; \mathbb{P}(S|M \cap A) = 0,4; \mathbb{P}(S|M \cap B) = 0,3$;
   $\mathbb{P}(T|M \cap B) = 0,2; \mathbb{P}(A|N) = 0,8; \mathbb{P}(S|N \cap B) = 0,2$.
   On peut ajouter que $\mathbb{P}(S|N \cap A) = 1$ puisqu'il n'y a qu'une seule flèche.
2. Compléter l'arbre numériquement. Justifier.
   $\mathbb{P}(A|M) = 1 - \mathbb{P}(B|M) = 0,3$ car $A \cup B = \Omega$ et les ensembles sont disjoints ;
   $\mathbb{P}(T|M \cap A) = 1 - \mathbb{P}(S|M \cap A) = 0,6$ car S, T, U forment une partition de Ω et $\mathbb{P}(U|M \cap A) = 0$;
   $\mathbb{P}(U|M \cap B) = 1 - \mathbb{P}(S \cup T|M \cap B) = 1 - (\mathbb{P}(S|M \cap B) + \mathbb{P}(T|M \cap B) == 0,5$;
   $\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(M) = 0,4$ car $N \cup M = \Omega$ et les ensembles sont disjoints ;
3. Quel événement obtient-on sur la première branche, du sommet initial au sommet final ? Donner la formule mathématique permettant d'en calculer la probabilité.
   L'événement est $M \cap A \cap S$.
   Par la formule des probabilités composées :
   $\mathbb{P}(M \cap A \cap S) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(S|M \cap A) = 0,6 \times 0,3 \times 0,4 = 0,072$.
4. Calculer $\mathrm{P}(T)$ en explicitant la formule utilisée.
   Par la formule des probabilités totales :
   $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap A \cap T) + \mathrm{P}(M \cap B \cap T) + \mathrm{P}(N \cap A \cap T) + \mathrm{P}(N \cap B \cap T)$.
   On calcule comme précédemment par la formule des probabilités composées les 4 probabilités ci-dessus, on obtient :
   $\mathrm{P}(T) = 0,6 \times 0,3 \times 0,4 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 + 0,4 \times 0,8 \times 0 + 0,4 \times 0,32 \times 0,8 = 0,256$.
5. Sachant que T a été observé, avec quelle probabilité est-elle issue de B ?
   On cherche $\mathrm{P}(B|T) = \frac{\mathrm{P}(B \cap T)}{\mathrm{P}(T)}$. On a déjà calculé le dénominateur. Pour le numérateur, on utilise encore la formule des probabilités totales :
   $\mathrm{P}(B \cap T) = \mathrm{P}(M \cap B \cap T) + \mathrm{P}(N \cap B \cap T) = 0,6 \times 0,7 \times 0,2 + 0,4 \times 0,2 \times 0,8 = 0,148$.
   D'où $\mathrm{P}(T) = \frac{0,148}{0,256} = 0,578$.

Exercice 1

1. On dispose de deux dés physiquement indiscernables, l'un non pipé, l'autre pipé dont la probabilité d'obtenir 6 est de 0,4. On lance 2 fois de suite un dé choisi selon un des protocoles suivants. Dans chaque cas, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 ?

(a) on choisit un dé au hasard et on le lance 3 fois de suite;

(b) on choisit le dé au hasard à chacun des 3 lancers;

(c) on choisit au hasard un dé et on change de dé à chaque lancer.

Soit D_i l'événement : "choisir le dé non pipé au tirage n°i" avec $i = 1, 2$, A_i l'événement "ne pas obtenir 6 au $i$ème lancer de dé" et B l'événement "obtenir au moins une fois un 6". On cherche $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{A_1 \cap A_2}) = 1 - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$.

(a) Dans ce cas, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{2}(D_i \cap A_1 \cap A_2)) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(D_i)\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 | D_i) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(D_i)\mathrm{P}(A_1|D_i)\mathrm{P}(A_2|D_i)$ par indépendance des lancers de dé successifs. Ainsi puisque $\mathrm{P}(D_i) = \frac{1}{2}$:
$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(D_i)\mathrm{P}(A_1|D_i)\mathrm{P}(A_2|D_i) = \frac{1}{2}(\frac{5}{6})^2 + \frac{1}{2}(\frac{6}{10})^2 = 0,527$. Donc $\mathrm{P}(B) = 0,473$.

