

**Deux thèmes autour des arbres.
Paradoxe de Banach-Tarski et processus de Galton-Watson**

Ce projet aborde deux thèmes distincts dont le trait d'union est la notion d'arbre. Le premier est plus fondamental, le second plus appliqué.

- (1) Le paradoxe de Banach-Tarski explore la possibilité, via l'axiome du choix, de partitionner une sphère (dans \mathbb{R}^3) en un nombre fini de parties (pour nous, ce sera 6, mais 4 sont possibles) et de reconstituer "isométriquement" deux sphères (de même rayon que la sphère initiale) à partir de cette partition. La partition décrite est bien-sûr non mesurable. Outils : action du groupe libre \mathbb{F}_2 sur la sphère, (mesure de Lebesgue sur la sphère), rotations, (réflexion sur l'axiome du choix).

Références. P. Dehornoy. La Théorie des Ensembles. Ed. Calvage et Mounet. (les pages 152 à 155 essentiellement). J. Fresnel. Groupes. Ed. Hermann (p 71 et svtes).

- (2) Le processus de Galton-Watson est un arbre aléatoire. C'est un modèle de référence en théorie des Probabilités. On explorera essentiellement quelques questions d'extinction de la population. Outils : chaînes de Markov, récurrences Markoviennes, fonctions génératrices.

Références. D. Chafaï et F. Malrieu. Recueil de Modèles aléatoires. Ed. Springer. (p. 39 et svtes). P. Brémaud. Markov Chains, Gibbs Fields, Monte-Carlo Simulation and Queues. Ed. Springer. (p. 58 à 62).