**Université de Toulouse – Paul-Sabatier** **Année 2018-2019**
L3 mathématiques - ESR
Mesure et Probabilités Feuille d'exercices n° 1

# Rappels de théorie de la mesure et de l'intégration – Fonction de répartition

*(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)*

**Exercice 1.** Si $\mathcal{B}$ est une $\sigma$-algèbre sur un ensemble $E$ et si $f : X \to E$ est une application, démontrer que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une $\sigma$-algèbre sur $X$.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f = 0$ presque partout (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) ; démontrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3*.** (*Ensemble et mesure de Cantor*). Poser $E_0 = [0,1]$. Enlever le tiers central (ouvert) de $E_0$ pour obtenir $E_1 = I_1^1 \cup I_1^2$. Répéter la même opération pour $I_1^1$ et $I_1^2$ pour obtenir $E_2 = I_2^1 \cup I_2^2 \cup I_2^3 \cup I_2^4$, et ainsi de suite. Décrire graphiquement $E_0$, $E_1$, $E_2$.
a) Démontrer que chaque $E_n$, $n \in \mathbb{N}$, est compact. En déduire que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est non-vide et compact (l'ensemble $C$ est appelé *l'ensemble de Cantor*).
b) Montrer que $\lambda(C) = 0$ (où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1]$).
c) Démontrer que $C$ ne contient aucun intervalle ouvert (et donc que l'intérieur de $C$ est vide).
d) Montrer que $C$ comprend les sommes de toutes les séries $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$ où $x_j \in \{0,2\}$. En déduire que $C$ n'est pas dénombrable, en fait a la même cardinalité que $[0,1]$ (pourtant $\lambda(C) = 0 \neq 1 = \lambda([0,1])$).
e) Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0,1]$, $F_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \lambda([0,x] \cap E_n)$. Représenter $F_0$, $F_1$, $F_2$. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, $|F_n(x) - F_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. En déduire que la fonction $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, $x \in [0,1]$, existe, est croissante et continue.
f) Soit $\mu_F$ la mesure de Stieltjes sur $[0,1]$ associée à la fonction croissante $F$ ; la mesure $\mu_F$ comporte-t-elle une partie atomique ? Est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$ ? Lui est-elle étrangère ?

**Exercice 4.** Soient les fonctions $u(x) = \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n};n\geq 1\}}(x)$ et $v(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ; discuter de la véracité des assertions suivantes :
(i) La fonction $u$ est continue partout sauf sur un ensemble dénombrable de points. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, $u$ est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.
(ii) La fonction $v$ est continue partout sauf sur l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, $v$ est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.
(iii) Les fonctions $u$ et $v$ sont intégrables au sens de Lebesgue et $\int_{\mathbb{R}} u d\lambda = \int_{\mathbb{R}} v d\lambda = 0$.

(iv) La fonction $v$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

**Exercice 5.** Soit $f$ une fonction intégrable sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(A) \leq \delta$, alors $\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$.

**Exercice 6.** Soit $f_n = \frac{1}{n^3} \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 1$ ; existe-t-il une fonction intégrable $g$ (pour la mesure de Lebesgue sur $[1, \infty[$) telle que $f_n \leq g$, $n \geq 1$ ? Même question pour $f_n = \frac{1}{n \ln n} \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 2$.

**Exercice 7.** (*Inégalité de Hölder*). Dans cet exercice, $\|\cdot\|_p$ désigne la norme $\mathrm{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.
a) Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Jensen, et en déduire l'inégalité de Hölder.
b) Démontrer que si $1 \leq r \leq p \leq s \leq \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}$ avec $\theta \in [0, 1]$, alors pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^\theta \|f\|_s^{1-\theta}.$$

c) Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions mesurables positives sur $X$, et $c_1, \ldots, c_n \geq 0$, $c_1 + \cdots + c_n = 1$, montrer que

$$\int_X f_1^{c_1} \cdots f_n^{c_n} d\mu \leq \left( \int_X f_1 d\mu \right)^{c_1} \cdots \left( \int_X f_n d\mu \right)^{c_n}.$$

**Exercice 8*.** On se propose de démontrer l'inégalité dite *entropique* : sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{A}, \mu)$, si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont des applications mesurables avec $f \geq 0$, $\int_X f d\mu = 1$, et $fg$ intégrable, alors

$$\int_X fg d\mu \leq \int_X f \ln f d\mu + \ln \left( \int_X e^g d\mu \right).$$

*(Indication : utiliser l'inégalité de Jensen pour la mesure de probabilité $d\nu = f d\mu$.)*

**Exercice 9.** Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $[0, 1]$. On note $m = \int_{[0,1]} x d\mu$, $v = \int_{[0,1]} (x - m)^2 d\mu$, $a = \int_{[0,1]} x^2 d\mu - m^2$ et $b = (\frac{1}{2} - m)^2 + \int_{[0,1]} x(1 - x) d\mu$. Exprimer $v$ et $b$ en fonction de $a$. En déduire que $a \leq \frac{1}{4}$ et que $a = \frac{1}{4}$ pour une unique mesure $\mu$ que l'on déterminera.

