GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

Encadrant: Jean Raimbault

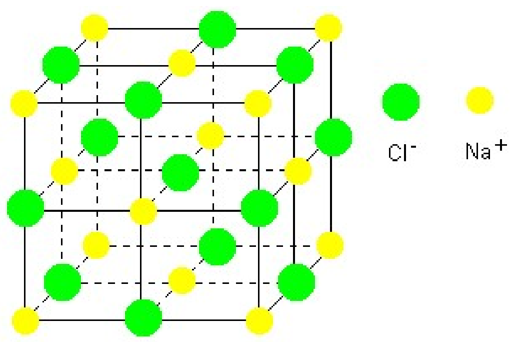
Bastien Raimondo Marie-Caroline Baudoin

22 mai 2017

Sommaire

1 Introduction

Le but de ce projet est d'étudier les groupes cristallographiques. Ces groupes sont apparus grâce à l'étude des cristaux (cristallographie). La cristallographie a permis de voir qu'un cristal est constitué d'atomes, d'ions ou de molécules ordonnés. C'est-à-dire qu'un motif ou domaine fondamental se forme et se répète un grand nombre de fois pour créer le réseau (le cristal)(voir figure ci-dessous). Dans notre étude nous serons en dimension d. Nous commencerons par définir ce qu'est un groupe cristallographique. Puis nous verrons certaines propriétés sur ces groupes, notamment le théorème de Bieberbach. Après ces propriétés nous aborderons différents exemples dans $\mathbb{R}^2$.



Le Chlorure de Sodium.

2 Définition

2.1 Isométrie

Définition 2.1 (Isométrie vectorielle)**.** *Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme, c'est-à-dire une application linéaire :*
$f : E \to F$ *tel que* $\|f(u)\| = \|u\|$ *avec* E *et* F *des espaces vectoriels euclidiens (conserve aussi le produit scalaire* $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ *car* $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}((\|u+v\|)^2 - (\|u-v\|)^2)$*).*

Définition 2.2 (Isométrie affine)**.** *Une isométrie affine est une application affine qui conserve la distance, c'est-à-dire une application affine :*
$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *(où* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *sont des espaces affines euclidiens) tel que*
$\forall A, B \in \mathcal{E},\ d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$

Remarque 2.3. *L'application linéaire associée à* ϕ *est une isométrie vectorielle.*
La composée de deux isométries est une isométrie.

Notation 2.4. *On note* $O(E)$ *l'ensemble des isométries vectorielles de* E *dans* E*.*
On note $Isom(\mathcal{E})$ *l'ensemble des isométries affines de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$*.*
On notera $O(\mathbb{R}^d) := O(d)$*.*

Théorème 2.5. $O(E)$ *et* $Isom(\mathcal{E})$ *munis de la composition des applications sont des groupes.*

Démonstration. Soit $\gamma, \gamma', \gamma'' \in O(E)$ (respectivement $\sigma, \sigma', \sigma'' \in Isom(\mathcal{E})$)
$\gamma \circ \gamma' \in O(E)$ car $\forall u \in E, \|\gamma \circ \gamma'(u)\| = \|\gamma'(u)\| = \|u\|$.
De même $\sigma \circ \sigma' \in Isom(\mathcal{E})$.
La composition des applications est bien associative.
Existence d'un élément neutre :
Notons e_E (respectivement $e_{\mathcal{E}}$ l'application identité de E dans E (respectivement de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$).
$e_E \in O(E)$ car $\forall u \in E, \|e_E(u)\| = \|u\|$.
$e_{\mathcal{E}} \in Isom(\mathcal{E})$ car $\forall u, v \in \mathcal{E}, d(e_{\mathcal{E}}(u), e_{\mathcal{E}}(v)) = d(u, v)$.
Existence d'un inverse :
Comme E est de dimension finie et que $\gamma : E \longrightarrow E$, si on montre que γ est injective, cela implique que γ est bijective.
Soit $u \in Ker(\gamma) \Rightarrow \gamma(u) = 0 \Rightarrow \|\gamma(u)\| = 0 = \|u\| \Rightarrow u = 0$
Donc γ est bijective.
Alors il existe γ' tel que $\gamma \circ \gamma' = \gamma' \circ \gamma = e_E$, de plus γ' est une application linéaire et $\forall u \in E, \|\gamma'(u)\| = \|\gamma \circ \gamma'(u)\| = \|u\|$.
Donc $\gamma' \in O(E)$. On peut faire un raisonnement similaire pour montrer que σ admet un élément inverse dans $Isom(\mathcal{E})$. □

2.2 Produit semi-direct

Définition 2.6 (produit semi-direct)**.** *Soient* Q *et* H *deux groupes et* $\varphi : Q \to Aut(H)$ *un morphisme. On définit sur l'ensemble* $Q \times H$ *une structure de groupe en posant :*
$(q_1, h_1) * (q_2, h_2) = (q_1 q_2, h_1 [\varphi(q_1)(h_2)])$
Le groupe $(Q \ltimes H, *)$*s'appelle le produit semi-direct de* H *par* Q *(via* φ*) et on le note* $Q \ltimes_\varphi H$ *(plus précisément on dit "produit semi-direct externe", car* H *et* Q *ne sont pas des sous-groupes d'un même groupe).*

Remarque 2.7. *Le groupe* $Q \ltimes_\varphi H$ *contient les sous-groupes* $H_1 = \{(e_Q, h)\,|h \in H\}$ *et* $Q_1 = \{(q, e_H)\,|q \in Q\}$*. Le groupe* H_1 *est distingué dans* $Q \ltimes_\varphi H$ *et le groupe* $Q \ltimes_\varphi H$ *est égal au groupe* $Q_1 H_1$ *avec* $H_1 \cong H$ *,* $Q_1 \cong Q$ *et* $H_1 \cap Q_1 = \{e\}$*.*

On va étudier $O(d) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$ avec :

$$\begin{array}{rlcl} \varphi : & O(d) & \to & Aut(\mathbb{R}^d) \\ & A & \mapsto & \varphi(A) = Ax = \varphi_A(x) \end{array}$$

Montrons que φ_A est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^d$.
Montrons d'abord que c'est un morphisme : Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, alors $\varphi_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi_A(x) + \varphi_A(y)$
Montrons maintenant que φ_A est bijectif :
Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, alors $\varphi_A(x) = \varphi_A(y) \Leftrightarrow Ax = Ay \Leftrightarrow x = y$ car $A \in O(d) \subset GL_d(\mathbb{R})$, donc φ_A est injectif.
Soit $y \in \mathbb{R}^d$, prenons $x = A^{-1}y \in \mathbb{R}^d$, alors $\varphi_A(x) = Ax = AA^{-1}y = y$, donc φ_A est surjectif.
Donc φ_A est bien un automorphisme.
Alors le produit semi-direct de $\mathbb{R}^d$ par $O(d)$ est muni de la loi $\cdot$ définie par :
$(A_1, x_1) \cdot (A_2, x_2) = (A_1A_2, x_1 + [\varphi(A_1)(x_2)]) = (A_1A_2, x_1 + A_1x_2)$,
$\forall (A_1, x_1), (A_2, x_2) \in O(d) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$
De plus A_1A_2 appartient bien à $O(d)$ et $x_1 + A_1x_2$ appartient bien a $\mathbb{R}^d$.