(b) Ici l'expérience consiste à répéter de manière indépendante et dans les mêmes conditions un tirage au hasard d'un dé et un lancer de ce dé. On a donc si A est l'événement "ne pas obtenir 6 au lancer du dé choisi" : $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(\bigcup_{i,j=1}^{2} D_i \cap A)^2 = (\sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(D_i)\mathrm{P}(A|D_i))^2 = (\frac{1}{2}.\frac{5}{6} + \frac{1}{2}.\frac{6}{10})^2 = 0,514$, donc $\mathrm{P}(B) = 0,486$.

(c) Dans ce cas, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{2} D_i \cap A_1 \cap \overline{D_i} \cap A_2) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(D_i)\mathrm{P}(A_1|D_i)\mathrm{P}(A_2|\overline{D_i})$. Ainsi :
$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}(\frac{5}{6})(\frac{6}{10}) + \frac{1}{2}(\frac{6}{10})(\frac{5}{6}) = 0,5$, donc $\mathrm{P}(B) = 0,5$.

2. Ayant découvert le dé pipé, on le lance jusqu'à obtenir un 6. Quelle est la loi du nombre X de lancers nécessaires ? Justifier et vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.
Soit S_i l'événement "obtenir un 6 au $i$ème lancer", de probabilité $\frac{4}{10}$ puisque le dé est pipé et les lancers indépendants. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour $k \geqslant 1$, $\{X = k\} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} ... \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$, de sorte que : $\mathrm{P}(X = k) = (\frac{6}{10})^{k-1}\frac{4}{10}$.
On reconnait une loi géométrique de paramètre $\frac{4}{10}$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = k(1 - x)^{\frac{1}{3}}.$$

1. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
f est une densité de probabilité si elle est positive et si $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Donc $k \geqslant 0$. D'autre part $\int_0^1 k(1 - x)^{1/3}dx = [-\frac{3}{4}k(1 - x)^{4/3}]_0^1 = \frac{3k}{4}$. Donc $k = \frac{4}{3}$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

$$\mathrm{P}(X \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t \frac{4}{3}(1 - x)^{1/3}dx = 1 - (1 - t)^{4/3} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

3. Montrer que $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}((1 - X)^2)$ sont bien définies. Les calculer.
Les fonctions $x \mapsto |x|.\frac{4}{3}(1 - x)^{1/3}$ et $x \mapsto (1 - x)^2.\frac{4}{3}(1 - x)^{1/3} = \frac{4}{3}(1 - x)^{7/3}$ sont continues donc intégrables sur $[0, 1]$. Donc $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}((1 - X)^2)$ existent.
$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x.\frac{4}{3}(1 - x)^{1/3}dx = \frac{3}{7}$ après intégration par parties;
$\mathrm{E}((1 - X)^2) = \int_0^1 (1 - x)^2\frac{4}{3}(1 - x)^{1/3}dx = \frac{2}{5}$ après intégration directe.

4. Soit $Y = 1 - X$. Quelle est la loi de Y ?
Valeurs prises par X : $[0, 1]$; il en est donc de même pour $Y = 1 - X$.
Fonction de répartition de Y :
$\mathrm{P}(Y \leqslant t) = \mathrm{P}(1 - X \leqslant t) = \mathrm{P}(X \geqslant 1 - t) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 1 - t)$

$$\text{Or } \mathrm{P}(X \leqslant 1 - t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - t < 0, \text{ soit } t > 1 \\ 1 - (1 - (1 - t))^{4/3}) = 1 - t^{4/3} & \text{si } 0 \leqslant 1 - t < 1, \text{ soit } 0 < t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 - t \geqslant 1, \text{ soit } t \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathrm{P}(Y \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t^{4/3} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On en déduit la densité en dérivant cette fonction : $f_Y(t) = \frac{4}{3}t^{1/3}$ pour $t \in [0, 1]$.

5. Calculer d'une autre façon les deux espérances précédentes.
Les fonctions $t \mapsto |t|t^{1/3}$ et $t \mapsto t^2t^{1/3}$ sont continues donc intégrables sur $[0,1]$. Donc Y admet une espérance et est de carré intégrable. Le calcul donne facilement :
$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 t.\frac{4}{3}t^{1/3}dt = \frac{4}{7}$. Ainsi, $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(1-Y) = 1 - \mathrm{E}(Y)$ par linéarité de l'espérance, ce qui donne : $\mathrm{E}(X) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.
$\mathrm{E}((1-X)^2) = \mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 t^2\frac{4}{3}t^{1/3}dt = \frac{2}{5}$.