**Exercice 10.** Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ de carré intégrable pour $\mu$. Démontrer que

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_X f^2 d\mu - \left( \int_X f \, d\mu \right)^2 = \frac{1}{2} \int_X \int_X \big[ f(x) - f(y) \big]^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

**Exercice 11.** Si $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures de probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable $X$ (muni de la tribu des parties $\mathcal{P}(X)$), on définit leur *distance en variation totale* $d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \sup_{A \subset X} |\mu(A) - \nu(A)|$. Vérifier que $d_{\mathrm{TV}}$ est une distance sur l'espace des mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Démontrer que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sup \left| \int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\nu \right| = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \big| \mu(\{x\}) - \nu(\{x\}) \big|$$

où le supremum dans l'expression du milieu porte sur toutes les fonctions $f : X \to [-1, +1]$. *(Indication : considérer* $f = \mathbb{1}_{A_*} - \mathbb{1}_{A_*^c}$ *où* $A_* = \{x \in X; \mu(\{x\}) \geq \nu(\{x\})\}$*.)*

**Exercice 12.** Le théorème de Fubini s'applique-t-il à la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad (x,y) \in [0,1]^2$$

(par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2$) ?

**Exercice 13.** Calculer $\int_D (x^3 + y^3)\, d\lambda(x,y)$ où $D = \{x, y \geq 0\,; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ $(a, b > 0)$.

**Exercice 14.** (*Fonction gamma*). Soit $\Gamma(p) = \int_{]0,\infty[} x^{p-1} e^{-x} d\lambda(x)$, $p > 0$, la fonction gamma d'Euler. Démontrer que $\Gamma$ est continue, indéfiniment dérivable, et calculer sa dérivée $n$-ième. Montrer que l'on a $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ pour tout $p > 0$, et en déduire l'expression de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 15.** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(t) = 0$ si $t < 0$, $F(t) = \frac{1}{4}$ si $0 \leq t < 1$, $F(t) = \frac{t}{2}$ si $1 \leq t < 2$ et $F(t) = 1$ si $2 \leq t$. Représenter $F$.
a) Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une unique mesure de probabilité $P$ sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer $P(\{\frac{1}{2}\}), P(\{1\}), P(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)$.
c) Décomposer $P$ en la somme d'une mesure atomique et d'une mesure à densité.

**Exercice 16*.** *(Fonction quantile ou inverse généralisée).* Soit $X$ une variable aléatoire réelle. Démontrer que la fonction de répartition $F_X$ de la loi de $X$ est croissante, continue à droite, et vérifie $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$ et $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.

Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction croissante, continue à droite telle que $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$. On se propose de montrer qu'il existe une loi sur $\mathbb{R}$ dont $F$ est la fonction de répartition.
a) On définit la fonction inverse généralisée $F^{(-1)}$ de $F$ par la formule

$$F^{(-1)}(y) \;=\; \inf\big\{x \in \mathbb{R};\; F(x) \geq y\big\}.$$

Montrer que pour $y \in ]0,1[$, $F^{(-1)}(y)$ est bien définie (i.e. la borne inférieure existe dans $\mathbb{R}$).
b) Montrer que pour $y \in ]0,1[$, $F^{(-1)}(y) \leq t$ si et seulement si $y \leq F(t)$.
c) Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que la variable aléatoire $F^{(-1)}(U)$ a pour fonction de répartition $F$.

**Exercice 17.** (*Polynômes de Legendre*). Sur l'intervalle $[-1,+1]$, on orthogonalise les monômes $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ par rapport à la mesure de Lebesgue pour définir une suite de polynômes orthogonaux $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ (dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1), appelés polynômes de Legendre. Calculer $P_0$, $P_1$ et $P_2$.
a) Soit, pour tout entier $n$, $q_n$ la $n$-ième dérivée du polynôme $(x^2-1)^n$, et $Q_n = \frac{n!}{(2n)!}\, q_n$. Démontrer que pour tout $k < n$, $\int_{-1}^{+1} x^k Q_n(x) dx = 0$ et en déduire que $Q_n = P_n$.
b*) Démontrer que les polynômes sont denses dans $\mathrm{L}^2([-1,+1])$, et en déduire que les polynômes de Legendre forment une base orthogonale de $\mathrm{L}^2([-1,+1])$.