Nous admettrons que $Isom(\mathbb{R}^d)$ est engendré par $\mathbb{R}^d$ (translation) et par $O(d)$ (rotation), alors $< \mathbb{R}^d, O(d) >= Isom(\mathbb{R}^d)$, de plus $\mathbb{R}^d < Isom(\mathbb{R}^d)$ et $O(d) < Isom(\mathbb{R}^d)$.
Donc $Isom(\mathbb{R}^d) \cong O(d) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$.
Alors il existe π un isomorphisme de $Isom(\mathbb{R}^d)$ dans $O(d) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$.
Soit $\varphi \in Isom(\mathbb{R}^d)$, alors $\begin{array}{rlcl} \varphi : & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ & x & \mapsto & Ax + b \end{array}$, avec $A \in O(d)$ et $b \in \mathbb{R}^d$.
Donc $\begin{array}{rlcl} \pi : & Isom(\mathbb{R}^d) & \to & O(d) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d \\ & \varphi(x) = Ax + b & \mapsto & (A, b) \end{array}$ et $\begin{array}{rlcl} \pi^{-1} : & O(d) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d & \to & Isom(\mathbb{R}^d) \\ & (A, b) & \mapsto & \varphi(x) = Ax + b \end{array}$
Donc la loi de $(Isom(\mathbb{R}^d), \circ)$ est définie par :
$\varphi_1 \circ \varphi_2(x) = \pi^{-1}(\pi(\varphi_1(x) \circ \varphi_2(x))) = \pi^{-1}(\pi(\varphi_1(x)) \cdot \pi(\varphi_2(x))) = \pi^{-1}((A_1, b_1) \cdot (A_2, b_2)) = \pi^{-1}((A_1A_2, A_1b_2 + b_1)) = A_1A_2x + A_1b_2 + b_1, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in Isom(\mathbb{R}^d)$
Donc $(Isom(\mathbb{R}^d), \circ)$ est un groupe avec l'identité $e = I_dx + 0_{\mathbb{R}^d}$ et $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$, on a bien $A^{-1} \in O(d)$, $-A^{-1}b \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi(x) = \varphi \circ \varphi^{-1}(x) = AA^{-1}x - AA^{-1}b + b = I_dx + 0_{\mathbb{R}^d}$.

Notation 2.8. *Maintenant pour simplifier les notations, nous noterons les éléments de $Isom(\mathbb{R}^d)$ comme les éléments de $O(d) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$, par exemple $\varphi \in Isom(\mathbb{R}^d)$ tel que $\varphi(x) = Ax + b$ sera maintenant noté (A, b).*

Nous pouvons voir $Isom(\mathbb{R}^d)$ comme un sous-groupe de $GL_{d+1}(\mathbb{R})$.
On définit : $\begin{array}{rlcl} \Phi : & Isom(\mathbb{R}^d) & \to & GL_{d+1}(\mathbb{R}) \\ & \varphi = (A, b) & \mapsto & \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$
Φ est bien injective car $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = \varphi'$.
$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \in GL_{d+1}(\mathbb{R})$ car $det(B) = det(A) \neq 0$ car $A \in O(d)$.
Nous avons vu que $(A_1, b_1) \circ (A_2, b_2) = (A_1A_2, A_1b_2 + b_1)$, et pour l'écriture sous forme de matrice cela est pareil :
$\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 & A_1b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{d+1}(\mathbb{R})$
$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}b + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{d+1}$ donc $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donc on peut voir $Isom(\mathbb{R}^d)$ comme une sous-groupe de $GL_{d+1}(\mathbb{R})$.

Notation 2.9. *On note $\|.\|$ la norme d'opérateur sur Gl_{d+1}, elle permet de définir la topologie sur le groupe des isométries de $\mathbb{R}^d$. On peut remarquer que toutes les normes sont équivalentes car on est en dimension finie.*

Lemme 2.10. *$H < Isom(\mathbb{R}^d)$ et $T = H \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ et $v \in T$, alors $\forall g \in O(d)$ qui est une partie linéaire d'un élément de H, $gv \in T$*

Démonstration. $H \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d) = \{\varphi \text{ tel que } \varphi \in H \text{ et } \varphi \in 1 \ltimes \mathbb{R}^d\} = \{\varphi \text{ tel que } \varphi = (I_d, h) \in H\}$
Soit $g \in O(d)$ qui est la partie linéaire d'un élément de H, alors $\exists \varphi \in H$ tel que $\varphi = (g, h)$ et $v \in T$, alors $v = (I_d, v) \in H$.
Comme $(g, h) \in H$, alors $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}h) \in H$ et $(I_d, v) \in H$,
alors $(g, h)(I_d, v)(g, h)^{-1} \in H$ car $H < Isom(\mathbb{R}^d)$
$(g, h)(I_d, v)(g, h)^{-1} = (g, gv + h)(g^{-1}, -g^{-1}h) = (I_d, -h + gv + h) = (I_d, gv) = gv$, donc $gv \in T$. □

Lemme 2.11. *Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Isom(\mathbb{R}^d)$ converge vers g quand n tend vers l'infini si et seulement si pour tout ensemble fini de points $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ on a $g_n x_i$ qui converge vers gx_i quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. Sens direct :
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Isom(\mathbb{R}^d)$ tel que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ avec $g_n = (A_n, b_n)$ et $g = (A, b)$,
alors $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.
Soit $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble fini de points,
$g_n x_i = A_n x_i + b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Ax_i + b = gx_i$
Donc $g_n x_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} gx_i, \forall i = 1, \cdots, n$.
Sens indirect : Pour tout ensemble fini de points $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ on a :
$g_n x_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} gx_i, \forall i = 1, \cdots, n$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$ on a $g_n x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} gx$, avec $g_n x = A_n x + b_n$ et $gx = Ax + b$.
Montrons que $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Prenons $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \Rightarrow g_n x = b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} gx = b \Rightarrow b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Prenons $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec le 1 à la i^{eme} ligne, alors $g_n x = A_n^{(i)} + b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} gx = A^{(i)} + b$ avec $B^{(i)}$ la i^{eme} colonne de B.
On a vu que : $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b \Rightarrow A_n^{(i)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A^{(i)}, \forall i = 1, \cdots, d$, donc $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et donc $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$. □

2.3 Définition de groupes cristallographiques

Définition 2.12. *Un sous-groupe Γ de $Isom(\mathbb{R}^d)$ est appelé un groupe cristallographique si pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$, l'orbite $\Gamma x = \{\gamma(x) \text{ tel que } \gamma \in \Gamma\}$ est discrète et il existe $R \in]0, +\infty[$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $d(y, \gamma(x)) \leq R$.*

Définition 2.13 (cocompact)**.** *Γ est cocompact dans $Isom(\mathbb{R}^d)$ si $Isom(\mathbb{R}^d)/\Gamma$ est compact dans le quotient topologique.*

Remarque 2.14. *Le fait que Γ soit cocompact dans $Isom(\mathbb{R}^d)$, revient à dire qu'il existe $C \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $\Gamma(C) = \mathbb{R}^d$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\exists \gamma \in \Gamma, \exists c \in C$ tel que $\gamma(c) = x$, comme Γ est un groupe, cela revient à dire que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists \gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) \in C$.*

Théorème 2.15. *(admis) Un sous-groupe Γ de $Isom(\mathbb{R}^d)$ est un groupe cristallographique si et seulement si Γ est un sous-groupe discret et cocompact de $Isom(\mathbb{R}^d)$.*

Lemme 2.16. *Soit Γ un groupe cristallographique et $\Gamma' < \Gamma$.*
Alors Γ' est un groupe cristallographique si et seulement s'il est d'indice fini dans Γ.

