Université Paul Sabatier / L3E **mercredi 4 novembre 2015**

Partiel d'Algèbre 1

La rédaction doit être soignée et l'argumentation précise, la plus détaillée possible

Exercice 1

1. Ce raisonnement en forme de syllogisme est-il valide (justifier la réponse) ? :

   Aucune citrouille n'est rouge.

   Tous les fruits sont rouges.

   Par conséquent, certains fruits ne sont pas des citrouilles.

2. Même question pour celui-ci :

   Seules les citrouilles sont orange.

   Certains fruits ne sont pas orange.

   Par conséquent, certains fruits ne sont pas des citrouilles.

3. Même question pour celui-ci :

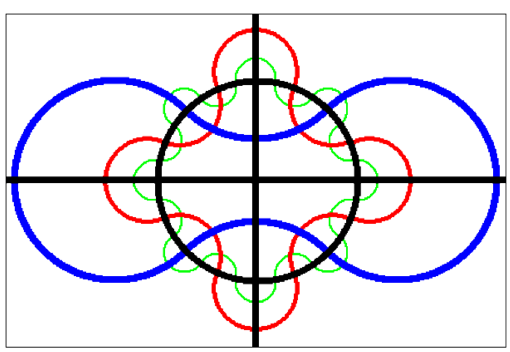
   Les marchandises rares sont chères.

   Or, les marchandises qui ne sont pas chères sont rares.

   Par conséquent, les marchandises qui ne sont pas chères sont chères.

Exercice 2

Ce diagramme représente un 6-diagramme de Venn :



Autrement dit, le rectangle symbolise un ensemble E et les différentes courbes permettent d'identifier six sous-ensembles A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 de sorte qu'à tout élément de E, on peut associer une région précise du rectangle, selon les ensembles A_i auxquels il appartient.

a. Combien de régions distinctes peut-on ainsi dénombrer ?

b. Sur la feuille qui vous a été remise, griser la zone qui correspond à l'intersection $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6$ et griser la zone qui correspond aux éléments qui ne sont pas dans $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$.

Exercice 3

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 \equiv y^2 \bmod 5$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Exercice 4

On considère la relation $\preceq$ définie sur $C = [0,1] \times [0,1]$ par

$$\forall\,(x,y),(x',y') \in C,\ (x,y) \ \preceq\ (x',y') \iff \Big(\big(x < x'\big) \text{ ou } \big(x = x' \text{ et } y \leq y'\big)\Big)$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. L'ensemble C admet-il des éléments maximaux ? et des éléments minimaux ?
3. Est-ce que que toute partie non vide de C admet un plus grand élément ?

Exercice 5

Soit E un ensemble non vide et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E. Pour toute application $m : \mathscr{P}(E) \to [0,+\infty[$, montrer que les 3 propriétés qui suivent sont équivalentes en prouvant les implications $(P1) \Longrightarrow (P2) \Longrightarrow (P3) \Longrightarrow (P1)$:

(P1) $\forall\,A,B \in \mathscr{P}(E),\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

(P2) $m(\emptyset) = 0$ et $\forall\,A,B \in \mathscr{P}(E),\ m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$

(P3) $\forall\,A,B \in \mathscr{P}(E),\ m(A \Delta B) + m(A \cap B) = m(A \cup B)$

Exercice 6

Soient X et Y deux ensembles non vides. A toute application $f : X \to Y$, on associe les applications f' et f^* suivantes:

$$\begin{array}{rccc} f' : & \mathscr{P}(X) & \longrightarrow & \mathscr{P}(Y) \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f^* : & \mathscr{P}(Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}(X) \\ & B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

1. a) Montrer que $(f' \circ f^*)(B) = B \cap f(X)$ pour tout $B \subset Y$.

   b) Montrer que $f^* \circ f' \circ f^* = f^*$ et $f' \circ f^* \circ f' = f'$.

2. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & Y^X & \longrightarrow & \mathscr{P}(Y)^{\mathscr{P}(X)} \\ & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

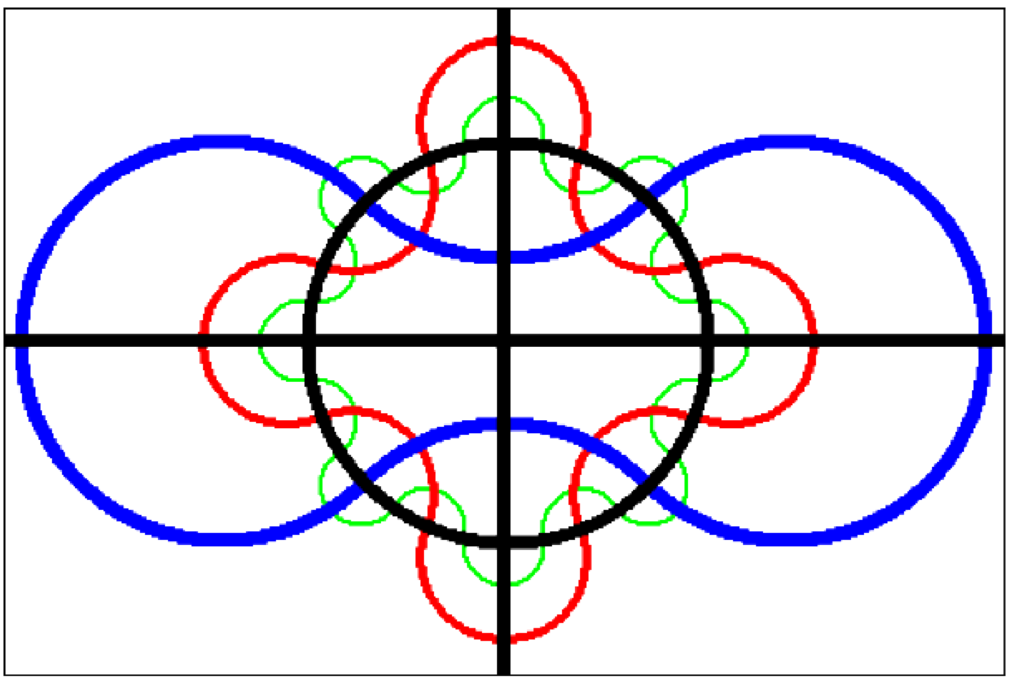
   a) Soit $f \in Y^X$; que vaut $f'(\emptyset)$? En déduire un argument très simple prouvant que ϕ ne peut pas être une surjection.

   b) L'application ϕ est-elle injective ? (justifier la réponse)

