

Philippe Berthet : Probabilités

1) Convergence presque sûre des séries de variables aléatoires

(les cas non indépendants, décorrelés, pas de même loi, loi du logarithme itéré, grandes déviations)

2) Entropie, contraste et distances entre mesures de probabilités

(liens entre Kullback-Leibler, Shannon, Hellinger, Chi-deux, Csizar, comportement des mesures discrètes aléatoires)

---

Julien Royer :

Dans ce projet on s'intéressera au pseudo-spectre des matrices. On fera en particulier le lien avec le spectre d'une petite perturbation d'une matrice donnée (étude théorique et illustrations à l'aide d'exemples numériques). On pourra ensuite s'intéresser au pseudo-spectre d'opérateurs en dimension infinie.

Référence principale : Trefethen, Embree: Spectra and Pseudospectra, the behavior of nonnormal matrices and operators.

---

Xavier Gendre :

Le calcul de l'inverse de la racine carrée d'un nombre réel strictement positif est une opération récurrente dans de nombreuses applications informatiques. En particulier, dans les jeux vidéo, elle est très utilisée pour normaliser des vecteurs et ce calcul se doit d'être fait le plus rapidement possible. Un algorithme original issu du code du moteur graphique du jeu \*Quake 3\* (début des années 2000) propose de faire cela efficacement à l'aide d'une "constante magique" 0x5f3759df et d'une utilisation astucieuse de la représentation des nombres flottants pour l'architecture des PC 32 bits.

À partir des travaux de Lomont [1] et Moroz et al. [2], nous proposons d'étudier cet algorithme basé sur une méthode de Newton-Raphson bien initialisée. L'étudiant étudiera la façon dont un ordinateur représente les nombres flottants, la méthode d'approximation utilisée et l'origine de cette fameuse constante 0x5f3759df. Des prolongements sont envisageables pour étendre cette approche à d'autres fonctions ou à des architectures 64 bits plus récentes.

Une connaissance du langage C peut aider mais n'est pas nécessaire.

[1] Lomont, Fast Inverse Square Root, 2003

[2] Moroz, Walczyk, Hrynchyshyn, Holimath et Cieśliński, Fast calculation of inverse square root with the use of magic constant – analytical approach, 2016

-----  
Projet : fonctions génératrices pour marches aléatoires,  
résultats asymptotiques grâce à l'analyse des séries  
entières.

Encadrant : Thierry Delmotte  
1R1 - 223 05 61 55 61 42  
[thierry.delmotte@math.univ-tou](mailto:thierry.delmotte@math.univ-tou)

On utilisera l'article :  
'Generating functions techniques for random walks on graphs'  
de Wolfgang Woess, accessible à  
<https://www.math.tugraz.at/~wo>  
en donnant 'Woess' comme identifiant et 'Vienna' comme  
mot de passe.

Il s'agit de probabilités discrètes, de l'étude asymptotique  
en temps long de probabilités de marches aléatoires diverses.

Il y a certes des propriétés de Markov et des probabilités  
conditionnelles non abordées en L3ESR dans le début du texte  
de l'article mais cela justifie en fait des résultats très  
naturels. On construit des relations entre les fonctions  
génératrices du problème, qui sont des séries entières, puis  
l'étude asymptotique devient une étude du comportement de  
ces séries entières, donc de l'analyse complexe.

Le projet pourra prendre des chemins variés au choix des  
étudiants, calculs plus explicites sur des exemples précis,  
simulation sur ordinateur, etc.

-----  
Titre : Comment simuler une pièce équilibrée avec une pièce biaisée ?

Encadrant : Aurélien Garivier (prof., Institut de Mathématiques de  
Toulouse)

Exposé rapide du sujet :

Supposons que vous disposiez d'une pièce biaisée, dont la probabilité de  
renvoyer "pile" ou "face" est inconnue. Comment peut-on l'utiliser pour  
simuler malgré tout une suite de variables de Bernoulli indépendantes de  
paramètre  $1/2$  (des "bits") ?

John Von Neumann avait une suggestion très simple : si deux lancers  
successifs donnent des résultats différents, alors le résultat du  
premier lancer fournit déjà un tel bit; pour en avoir d'autres, il n'y a  
qu'à recommencer.

Mais cette procédure est-elle efficace ? Pourrait-on obtenir plus de  
bits avec moins de lancers de la pièce biaisée ? Dans l'article qui est  
proposé pour dans ce stage, Yuval Peres propose d'itérer la procédure de  
Von Neumann, et il montre l'optimalité de son approche.

L'étude de cet article sera l'occasion de découvrir, par une porte  
dérobée symétrique au problème du codage, la théorie de l'information de  
Shannon. On cherchera également, dans un deuxième temps, à ré-écrire et  
à affiner un peu les résultats de l'article pour les rendre pleinement  
satisfaisants.

Référence de l'article :

Iterating Von Neumann's Procedure for Extracting Random Bits

Yuval Peres

Ann. Statist. Volume 20, Number 1 (1992), 590-597.

Abstract

Given a sequence of independent, identically distributed random biased bits, von Neumann's simple procedure extracts independent unbiased bits. In this note we show that the number of unbiased bits produced by iterating this procedure is arbitrarily close to the entropy bound.