Démonstration. Soit Γ un groupe cristallographique et $\Gamma' < \Gamma$.
Montrons d'abord le sens indirect. Supposons que Γ' est d'indice fini dans Γ, montrons que Γ' est un groupe cristallographique.
Γ' est bien discret car sinon Γ ne l'est pas, ce qui est absurde.
$\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \Gamma'$, avec $\gamma_i \in \Gamma$. Car Γ' est d'indice fini dans Γ.
Γ est cristallographique donc $\exists C \subset \mathbb{R}^d$ compact, tel que $\Gamma(C) = \mathbb{R}^d$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists \gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) \in C$.
Posons $C' = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma_i^{-1}(C)$, $\gamma_i^{-1}(C)$ est compact car γ_i^{-1} est continue. Donc C' est bien un compact car c'est une union finie de compact.
Il reste à montrer que Γ' est cocompact de $Isom(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists \gamma' \in \Gamma'$ tel que $\gamma'(x) \in C'$.
Soit $x \in \mathbb{R}^d, \exists \gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) \in C$,
comme $\gamma \in \Gamma, \exists \gamma' \in \Gamma', \exists j \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $\gamma = \gamma_j \gamma'$.
$\gamma(x) = \gamma_j \gamma'(x) \in C \Rightarrow \gamma'(x) \in \gamma_j^{-1}(C) \subset C'$.
Donc Γ' est un groupe cristallographique.
Montrons maintenant le sens direct.
Supposons que Γ' est un groupe cristallographique, alors il existe $C' \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $\Gamma'(C') = \mathbb{R}^d$.
Montrons par l'absurde que l'indice de Γ' dans Γ est fini.
Supposons que $|\Gamma/\Gamma'| = +\infty \Rightarrow \Gamma = \bigsqcup\limits_{i \in I} (\gamma_i \Gamma')$ avec $Card(I) = +\infty$ et γ_i distinct modulo Γ'.
Alors on peut prendre une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec γ_n distincts deux à deux et $\exists i \in I$ tel que $\gamma_n = \gamma_i$.
Prenons $0 \in \mathbb{R}^d, \gamma_n(0) \in \mathbb{R}^d, \Rightarrow \exists \gamma'_n$ tel que $\gamma'_n \gamma_n(0) \in C'$,
$\Rightarrow \exists$ une sous-suite extraite de $\gamma'_n \gamma_n(0)$ qui converge.
$\Rightarrow \gamma'_{\phi(n)} \gamma_{\phi(n)}(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma(0) = t$
Notons $\sigma_{\phi(n)} := \gamma'_{\phi(n)} \gamma_{\phi(n)}$, ils sont distincts deux à deux car les γ_i sont distincts deux à deux modulo Γ'. $\sigma_{\phi(n)} = (g_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ et donc $\sigma_{\phi(n)}(0) = t_{\phi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t$
$\sigma_{\phi(n)} = \begin{pmatrix} g_{\phi(n)} & t_{\phi(n)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sous forme de matrice. Et de plus $g_{\phi(n)} \in O(d)$ qui est compact.
Donc on peut extraire une sous-suite qui converge $g_{\psi(\phi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g \in O(d)$.
Donc $\sigma_{\psi(\phi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma = (g, t) \in Isom(\mathbb{R}^d)$ car $g \in O(d)$ et $t \in \mathbb{R}^d$.
Donc cela contredit le fait que Γ soit discret, ce qui est absurde. Donc l'indice de Γ' dans Γ est fini. □

Définition 2.17. *Un domaine fondamental pour un groupe cristallographique Γ est un compact C dont les images par les éléments de Γ recouvrent $\mathbb{R}^d$ et les images de C par deux éléments distincts de Γ ont une intersection d'intérieur vide.*

3 Structure des groupes cristallographiques

3.1 Préliminaires pour le théorème de Bieberbach

Lemme 3.1. *Soit $O(d)$ le groupe orthogonal et soit $A, B \in O(d)$. Alors il existe un voisinage de l'identité $\mathcal{V}(I_d) = \{M \in O(d)$ tel que $\|M - I_d\| < \eta\}$ tel que si $A, B \in \mathcal{V}(I_d)$ et $AB \neq BA$, alors A ne commute pas avec $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$.*

Démonstration. Par contraposée, supposons que A et $[A, B]$ commutent.
$AABA^{-1}B^{-1} = ABA^{-1}B^{-1}A \Rightarrow ABA^{-1}B^{-1} = BA^{-1}B^{-1}A$
Donc A commute avec $BA^{-1}B^{-1}$
On a $(ABA^{-1}B^{-1})^{-1} = BAB^{-1}A^{-1}$ et $(BA^{-1}B^{-1}A)^{-1} = A^{-1}BAB^{-1}$
Or $(ABA^{-1}B^{-1})^{-1} = (BA^{-1}B^{-1}A)^{-1}$
$\Rightarrow BAB^{-1}A^{-1} = A^{-1}BAB^{-1}$
Donc A^{-1} commute avec BAB^{-1}
$\Rightarrow ABAB^{-1}A^{-1}A = AA^{-1}BAB^{-1}A \Rightarrow ABAB^{-1} = BAB^{-1}A$
Donc A commute avec BAB^{-1}
$A, B \in O(d)$ donc $AA^T = A^TA = I_d$ et $BB^T = B^TB = I_d$
$(BAB^{-1})(BAB^{-1})^T = BAB^{-1}BA^{-1}B^{-1} = I_d = (BAB^{-1})^T(BAB^{-1})$
Donc A et BAB^{-1} sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ (d'après le théorème spectrale) et $\mathbb{C}^d$ admet une base orthonormée de vecteurs propres.
De plus ils commutent, donc ils sont diagonalisables dans la même base orthogonale.
Notons $E_1, .., E_r$ les sous-espaces propres de A et BAB^{-1}(ce sont les mêmes car diagonalisables dans la même base).
A et BAB^{-1} ont même valeur propre car A et BAB^{-1} sont semblables.
$BE_1, .., BE_r$ forment également l'ensemble des sous-espaces propres de BAB^{-1}
car si v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de A, alors $w = Bv$ est vecteur propre de BAB^{-1} associé à la même valeur propre λ car $Av = \lambda v$ et
$BAB^{-1}w = BAB^{-1}Bv = BAv = \lambda Bv = \lambda w$
Donc $BE_1, .., BE_r$ forment bien l'ensemble des sous-espaces propres de BAB^{-1}.
Donc la matrice B doit nécessairement permuter les E_i.
Mais si $x \in E_i$ et $Bx \in E_j$ avec $i \neq j$, alors $Bx \perp x \Leftrightarrow \langle Bx, x\rangle = 0$
$\|Bx, x\|_d^2 =< Bx - x, Bx - x >=< Bx - x, Bx > + < Bx - x, -x >$
$=< Bx, Bx > - < x, Bx > + < x, x > - < Bx, x >= \|Bx\|_d^2 + \|x\|_d^2 =< Bx, Bx > +\|x\|_d^2$
$=< x, B^TBx > +\|x\|_d^2 =< x, x > +\|x\|_d^2 = 2\|x\|_d^2$.
Et de plus,$\|Bx - x\|_d^2 = \|(B - I_d)x\|_d^2 \leq \|B - I_d\|^2\|x\|_d^2 < \eta^2\|x\|_d^2$ comme $B \in \mathcal{V}(I_d)$
Prenons $\eta = \sqrt{2} \Rightarrow \|B - I_d\| < \sqrt{2} \Rightarrow \|Bx, x\|_d^2 < 2\|x\|_d^2$
Donc $Bx \in E_i$
La matrice B préserve donc chaque sous-espace propre de A. Notons P la matrice qui diagonalise A, donc $P' = BP$ diagonalise aussi A car B préserve chaque sous-espace propre de A.
Donc D_A la matrice diagonale de A :
$D_A = P^{-1}AP = P'^{-1}AP' = P^{-1}B^{-1}ABP \Rightarrow A = B^{-1}AB \Rightarrow AB = BA$
Donc si $A, B \in \mathcal{V}(I_d) = \{M \in O(d)$ tel que $\|M - I_d\| < \sqrt{2}\}$ et si A et $[A, B]$ commutent alors A et B commutent.
Donc si A ne commute pas avec B alors A ne commute pas avec $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ □

Lemme 3.2. *Soit $O(d)$ le groupe orthogonal. Alors il existe un voisinage de l'identité $\mathcal{V}(I_d) = \{M \in O(d)$ tel que $\|M - I_d\| < \eta\}$ dans $O(d)$ tel que pour tout $g_1, g_2 \in \mathcal{V}(Id)$, $[g_1, g_2] \in \mathcal{V}(I_d)$ et la suite*
$[g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]], [g_1, [g_1, [g_1, g_2]]], \ldots$ converge vers l'identité.