BARÈME APPROXIMATIF : 3 - 1+1$^+$ - 3 - 4 - 4 - 5

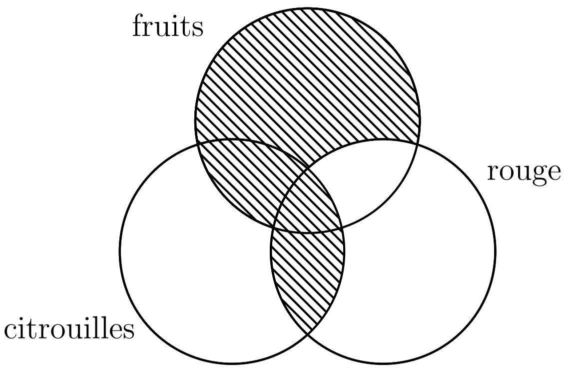
Partiel d'Algèbre 1

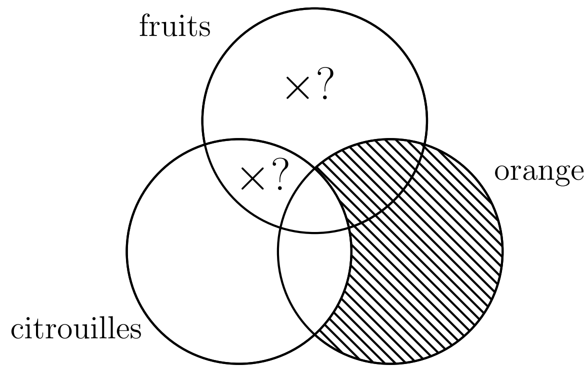
Exercice 2, question b



UT3 / L3 E / Algèbre 1 / **Correction du partiel du 04 novembre 2015**

Exercice 1 1. Le syllogisme est valide (et le diagramme d'Euler-Venn montre qu'on peut, en fait, conclure qu'*aucun fruit n'est une citrouille*). 2. Ce syllogisme n'est pas valide (le diagramme d'Euler-Venn laisse la possibilité que tous les fruits soient des citrouilles).

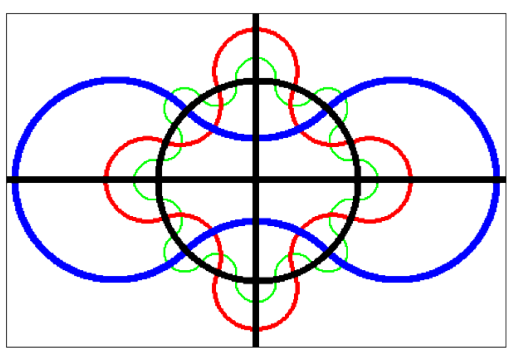




3. Si on considère ce raisonnement comme un syllogisme, il est valide (c'est le syllogisme le plus classique, du type "*Tout A est B, tout B est C, donc tout A est C*"). Le fait que la conclusion soit une contradiction nous indique que les prémisses sont douteuses, voire très douteuses... Est-ce bien au même concept de *rareté* que renvoient les deux prémisses ? Le concept de *cherté* est-il bien défini ? Est-il bien vrai que que *toutes les marchandises rares sont chères* ? Est-il vrai *toutes les marchandises qui ne sont pas chères sont rares* ? etc, etc...

Exercice 2 a. Il y a $2^6 = 64$ régions distinctes qui se déduisent de toutes les intersections possibles $\bigcap_{i \in J} A_i$ quand J décrit tous les sous-ensembles de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b.



Exercice 3 1. Il est clair que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (réflexivité : si $x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$ car $x^2 \equiv x^2 \bmod 5$, symétrie : si $x, y \in \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$, alors $x^2 \equiv y^2 \bmod 5$ implique $y^2 \equiv x^2 \bmod 5$, i.e. $y\mathcal{R}x$ et transitivité : si $x, y, z \in \mathbb{R}$ sont tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x^2 \equiv y^2 \bmod 5$ et $y^2 \equiv z^2 \bmod 5$ impliquent $x^2 \equiv z^2 \bmod 5$, i.e. $x\mathcal{R}z$).

2. Soit $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. On note que $\overline{0} = 5\mathbb{Z}$ car $x^2 \equiv 0 \bmod 5$ équivaut à $x \equiv 0 \bmod 5$ (en effet, le nombre premier 5 divise $x \times x$ si, et seulement si, 5 divise x). Que vaut $\overline{1}$?

$$x^2 \equiv 1 \bmod 5 \iff x^2 - 1 \equiv 0 \bmod 5 \iff 5 \mid (x^2 - 1) \iff \begin{cases} 5 \mid (x-1) \\ 5 \mid (x+1) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \bmod 5 \\ x \equiv -1 \bmod 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \bmod 5 \\ x \equiv 4 \bmod 5 \end{cases}$$

Autrement dit, $\overline{1} = (5\mathbb{Z} + 1) \cup (5\mathbb{Z} + 4) := \{5k + 1, 5k + 4,\ k \in \mathbb{Z}\}$. De même,

$$x^2 \equiv 2^2 \bmod 5 \iff x^2 - 4 \equiv 0 \bmod 5 \iff 5 \mid (x^2 - 4) \iff \begin{cases} 5 \mid (x-2) \\ 5 \mid (x+2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv -2 \bmod 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \end{cases}$$

Autrement dit, $\overline{2} = (5\mathbb{Z} + 2) \cup (5\mathbb{Z} + 3) := \{5k + 2, 5k + 3,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque $\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} = \mathbb{Z}$, on a trouvé toutes les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ et $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} = \{5\mathbb{Z}, (5\mathbb{Z} + 1) \cup (5\mathbb{Z} + 4), (5\mathbb{Z} + 2) \cup (5\mathbb{Z} + 3)\}$.