Exercice 3. On considère que, pour un conducteur, le nombre X de kilomètres avant le premier accident suit une loi normale de moyenne 35000 km avec un écart-type de 5000 km.

1. Déterminer le pourcentage d'individus ayant eu leur premier accident après les 25000 km et avant les 40000 km.
Posons $Y = \frac{X-35000}{5000}$. Alors Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Il vient :
$\mathrm{P}(25000 \leqslant X \leqslant 40000) = \mathbb{P}(\frac{25000-35000}{5000} \leqslant Y \leqslant \frac{40000-35000}{5000}) = \mathrm{P}(-2 \leqslant Y \leqslant 1) = F(1) - F(-2)$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On lit directement dans la table : $F(1) = 0,8413$ tandis que $F(-2) = \mathrm{P}(Y \leqslant -2) = \mathrm{P}(Y \geqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(Y \leqslant 2)$ par symétrie du graphe du fait de la parité de la densité correspondante. Donc $F(-2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$.
Ainsi $\mathrm{P}(25000 \leqslant X \leqslant 40000) = 0,8413 - 0,0228 = 0,8185$.
2. Au bout de combien de kilomètres est-on assuré que 75% des conducteurs ont eu leur premier accident ?
On cherche le plus petit t tel que $\mathrm{P}(X \leqslant t) \geqslant 0,75$. Revenons là encore en Y :
$\mathrm{P}(X \leqslant t) = \mathrm{P}(Y \leqslant \frac{t-35000}{5000}) \geqslant 0,75$ équivaut par lecture sur la table à $\frac{t-35000}{5000} \geqslant 0,68$.
On obtient $t \geqslant 35000 + 0,68 \times 5000) \simeq 38400$. Ainsi on peut assurer que 75 % de conducteurs ont eu leur premier accident avant environ 38400 km.

Exercice 4. La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. (a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $\mathrm{P}(T \leqslant 10) = 0,7$.
La densité de la loi exponentielle de paramètre λ est $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t > 0$. On en déduit la fonction de répartition nulle sur $\mathbb{R}^-$ et valant $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$.
Ici $\mathrm{P}(T \leqslant 10) = 1 - e^{-10\lambda} = 0,7$ donne $\lambda = -\frac{\ln(0,3)}{10}$.
On prendra pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de λ.
   (b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(T > 15|T > 10)$.
On peut utiliser la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle :
$\mathbb{P}(T > 15|T > 10) = \mathrm{P}(T > 5) = e^{-5\lambda} \simeq 0,55$.
   (c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes. On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.
$\mathrm{P}(T \leqslant 15|T > 10) = 1 - \mathrm{P}(T > 15|T > 10) \simeq 1 - 0,55 = 0,45$.
2. On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.
   (a) Donner la loi de Y.
Il y a 6 caisses que l'on numérote. Pour la caisse n°i, on note A_i l'événement : "la durée d'attente à la caisse n°i est supérieure à 10 minutes". Chaque A_i est indépendant des autres, et $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(T > 10) = 0,3$.
La variable aléatoire Y est le nombre total de $A_i, i = 1, ...6$ sur les 6 caisses. Donc Y prend les valeurs

de 0 à 6. D'autre part pour $k \in \{0, 1, ..., 6\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = k) &= \mathrm{P}(\text{il y a } k \text{ caisses parmi les 6 ouvertes pour lesquelles on a } A_i, \\
&\quad \text{pour les autres on a } \overline{A_j}) \\
&= \mathrm{P}(\bigcup_{i_1, \dots i_k} (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \overline{A_j})) \\
&= \sum_{i_1, \dots i_k} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \overline{A_j}) \\
&= \sum_{i_1, \dots i_k} (0,3)^k (0,7)^{6-k} \quad \text{par indépendance des événements} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ k \end{pmatrix} (0,3)^k (0,7)^{6-k}
\end{aligned}$$

On reconnait la loi binomiale de paramètres 6 et 0,3.

(b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes. Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.
Il s'agit de $\mathrm{P}(Y \geqslant 4) = \mathrm{P}(Y = 4) + \mathrm{P}(Y = 5) + \mathrm{P}(Y = 6)$ que l'on calcule par la formule prévcédente. On trouve $\mathrm{P}(Y \geqslant 4) \simeq 0,07$, soit environ 7% de chance.