Démonstration. Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{V}(I_d)$, prenons $\|.\|$ une norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$.
Soit $\eta > 0 \Rightarrow \|g_1 - I_d\| < \eta$ et $\|g_2 - I_d\| < \eta$
$\|[g_1, g_2] - I_d\| = \|g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} - I_d\| = \|g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} - g_2g_1g_1^{-1}g_2^{-1}\| = \|(g_1g_2 - g_2g_1)g_1^{-1}g_2^{-1}\|$

$\leq \|g_1g_2 - g_2g_1\|\|g_1^{-1}g_2^{-1}\| \leq \|g_1g_2 - g_2g_1\|\|\|g_1^{-1}\|\|g_2^{-1}\|$
Or $XY - YX = (X - I)(Y - I) - (Y - I)(X - I)$ et $\|g_1^{-1}\| = 1, \|g_2^{-1}\| = 1$ car $g_1^{-1}, g_2^{-1} \in O(d)$
$\leq \|g_1 - I_d\|\|g_2 - I_d\| + \|g_2 - I_d\|\|g_1 - I_d\| \leq 2\|g_1 - I_d\|\|g_2 - I_d\| < 2\eta^2$
Donc $U_n = \left[\underbrace{g_1, ..., [g_1}_{n \text{ fois}}, g_2]...\right]$
Par récurrence on obtient : $\|U_n - I_d\| < 2^n\eta^{n+1}$
Prenons $\eta < 1/4$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \|U_n - I_d\| \leq 2^n\eta^{n+1} = 0$ car $\eta < 1/4$
Donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I_d$ □

Lemme 3.3. *Il existe un petit voisinage $\mathcal{V}(I_d) = \{M \in O(d)$ tel que $\|M - I_d\| < \eta\}$ de l'identité dans $O(d)$ tel que*
$\forall g \in O(d), g\mathcal{V}(I_d)g^{-1} = \mathcal{V}(I_d)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{V}(I_d) = \{M \in O(d)$ tel que $\|M - I_d\| < \eta\}$.
Soit $g \in O(d)$
$\cdot$ Montons que $g\mathcal{V}(I_d)g^{-1} \subset \mathcal{V}(I_d)$.
Soit $g'' \in g\mathcal{V}(I_d)g^{-1}$, alors il existe $g' \in \mathcal{V}(I_d)$ tel que $g'' = gg'g^{-1}$.
$\|gg'g^{-1} - I_d\| = \|g(g' - I_d)g^{-1}\| \leq \|g\|\|g' - I_d\|\|g^{-1}\| \leq \|g' - I_d\| < \eta$,
car pour tout $M \in O(d)$, $\|M\| = 1$.
alors $g'' \in \mathcal{V}(I_d)$ et donc $g\mathcal{V}(I_d)g^{-1} \subset \mathcal{V}(I_d)$.
$\cdot$ Montrons que $\mathcal{V}(I_d) \subset g\mathcal{V}(I_d)g^{-1}$.
Soit $g' \in \mathcal{V}(I_d)$, par le premier point $g^{-1}g'g \in \mathcal{V}(I_d)$, donc $g' = gg^{-1}g'gg^{-1}$ et $g^{-1}g'g \in \mathcal{V}(I_d)$, donc $g' \in g\mathcal{V}(I_d)g^{-1}$. Donc $\mathcal{V}(I_d) \subset g\mathcal{V}(I_d)g^{-1}$.
Donc, pour tout $g \in O(d)$, $g\mathcal{V}(I_d)g^{-1} = \mathcal{V}(I_d)$. □

Lemme 3.4. *Soit Γ un groupe cristallographique et soit $x \in \mathbb{R}^d$. Alors $Vect(\{\gamma(x)$, pour $\gamma \in \Gamma\}) = \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Par l'absurde,
On suppose que le lemme est faux, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $W = Vect(\{\gamma(x_0), \gamma \in \Gamma\})$ et $W \subsetneq \mathbb{R}^d$ (W sous-groupe linéaire de $\mathbb{R}^d$)
Par un changement d'origine dans $\mathbb{R}^d$, nous le choisissons de telle sorte que $O(d)$ fixe x_0.
Et alors si $\gamma \in \Gamma, \gamma = (g(\gamma), t(\gamma))$
$\gamma(x_0) = g(\gamma)x_0 + t(\gamma) = t(\gamma)$ car $O(d)$ fixe x_0.
Donc $\{\gamma(x_0), \gamma \in \Gamma\} = \{t(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$.
Donc $W = Vect(\{t(\gamma), \gamma \in \Gamma\})$.
$\Gamma < Isom(\mathbb{R}^d)$ et $W = Vect(\{t(\gamma), \gamma \in \Gamma\})$
Montrons que : $g(W) = W$ avec $g = g(\gamma), \forall\gamma \in \Gamma$.
Montrons d'abord que $gx \in W, \forall\gamma \in \Gamma, \forall x \in \{\gamma(x_0), \gamma \in \Gamma\} = \{t(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$.
Soit $x \in \{\gamma(x_0), \gamma \in \Gamma\} = \{t(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$, soit $\gamma \in \Gamma$, $\gamma = (\underbrace{g(\gamma)}_{g}, t(\gamma))$
et il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $\gamma' = (\underbrace{g(\gamma')}_{g'}, x)$
$\gamma\gamma' \in \Gamma$ car Γ est un groupe.
$\gamma\gamma' = (g, t(\gamma)) \cdot (g', x) = (gg', gx + t(\gamma))$
$\Rightarrow gx + t(\gamma) \in \{t(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ et $t(\gamma) \in \{t(\gamma), \gamma \in \Gamma\} \Rightarrow gx + t(\gamma) \in W$ et $t(\gamma) \in W$
$\Rightarrow gx + t(\gamma) + \lambda t(\gamma) \in W, \forall\lambda \in \mathbb{R}$(car W est un sous-espace linéaire).
Prenons $\lambda = -1 \Rightarrow gx \in W$
Montrons que $gx \in W, \forall\gamma \in \Gamma$ et $\forall x \in W$.
Soit $x \in W = Vect(\{\gamma(x_0), \gamma \in \Gamma\}), x = \sum\limits_{i=1}^{d-1} \lambda_i x_i, gx_i \in W$ car $x_i \in \{\gamma(x_0), \gamma \in \Gamma\}$
$\Rightarrow gx \in W$ car W sous-espace linéaire.

Première inclusion : $W \subset g(W)$
Soit $\gamma \in \Gamma$, et $g = g(\gamma)$. Soit $x \in W$
Montrons que $x \in g(W)$ ie : il existe $y \in W$ tel que $x = gy$
Prenons $y = g^{-1}x \Rightarrow gy = gg^{-1}x = x$
$g = g(\gamma)$,comme $\gamma \in \Gamma$ et Γ est un groupe.
$\Rightarrow \gamma^{-1} \in \Gamma$ et $g(\gamma^{-1}) = g^{-1} \Rightarrow g^{-1}x \in W$ car $gx \in W, \forall x \in W$ et $\forall \gamma \in \Gamma$
$\Rightarrow y \in W$
Donc $W \subset g(W)$
Deuxième inclusion : $g(W) \subset W$
Soit $\gamma \in \Gamma$, et $g = g(\gamma)$
Soit $y \in g(W)$, Montrons que $y \in W$
$y \in g(W) \Rightarrow \exists x \in W$ tel que $y = gx \Rightarrow y \in W$
D'où $g(W) \subset W$.
Donc on a bien $g(W) = W$
Prenons l'orthogonale de W, $W^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\forall y \in W < x, y >= 0\}$
Soit $x \in W^{\perp}$avec $d(x, W) = d$
Soit $\gamma = (g(\gamma), t(\gamma)), g(\gamma) \in O(d)$
Montrons que $g(\gamma)x \in W^{\perp}$
$g(\gamma) \in O(d)$ donc $g(\gamma)$ conserve la norme et le produit scalaire.
Soit $y \in W$, donc $< y, x >= 0$ car $x \in W^{\perp}$ et $y \in W$ alors $< g(\gamma)y, g(\gamma)x >= 0$
On a vu avant que $g(\gamma)W = W, \forall \gamma \in \Gamma$
Donc $< g(\gamma)x, y' >= 0, \forall y' \in W$
Donc $g(\gamma)x \in W^{\perp}$
$\gamma(x) = g(\gamma)x + t(\gamma)$, on a $d(\gamma(x), W) = d(g(\gamma)x + t(\gamma), W) = d(g(\gamma)x, W)$ car $t(\gamma) \in W$
$d(x, W) = d(g(\gamma)x, g(\gamma)W) = d(g(\gamma)x, W)$ car $g(\gamma)W = W, \forall \gamma \in \Gamma$
Donc $d(\gamma(x), W) = d(x, W)$
Prenons $X \in W \subset \mathbb{R}^d$, soit $R \in]0, +\infty[$, prenons $Y \in W^{\perp} \subset \mathbb{R}^d$ tel que $d(Y, W) = R$
Donc $d(Y, X) \geq R$
$\forall \gamma \in \Gamma, d(\gamma(X), Y) = d(\gamma^{-1}(\gamma(X)), \gamma^{-1}(Y)) = d(X, \gamma^{-1}(Y)) \geq R$
Donc Γ n'est pas un groupe cristallographique, ce qui est absurde.
Donc cela prouve le lemme.