Exercice 4 1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.

Réflexivité. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a bien $(x,y) \preceq (x,y)$ puisque $x = x$ et $y \leq y$.

Antisymétrie. Soient $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) \preceq (a,b)$ et $(a,b) \preceq (x,y)$. Si $x < a$, alors on ne peut pas avoir $(a,b) \preceq (x,y)$ et si $a < x$, on ne peut pas avoir $(x,y) \preceq (a,b)$. Par conséquent, $x = a$ et on a donc à la fois $(x,y) \preceq (x,b)$ et $(x,b) \preceq (x,y)$, ce qui entraîne, respectivement, $y \leq b$ et $b \leq y$. D'où $y = b$ et, finalement, $(x,y) = (a,b)$.

Transitivité. Soient $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) \preceq (x',y')$ et $(x',y') \preceq (x'',y")$.

Si $x < x'$ et $x' < x''$ ou si $x < x'$ et $x' = x''$ ou encore si $x = x'$ et $x' < x''$, alors $x < x''$. Si $x = x'$ et $x' = x''$, alors $x = x''$; mais alors, on a également $y \leq y'$ (car $(x,y) \preceq (x,y')$) et $y' \leq y''$ (car $(x,y') \preceq (x,y")$), d'où ğalement $y \leq y''$. Ainsi, on a bien $(x,y) \preceq (x'',y'')$ puisqu'on a soit $x < x''$, soit $x = x''$ et $y \leq y''$.

2. Il découle de la définition de $\preceq$ que, pour tout (x,y) de C, on a $(0,0) \preceq (x,y) \preceq (1,1)$. Par conséquent, C admet un plus grand élément (1,1) (qui est donc le seul élément maximal de C) et C admet un plus petit élément (0,0) (qui est donc le seul élément minimal de C)

3. Toute partie non vide de C n'admet pas un plus grand élément. Par exemple, $(1,0) = \sup\{(x,0), 0 \leq x < 1\}$ et $(1,0) \notin \{(x,0), 0 \leq x < 1\}$

Exercice 5 $\underline{(P1) \Longrightarrow (P2)}$. En appliquant (P_1) au couple $(\emptyset,\emptyset)$, on a $m(\emptyset) = m(\emptyset \cup \emptyset) \overset{(P1)}{=} m(\emptyset) + m(\emptyset)$ et $2m(\emptyset) = m(\emptyset) \Longrightarrow m(\emptyset) = 0$.

Soient $A,B \in \mathscr{P}(E)$. En appliquant $(P1)$ au couple $(A, B \setminus A)$, on obtient

$$(1) \quad m(A \cup B) = m(A \cup (B \setminus A)) \overset{(P1)}{=} m(A) + m(B \setminus A)$$

et en appliquant $(P1)$ au couple $(B \cap A, B \setminus A)$, on obtient

$$(2) \quad m(B) = m((B \cap A) \cup (B \setminus A)) \overset{(P1)}{=} m(A \cap B) + m(B \setminus A)$$

De (2), on tire $m(B \setminus A) = m(B) - m(A \cap B)$ qui donne, avec (1), $m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, soit encore $(P2)$: $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.

$\underline{(P2) \Longrightarrow (P3)}$. Soient $A,B \in \mathscr{P}(E)$. Puisque $(A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$ et $(A\Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, en appliquant $(P2)$ au couple $(A\Delta B, A \cap B)$, on obtient $m(A \cup B) + m(\emptyset) = m(A\Delta B) + m(A \cap B)$, ce qui donne $(P3)$ compte-tenu de $m(\emptyset) = 0$.