□

Lemme 3.5. *Soit Γ un groupe cristallographique abélien alors Γ contient seulement les translations pures.*

Démonstration. Soit Γ un groupe cristallographique abélien.
Raisonnons par l'absurde, supposons que Γ ne contient pas que des translations pures, alors il existe un élément $\gamma_0 \in \Gamma$ avec $\gamma_0 = (g(\gamma_0), t(\gamma_0))$ et $g(\gamma_0) \neq I_d$.
Alors nous pouvons toujours choisir une origine et un système de coordonnées dans $\mathbb{R}^d$ tel que en utilisant les coordonnées homogènes :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_r & 0 & t(\gamma_0) \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où I_r est l'identité dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $(\delta - I_s)$ est inversible car δ est la partie des valeurs propres différentes de 1, $t(\gamma_0) \in \mathbb{R}^r$,$1 \in \mathbb{R}$ et $s + r = d$
Alors par le lemme 3.4, il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & t_1 \\ 0 & B & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, $t_1 \in \mathbb{R}^r$ et $t_2 \neq 0 \in \mathbb{R}^s$.
Puisque Γ est abélien, alors $\gamma_1\gamma_0\gamma_1^{-1} = \gamma_0$

$$\Rightarrow \gamma_1\gamma_0\gamma_1^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 & t_1 \\ 0 & B & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 & t_0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & -A^{-1}t_1 \\ 0 & B^{-1} & -B^{-1}t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 & t_1 + At_0 \\ 0 & B\delta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & -A^{-1}t_1 \\ 0 & B^{-1} & -B^{-1}t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & At_0 \\ 0 & B\delta B^{-1} & (-B\delta B^{-1} + I_s)t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & t_0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} At_0 = t_0 \\ B\delta B^{-1} = \delta \\ (-B\delta B^{-1} + I_s)t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\delta = \delta B \\ -(\delta - I_s)t_2 = 0 \end{cases}$$

or $(\delta - I_s)$ est inversible et $t_2 \neq 0$ donc cela est absurde.
Donc Γ contient seulement les translations pures. □

Proposition 3.6. *Soit Γ un sous-groupe discret de $Isom(\mathbb{R}^d)$. Soit Ψ l'homomorphisme de $Isom(\mathbb{R}^d)$ dans $O(d)$ avec $Ker(\Psi) = \mathbb{R}^d$ (i.e. : $\forall \gamma \in \Gamma$, avec $\gamma = (g, t), \Psi(\gamma) = g \in O(d)$). Alors le sous-groupe engendré par le voisinage de l'identité de $\Psi(\Gamma)$ dans $O(d)$ est abélien.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que le sous-groupe engendré par le voisinage de l'identité de $\Psi(\Gamma)$ dans $O(d)$ n'est pas abélien. Notons $\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ le sous-groupe engendré par le voisinage de l'identité.
Soit $\mathcal{V}(I_d)$ un voisinage de l'identité dans $O(d)$ tel que $\forall g \in \mathcal{V}(I_d), \|g - I_d\| < \eta$, avec $\eta > 0$.
Soient $\gamma_1 = (g_1, t_1), \gamma_2 = (g_2, t_2) \in \Gamma$ tel que $g_1, g_2 \in \mathcal{V}(I_d) \subset O(d)$ et $g_1g_2 \neq g_2g_1$ (il existe bien car on a supposé que $\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ n'est pas abélien).
Alors $[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = (g_1, t_1)(g_2, t_2)(g_1^{-1}, -g_1^{-1}t_1)(g_2^{-1}, -g_2^{-1}t_2)$
$= (g_1g_2, g_1t_2 + t_2)(g_1^{-1}g_2^{-1}, -g_1^{-1}g_2^{-1}t_2 - g_1^{-1}t_1)$
$= (g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}, -g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}t_2 - g_1g_2g_1^{-1}t_1 + g_1t_2 + t_1)$
$= ([g_1, g_2], -g_1(g_2g_1^{-1}g_2^{-1}t_2 - t_2) - (g_1g_2g_1^{-1} - I_d)t_1)$
$= ([g_1, g_2], -g_1(g_2g_1^{-1}g_2^{-1} - I_d)t_2 - (g_1g_2g_1^{-1} - I_d)t_1)$
Prenons la suite $V_n = [\underbrace{\gamma_1, ..., [\gamma_1}_{n \text{ fois}}, \gamma_2]...]$

Par le lemme 3.2, le coefficient dans $O(d)$ qui est égal à
$[\underbrace{g_1, ..., [g_1}_{n \text{ fois}}, g_2]...] = \Psi(V_n)$ converge vers l'identité pour $\mathcal{V}(I_d)$ assez petit et $\|\Psi(V_n)\| \leq 2^n\eta^{n+1}$.
Et le coefficient dans $\mathbb{R}$ de V_n notons le $t(V_n)$, alors :
$t(V_1) = -g_1(g_2g_1^{-1}g_2^{-1} - I_d)t_2 - (g_1g_2g_1^{-1} - I_d)t_1$,
alors $\|t(V_1)\| \leq \underbrace{\|g_1\|}_{=1 \text{ car } \in O(d)} \| \underbrace{g_2g_1^{-1}g_2^{-1}}_{\in \mathcal{V}(I_d) \text{ par le lemme 3.3}} - I_d\|\|t_2\| + \| \underbrace{g_1g_2g_1^{-1}}_{\in \mathcal{V}(I_d) \text{ par le lemme 3.3}} - I_d\|\|t_1\|$
$g_1^{-1} \in \mathcal{V}(I_d)$ car $\|g_1^{-1} - I\| = \|I - g_1^{-1}\| = \|g_1^{-1}\|\|g_1 - I\| < \eta$ donc on peut bien appliquer le lemme 3.3.
Donc $\|t(V_1)\| \leq \eta(\|t_2\| + \|t_1\|)$.
Par récurrence on trouve que $\|t(V_n)\| \leq \eta^{n-1}\|t(V_1)\| + \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^i\right) \eta^n\|t_1\|$
Donc $\|t(V_n)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour η assez petit. Montrons que g_1 ne commute pas avec $\Psi(V_n), \forall n \in \mathbb{N}$.
Par récurrence, Initialisation : $g_1g_2 \neq g_2g_1$ alors par le lemme 3.1, g_1 ne commute pas avec $[g_1, g_2] = \Psi(V_1)$.
Hérédité : Supposons que au rang n, g_1 ne commute pas avec $\Psi(V_n)$.
Montrons que g_1 ne commute pas avec $\Psi(V_{n+1})$.
On sait que $\Psi(V_n) \in \mathcal{V}(I_d)$ et $\Psi(V_n)$ ne commute pas avec g_1 par hypothèse de récurrence, donc par le lemme 3.1, $[g_1, \Psi(V_n)]$ ne commute pas avec g_1 et $[g_1, \Psi(V_n)] = \Psi(V_{n+1})$.
Donc g_1 ne commute pas avec $\Psi(V_n), \forall n \in \mathbb{N}$.
Donc on supposons que $\Psi(V_{n+1}) = I_d \Rightarrow [g_1, \Psi(V_n)] = I_d \Rightarrow g_1\Psi(V_n) = \Psi(V_n)g_1$,

alors g_1 commute avec $\Psi(V_n)$, ce qui est absurde, donc $\Psi(V_n) \neq I_d, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons que c'est absurde que $\Psi(V_n)$ converge vers l'identité sans jamais l'atteindre avec le fait que Γ est discret.
Γ est discret $\Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma, \exists \varepsilon > 0$ tel que $d_1(\gamma, \Gamma \setminus \{\gamma\}) > \varepsilon$.
Avec $d_1(\gamma_1, \gamma_2) = max(\|g_1 - g_2\|, \|t_1 - t_2\|_{\mathbb{R}^d})$ et $d_1(a, B) = \underset{b \in B}{inf}(d_1(a, b))$.
On sait que $V_n \in \Gamma$ et que $V_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (I_d, 0) \in \Gamma$.
Donc $d_1((I_d, 0), V_n) \leq \|I_d - \Psi(V_n)\| + \|0 - t(V_n)\|_{\mathbb{R}^d} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Cela contredit le fait que Γ est discret, donc $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Donc le sous-groupe engendré par le voisinage de l'identité de $\Psi(\Gamma)$ dans $O(d)$ est abélien. □

Lemme 3.7. *Un groupe cristallographique de $Isom(\mathbb{R}^d)$ (avec $d \geq 1$) contient au moins une translation pure non triviale (i.e. différente de l'identité).*

Démonstration. Soit Γ un groupe cristallographique.
Par l'absurde, supposons que Γ ne contient aucune translation pure.
Soit $\Psi : \Gamma \to O(d)$ l'homomorphisme de la proposition 3.6.
Notons $\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ le sous groupe engendré par le voisinage de l'identité de $\Psi(\Gamma)$ dans $O(d)$.
$\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ est abélien d'après le proposition 3.6 car Γ est discret.
Montrons que $\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ est d'indice fini dans $\Psi(\Gamma)$ (i.e. $|\Psi(\Gamma)/\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}| < +\infty$)
Alors $\Psi(\Gamma) = \overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ} \cup (\underset{i \in I}{\sqcup} g_i \overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ})$, on complète cette union disjointe d'ouvert pour en faire un recouvrement d'ouvert de $O(d)$. Comme $O(d)$ est compact (fermé de $M_n(\mathbb{R})$ car c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue ($\tau : M \longmapsto M^T M$ et $O(d) = \tau^{-1}(I_d)$) et borné car avec la norme d'opérateur $\forall A \in O(d), \|A\| = \underset{x \neq 0}{sup}(\frac{\|Ax\|_d}{\|x\|_d}) = \underset{x \neq 0}{sup}(\frac{\sqrt{<Ax;Ax>}}{\sqrt{<x;x>}}) = 1$ car $A \in O(d)$), on peut en extraire un recouvrement fini d'ouvert, donc $\Psi(\Gamma) = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} (g_i \overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ})$.
Donc cela implique que $\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ est d'indice fini dans $\Psi(\Gamma)$.
Puisque $\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ est abélien, Γ admet un sous-groupe Γ_1 abélien, de plus comme $\overline{\Psi(\Gamma)}^{\circ}$ est d'indice fini dans $\Psi(\Gamma)$, alors Γ_1 est d'indice fini dans Γ. Donc par le lemme 2.16, Γ_1 est un groupe cristallographique abélien.
Par le lemme 3.5, il n'y a que des translations pures, ce qui est absurde.
Donc Γ contient au moins une translation pure non triviale. □

3.2 Théorème de Bieberbach

Théorème 3.8. *Soit Γ un groupe cristallographique, alors Γ satisfait ces conditions :*
1) $\Gamma \cap 1 \ltimes \mathbb{R}^d$ engendre $\mathbb{R}^d$.
2) $\Gamma \cap 1 \ltimes \mathbb{R}^d$ est d'indice fini dans Γ.

Démonstration. Prenons $W = Vect\{v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\gamma = (I_d, v) \in \Gamma\} = Vect\{v \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)\}$
Soit $\gamma = (g(\gamma), t(\gamma)) \in \Gamma$ et $x \in W$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ avec $v_i \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$
alors par le lemme 2.10, $g(\gamma)(v_i) \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$, donc $g(\gamma)(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\gamma)(v_i) \in W$.
Donc $\forall \gamma \in \Gamma$, $g(\gamma)$ laisse invariant W.
Posons $G = \{g(\gamma)|_W, \gamma \in \Gamma\}$,
Soit $g(\gamma)|_W \in G \Rightarrow \exists \gamma = (g(\gamma), t(\gamma)) \in \Gamma \Rightarrow g(\gamma)|_W{}^{-1} \in G$ car $g(\gamma)|_W{}^{-1} = g(\gamma^{-1})|_W$
Soit $g(\gamma)|_W, g(\gamma')|_W, g(\gamma'')|_W \in G \Rightarrow (g(\gamma)|_W g(\gamma')|_W) g(\gamma'')|_W = g(\gamma\gamma')|_W g(\gamma'')|_W = g(\gamma\gamma'\gamma'')|_W = g(\gamma)|_W (g(\gamma')|_W g(\gamma'')|_W)$
et $I \in G$ car $I = g(e)|_W$.
Donc G est un groupe.
Par l'absurde montrons que c'est un groupe fini.

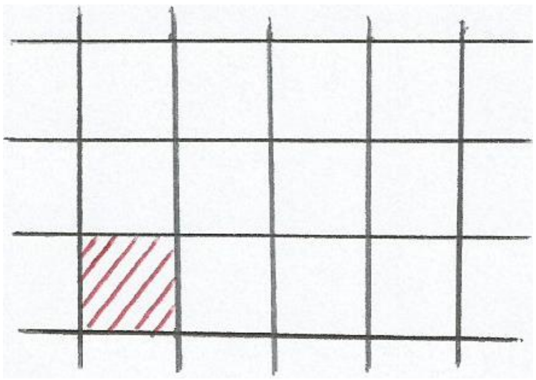
Supposons que G est infini.
On fait un recouvrement de $O(d)$ par des ouverts suffisamment petit $U(g(\gamma)) = \{g \in O(d) \text{ tel que } \|g - g(\gamma)\| < \eta\}$ et on la complète pour que ça recouvre bien $O(d)$.
Comme $O(d)$ est compact, on peut en extraire un recouvrement fini, donc $\exists \gamma, \gamma' \in \Gamma$ tel que $\|g - g'\| < \eta \Rightarrow \eta > \|g' - g\| = \|g^{-1}\|\|g' - g\| \geq \|g^{-1}(g' - g)\| \geq \|g^{-1}g' - I_d\|$
Donc $\|g^{-1}g' - I_d\| < \eta$, alors le groupe G contient des éléments arbitrairement proche de l'identité, ce qui contredit le fait que Γ soit discret, ce qui est absurde. Donc $G = \{g(\gamma)|_W, \gamma \in \Gamma\}$ est un groupe fini.
Notons $C \subset \mathbb{R}^d$ un compact tel que $\Gamma(C) = \mathbb{R}^d$, C existe bien car Γ est un groupe cristallographique.
Posons $W' = \mathbb{R}^d/W$,
Donc il existe un application continue $\pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d/W$.
Soit $\overline{x} \in W'$ (i.e. $\exists x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\overline{x} = x + W$), $\exists \gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) \in C$ car Γ est cristallographique.
$\overline{C} = \pi(C) \subset W'$ est un compact car π est continue.
On définit, $\begin{array}{llll} \overline{\gamma}: & W' & \to & W' \\ & \overline{x} & \mapsto & \pi(\gamma(x)) \end{array}$
Montrons que $\overline{\gamma}$ est bien défini, soient $x, x' \in \overline{x} \Rightarrow x = x' + \tilde{x}$ avec $\tilde{x} \in W$
$\pi(\gamma(x)) = \pi(g(\gamma)x + t(\gamma)) = \pi(g(\gamma)(x' + \tilde{x}) + t(\gamma)) = \pi(g(\gamma)x' + t(\gamma)) = \pi(\gamma(x'))$ car $g(\gamma)\,\tilde{x} \in W$ par le lemme 2.10.
Donc $\overline{\gamma}$ est bien définie.
Montrons que $\overline{\Gamma} < Isom(W')$
Soit $\overline{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, soit $\overline{x} \in \mathbb{R}^d$, $\overline{\gamma^{-1}}\overline{\gamma}(\overline{x}) = \overline{\gamma^{-1}}(\pi(\gamma(x))) = \overline{\gamma^{-1}}(\overline{\gamma(x)}) = \pi(\gamma^{-1}\gamma(x)) = \pi(e(x))$
Donc $\overline{\gamma^{-1}}\overline{\gamma} = \overline{e}$.
Soit $\overline{\gamma}, \overline{\gamma'} \in \overline{\Gamma}$, $\overline{\gamma}\overline{\gamma'}(\overline{x}) = \overline{\gamma}(\pi(\gamma'(x))) = \overline{\gamma}(\overline{\gamma'(x)}) = \pi(\gamma\gamma'(x))$, comme $\gamma\gamma' \in \Gamma$ alors $\overline{\gamma}\overline{\gamma'} \in \overline{\Gamma}$.
Donc $\overline{\Gamma} < Isom(W')$.
$\overline{\Gamma}$ est discret car G est un groupe fini.
En effet, si $\gamma \in \Gamma$, alors $\gamma = \begin{pmatrix} g_{|W} & 0 & w \\ 0 & g & w' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\gamma^n = \begin{pmatrix} I & 0 & w_n \\ 0 & g^n & w'_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec w_n borné.
On a $\overline{\gamma} = \begin{pmatrix} g & w' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme $g_{|W} \in G$ et G est fini, alors $\overline{\Gamma}$ est discret.
Soit $\overline{x} \in W, \overline{x} = x + W$ avec $x \in \mathbb{R}^d$, $\exists \gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) \in C \Rightarrow \pi(\gamma(x)) \in \pi(C) = \overline{C} \Rightarrow \exists \overline{\gamma} \in \overline{\Gamma}$ tel que $\overline{\gamma}(\overline{x}) \in \overline{C}$
Donc $\overline{\Gamma}$ est un groupe cristallographique.
Soit $\gamma = (I_d, t)$ une translation pure, alors $\overline{\gamma}(\overline{x}) = \pi(\gamma(x)) = \pi(t + x) = \overline{x}$ car $t \in W$.
donc si $\gamma = (I_d, t)$ (i.e. une translation pure), alors $\overline{\gamma} = \overline{e}$.
Donc $\overline{\Gamma}$ est un groupe cristallographique sans translation pure, donc par le lemme 3.7, W' est donc de dimension zéro, donc $W = \mathbb{R}^d$, donc $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ engendre $\mathbb{R}^d$
Montrons que $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ est un groupe cristallographique.
Soit $\gamma, \gamma' \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d) \Rightarrow \gamma\gamma'^{-1} = (I_d, t)(I_d, -t') = (I_d, t - t') \in \Gamma \Rightarrow \gamma\gamma'^{-1} \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$
Alors $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d) < \Gamma$, donc $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ est discret car sinon Γ ne l'est pas.
Comme $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ engendre $\mathbb{R}^d$, on peut prendre d éléments de $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ qui forme une base de $\mathbb{R}^d$.
Prenons $\gamma_1, \cdots \gamma_d \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ (avec $\gamma_i = (I_d, t_i)$) tel que $Vect(t_1, \cdots, t_d) = \mathbb{R}^d$.
Prenons $C = \overline{B}(0, \sum_{i=1}^{d}(\|t_i\|))$, C est fermé par définition et borné car $\sum_{i=1}^{d}(\|t_i\|) < +\infty$, donc C est compact.
Soit $x \in \mathbb{R}^d, x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i t_i = \sum_{i=1}^{d} \lfloor \lambda_i \rfloor t_i + \sum_{i=1}^{d} \{\lambda_i\} t_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^d$ et $\lfloor . \rfloor$ la partie entière et $\{.\}$ la partie fractionnaire.
De plus nous pouvons remarquer que si $\gamma = (I_d, t) \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$, alors $\gamma(x) = t + x$ et