$\underline{(P3) \Longrightarrow (P1)}$. Soient $A,B \in \mathscr{P}(E)$ tel que $A \cap B = \emptyset$. En appliquant $(P3)$ au couple $(A \cup B, B)$, on obtient $m((A \cup B)\Delta B) + m((A \cup B) \cap B)) \overset{(P3)}{=} m((A \cup B) \cup B) = m(A \cup B)$, ce qui donne $(P1)$: $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$ compte-tenu des égalités $(A \cup B) \cap B = B$ et de $A = (A \cup B)\Delta B$ qui découlent de $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 6 1. a) Soit $B \subset Y$. Par définition de f' et f^*, $(f' \circ f^*)(B) = f(f^{-1}(B))$. D'une part, $f(f^{-1}(B)) \subset f(X)$ car $f^{-1}(B) \subset X$ et, d'autre part, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ car si $z \in f(f^{-1}(B))$, par définition des images réciproque et directe, cela veut dire $z = f(a)$ avec a tel que $f(a) \in B$ (et donc $z \in B$). On a donc $(f' \circ f^*)(B) \subset B \cap f(X)$. Réciproquement, si $z \in B \cap f(X)$, alors $z \in B$ et il existe un a dans X tel que $z = f(a)$. Cela veut dire que $a \in f^{-1}(B)$ et $z = f(a) \in f(f^{-1}(B))$; ainsi, $f(f^{-1}(B)) \supset B \cap f(X)$. En conclusion, on a bien $(f' \circ f^*)(B) = B \cap f(X)$ pour tout $B \subset Y$.

b) Soit $B \subset Y$. On a $(f^* \circ f' \circ f^*)(B) = f^*((f' \circ f^*)(B)) \overset{1.a)}{=} f^*(B \cap f(X)) = f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(B) = f^*(B)$ où l'égalité $f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(B)$ se démontre par double inclusion : $f^{-1}(B \cap f(X)) \subset f^{-1}(B)$ car $B \cap f(X) \subset B$ et $f^{-1}(B \cap f(X)) \supset f^{-1}(B)$ car si $a \in f^{-1}(B)$, cela veut dire que $a \in X$ et $f(a) \in B$; ainsi $f(a) \in B \cap f(X)$ et $a \in f^{-1}(B \cap f(X))$. On a donc montré que $f^* \circ f' \circ f^* = f^*$.

Soit $A \subset X$. On a $(f' \circ f^* \circ f')(A) = (f' \circ f^*)(f'(A)) \overset{1.a)}{=} f'(A) \cap f(X) = f(A) \cap f(X) = f(A) = f'(A)$ où l'égalité $f(A) \cap f(X) = f(A)$ est évidente puisque $f(A) \subset f(X)$ (du fait que $A \subset X$). On a donc montré que $f' \circ f^* \circ f' = f'$.

2. a) Soit $f \in Y^X$. On a $f'(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset$. Ceci montre que ϕ n'est pas surjective puisque toute application[1] $g : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ telle que $g(\emptyset) \neq \emptyset$ n'est pas dans $\mathrm{Im}\,(\phi)$

b) Soit $f,g \in Y^X$ deux applications distinctes. Cela veut dire qu'il existe au moins un x dans X tel que $f(x) \neq g(x)$. Mais alors, $f'(\{x\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \neq \{g(x)\} = g(\{x\}) = g'(\{x\})$. Par conséquent, $f' \neq g'$, i.e. $\phi(f) \neq \phi(g)$ et cela prouve que ϕ est injective.

[1]Si $f : X \to Y$, alors on a nécessairement $f(\emptyset) = \emptyset$ où $f(\emptyset)$ est `l'image directe par` f `de` $\emptyset$; mais si g est une application de $\mathscr{P}(X)$ dans $\mathscr{P}(Y)$, g peut envoyer l'élément $\emptyset$ de $\mathscr{P}(X)$ sur n'importe quel élément de $\mathscr{P}(Y)$.