$\gamma^{-\lfloor\lambda_i\rfloor} = (I_d, -\lfloor\lambda_i\rfloor t) \in \Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$.
Alors $\prod_{i=1}^{d}(\gamma_i^{-\lfloor\lambda_i\rfloor})(x) = \sum_{i=1}^{d}(-\lfloor\lambda_i\rfloor t_i) + x = \sum_{i=1}^{d}(-\lfloor\lambda_i\rfloor t_i) + \sum_{i=1}^{d}\lfloor\lambda_i\rfloor t_i + \sum_{i=1}^{d}\{\lambda_i\}t_i = \sum_{i=1}^{d}\{\lambda_i\}t_i$
$\Rightarrow \| \prod_{i=1}^{d}(\gamma_i^{-\lfloor\lambda_i\rfloor})(x)\| \leq \sum_{i=1}^{d}(\|t_i\|)$, donc appartient à C.
Alors $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ est cocompact, donc $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ est un groupe cristallographique et par le lemme 2.16 l'indice de $\Gamma \cap (1 \ltimes \mathbb{R}^d)$ est fini dans Γ. □

4 Quelques exemples

4.1 Des translations pures ($I_2 \ltimes \mathbb{Z}^2$)

Nous pouvons étudier comme premier exemple simple, un groupe cristallographique constitué seulement de translation pure, nous avons choisi $\Gamma_1 = I_2 \ltimes \mathbb{Z}^2$. Ce groupe cristallographique est engendré par deux translations pures $((I_2,(0,1))$ et $(I_2,(1,0)))$ et le domaine fondamental de ce groupe $C \subset \mathbb{R}^2$ est ici égal à $[0,1] \times [0,1]$ (partie hachurée sur la figure ci-dessous).



La figure de $I_d \ltimes \mathbb{Z}^2$.

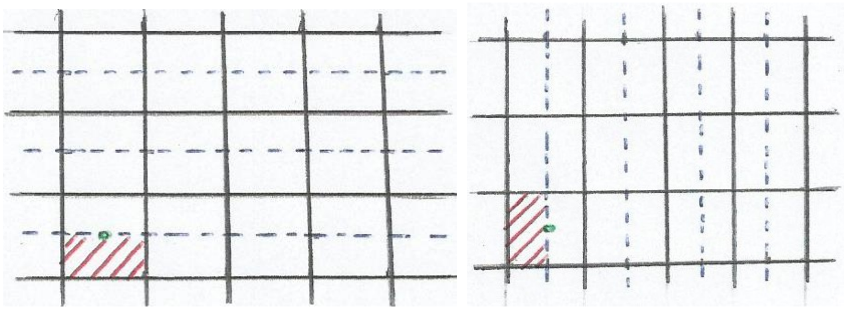
Nous pouvons montrer que Γ_1 est un groupe cristallographique.
Montrons tout d'abord qu'il est discret. Nous avons choisi ici d'utiliser la norme d'opérateur maximum $\|.\|_\infty$ associé à la norme maximum,on définit $\|.\|_\infty$ par,

$$\begin{array}{llll} \|.\|: & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & A = (a_{ij})_{1\leq i\leq j\leq 3} & \mapsto & \underset{1\leq i\leq 3}{max}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|) \end{array}$$

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_1$ et $\gamma_1 \neq \gamma_2$
alors, $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & z_1' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & z_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z_1, z_1', z_2, z_2' \in \mathbb{Z}$
$\gamma_1 - \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 - z_2 \\ 0 & 0 & z_1' - z_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z_1 - z_2 \neq 0$ ou $z_1' - z_2' \neq 0$ car $\gamma_1 \neq \gamma_2$.
Alors $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty = |z_1 - z_2| + |z_1' - z_2'| > 0$ et appartient à $\mathbb{N}$,
donc $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty = |z_1 - z_2| + |z_1' - z_2'| > 1/2$.
Donc $\forall \gamma \in \Gamma_1$, $\Gamma_1 \cap B(\gamma, 1/2) = \{\gamma\}$, d'où Γ_1 est discret.
Montrons maintenant que Γ_1 est cocompact.
Soit $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $x = (a,b) = (\lfloor a\rfloor, \lfloor b\rfloor) + (\{a\},\{b\})$
avec $\lfloor . \rfloor$ la partie entière (i.e. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq a < n+1$, alors $\lfloor a\rfloor = n$)
et $\{.\}$ la partie fractionnaire (i.e. $\{a\} = a - \lfloor a\rfloor$)
On prend $\gamma = (I_2, (-\lfloor a\rfloor, -\lfloor b\rfloor)) \in \Gamma_1$, alors $\gamma(x) = (\{a\},\{b\}) \in [0,1] \times [0,1]$.
Donc Γ_1 est cocompact.
Donc pour conclure Γ_1 est un groupe cristallographique.

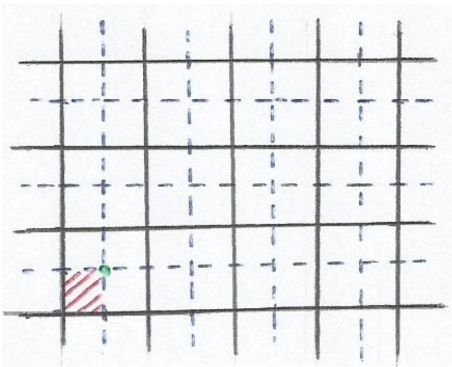
4.2 Des rotations et des translations avec le produit semi-direct

Ici par rapport à l'exemple précédent, on rajoute les rotations d'angle π et $-\pi$. Donc le groupe cristallographique Γ_2 est égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$, car le groupe constitué de la rotation π et $-\pi$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme nous avons des rotations en plus, le domaine fondamental C est plus petit, sur la première figure nous avons choisi de prendre $C = [0,1] \times [0,1/2]$ (on a bien $\Gamma_2(C) = \mathbb{R}^2$)et sur la deuxième figure nous voyons que si on prend $C' = [0,1/2] \times [0,1]$ (on a encore $\Gamma_2(C') = \mathbb{R}^2$). Les rotations d'angle π et $-\pi$ peuvent se voir comme des matrices de rotation dans $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :
$R_\pi = R_{-\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
donc les éléments de Γ_2 peuvent s'écrire : $\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $R \in \{R_\pi, R_{-\pi}\}$ et $t \in \mathbb{Z}^2$.



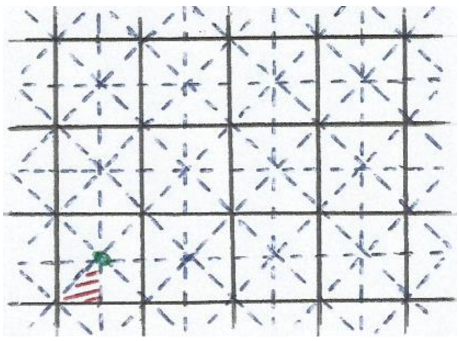
La figure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$.

Nous pouvons aussi étudier $\Gamma_3 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$ qui est comme Γ_2 avec en plus les rotations $\pi/2$ et $-\pi/2$. Ici le domaine fondamental C est égal à $[0,1/2] \times [0,1/2]$, nous pouvons le voir sur la figure ci-dessous.



La figure de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$.

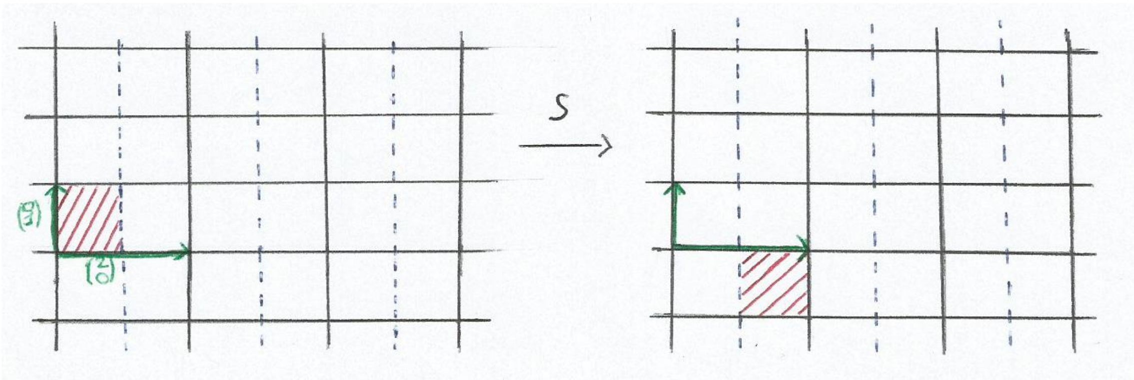
Nous pouvons aussi étudier $\Gamma_4 = \mathbb{D}_8 \ltimes \mathbb{Z}^2$ qui est comme Γ_3 avec en plus les rotations $\pi/4, 3\pi/4, -\pi/4$ et $-3\pi/4$. Dans cet exemple nous pouvons voir sur la figure que le domaine fondamental C est encore plus petit (hachuré en rouge sur la figure ci-dessous).



La figure de $\mathbb{D}_8 \ltimes \mathbb{Z}^2$.

4.3 Un exemple qui ne peut pas s'écrire sous forme de produit semi-direct

Pour cet exemple nous avons choisi $\Gamma =< s, t >$ avec s une symétrie glissée $\left(s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$ sous forme de matrice) et t une translation pure $\left(t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
Ici le domaine fondamental $C = [0,1] \times [0,1]$ (partie hachurée en rouge sur la figure ci-dessous). Nous pouvons aussi voir sur la figure comment se déplace le carré rouge lorsqu'on lui applique s.



La figure de Γ engendré par s et t.

Montrons maintenant que Γ ne peut pas s'écrire sous forme de produit semi-direct.
Montrons d'abord que Γ n'a pas d'élément d'ordre 2.

Soit $\gamma \in \Gamma \Rightarrow \gamma = \prod_{i=1}^{n} s^{\alpha_i} t^{\beta_i} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\alpha_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\beta_i}$ avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$

•Montrons que $s^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, pour $m = 0$, $s^0 = I_3$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$
On supposons que c'est vrai pour le rang m, montrons que c'est vrai pour le rang $m+1$.
$s^{m+1} = s^m s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ 0 & (-1)^{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Si $m \leq 0$, on peut faire le même raisonnement en posant $m' = -m$,
donc $s^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

• Nous remarquons que $t = (I_2, (0,1))$, donc $\forall m \in \mathbb{Z}$, on a $t^m = (I_2, (0, m)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

•Montrons maintenant que $\prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_i \\ 0 & (-1)^{\alpha_i} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\ 0 & (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 1$, $\prod_{i=1}^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_i \\ 0 & (-1)^{\alpha_i} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & (-1)^{\alpha_1} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On suppose que c'est vrai pour un rang n, on montre que c'est vrai pour le rang $n+1$.

$$\prod_{i=1}^{n+1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha_i\\ 0 & (-1)^{\alpha_i} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha_i\\ 0 & (-1)^{\alpha_i} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha_{n+1}\\ 0 & (-1)^{\alpha_{n+1}} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\\ 0 & (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha_{n+1}\\ 0 & (-1)^{\alpha_{n+1}} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n+1}\alpha_i\\ 0 & (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\alpha_i} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc on obtient :

$$\gamma = \prod_{i=1}^{n} s^{\alpha_i}t^{\beta_i} = \prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha_i\\ 0 & (-1)^{\alpha_i} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\\ 0 & (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Alors $\gamma = (g, t_1)$, avec $g = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}\end{pmatrix}$ et $t_1 = \begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\\ *\end{pmatrix}$

Soit $g = I_2$, alors l'ordre de γ est différent de 2.
Soit $g = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$ est impair $(\neq 0) \Rightarrow t_1 \neq (0,0)$.
Donc pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'ordre de γ est différent de 2.
On a vu que $\forall\gamma \in \Gamma$, avec $\gamma = (g, t_1)$
$\Rightarrow g = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ou $g = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ donc si Γ est égal a un produit semi-direct de rotation et translation pure, alors $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ltimes (2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.
Car $\Gamma =< s, s^2, t >$ avec $s^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ une translation pure, donc toutes les translations pures sont engendrées par $< s^2, t >= 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Si $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ltimes (2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ alors nous avons la suite exacte scindée suivante :

$$1 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \underset{p}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

avec p, δ des homomorphismes et $p \circ \delta = Id_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$, alors l'ordre de $\overline{1}$ est égal à 2 et on sait que l'ordre de $\delta(\overline{1})$ divise 2 et l'ordre de $p(\delta(\overline{1})) = \overline{1}$ divise l'ordre de $\delta(\overline{1})$. Donc l'ordre de $\delta(\overline{1})$ est égal à 2.
Ce qui est absurde car Γ n'a pas d'élément d'ordre 2.
Donc Γ ne peut pas s'écrire sous forme de produit semi-direct.

Bibliographie

Références

[1] Louis Auslander. *An account of the theory of crystallographic groups.* Proc. Amer. Math. Soc., 16 :1230-1236, 1965.

[2] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP sciences, 2006.

[3] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses,1996.