

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER



---

## Projet recherche 3<sup>me</sup> année

---

*Réalisateurs :*  
Martin CONAND  
Clément TRIGALET

*Encadrant :*  
PAULO  
CARILLO-ROUSSE



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Première partie : Notions de base</b>	<b>3</b>
1.1	Variété topologique . . . . .	3
1.2	Exemples de surfaces compactes . . . . .	3
1.3	Du polygone à la surface compacte . . . . .	3
1.4	Somme connexe . . . . .	9
1.5	Orientabilité . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Seconde partie : Développement de la théorie</b>	<b>12</b>
2.1	Triangulation des surfaces compactes . . . . .	12
2.2	Théorème de classification des surfaces compactes . . . . .	13
2.3	Caractéristique d'Euler . . . . .	22

# 1 Première partie : Notions de base

## 1.1 Variété topologique

**Definition 1** : Soit  $n$  un entier naturel. On appelle variété topologique de dimension  $n$  tout espace topologique séparé dans lequel tout point possède un voisinage ouvert et homéomorphe à une boule ouverte de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque** : Il sera équivalent de demander que chaque point  $p$  possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert quelconque dans  $\mathbb{R}^n$ . En effet pour tout  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $f(p)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(f(p), r) \subset U$ ,  $f^{-1}(B(f(p), r))$  est donc homéomorphe à  $B(f(p), r)$  ouverte dans  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Exemples de surfaces compactes

Dans la suite, on appellera surface toute variété topologique de dimension 2 connexe.

Sphère

Thore

Plan projectif réel

## 1.3 Du polygone à la surface compacte

**Proposition 1** : L'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone régulier à  $2k$  côtés est une surface compacte.

**Preuve** : Soient  $X$  un polygone régulier à  $2k$  côtés,  $Y$  l'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés du polygone et  $\pi$  la surjection canonique.

On veut montrer que tout point  $p$  de  $Y$  a un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  et que  $Y$  est un espace séparé.

L'espace quotient  $Y$  est muni de la topologie quotient induite par  $X$

$U \subset Y$  est un ouvert de  $Y \Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$

Soit  $p \in Y$ , trois cas se présentent :

Cas n°1 :  $p$  est l'image d'un point à l'intérieure

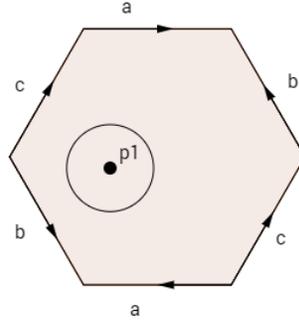


FIGURE 1 – Cas n°1

Alors  $p$  possède un unique antécédent  $p_1$  dans  $X$

Considérons un disque ouvert  $D(p_1, r) \subset \overset{\circ}{X}$

Soit  $D(p, r) = \pi(D(p_1, r))$ , alors  $D(p, r)$  est un ouvert de  $Y$  contenant  $p$  car  $\pi^{-1}(D(p, r)) = D(p_1, r)$  étant donné que les points de l'intérieur de  $X$  ne sont identifiés avec aucun autre point de  $X$

Soit  $\tilde{\pi} = \pi|_{D(p_1, r)}$  continue car  $D(p, r)$  est un ouvert de  $Y$  et  $\pi$  la surjection canonique.

De plus, si  $U$  est un ouvert de  $D(p_1, r)$ , comme  $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$  on a :  $\pi(U) = \pi(\tilde{U})$  un ouvert de  $Y$ ,  $\tilde{\pi}^{-1}$  est continue.

$\tilde{\pi}$  est bien un homéomorphisme de  $D(p_1, r)$  sur  $D(p, r)$ , et donc  $p$  possède un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$ .

Cas n°2 :  $p$  est l'image d'un point d'une arête de  $X$  distincte des sommets

Alors  $p$  possède deux antécédents  $p_1$  et  $p_2$  chacun dans une arête  $A_1$  et  $A_2$  de  $X$ .

On considère un disque ouvert  $D(p_1, r) \subset \mathbb{R}^2$  de sorte que sa fermeture coupe  $A_1$  en deux points  $a_1$  et  $a_2$  distinct des sommets.

Alors  $\overline{D(p_2, r)} \cap A_2 = \{a_3, a_4\}$

De plus  $\pi(]a_1, a_2]) = \pi(]a_3, a_4])$ , quitte à renuméroter, on identifie  $a_1$  et  $a_4$  ainsi que  $a_2$  et  $a_3$  dans  $Y$ .

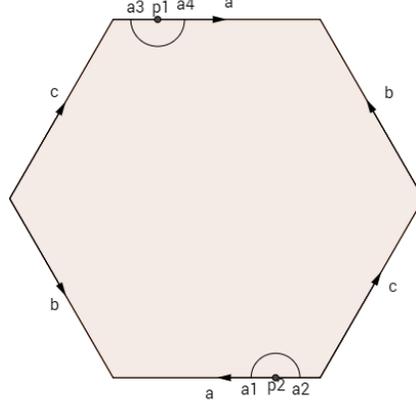


FIGURE 2 – Cas n°2

Posons maintenant  $V = (D(p_1, r) \cup D(p_2, r)) \cap X$  un ouvert de  $X$ .

$]a_1, a_2[ \cup ]a_3, a_4[ = \pi^{-1}(\pi(]a_2, a_1[))$  car les points des arêtes de  $X$  ont exactement 2 antécédents, les autres point de  $\pi(V)$  en ont un seul.

On a donc  $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$

On veut montrer que  $\pi(V)$ , ouvert de  $Y$ , est homéomorphe à  $D(0, r) \subset \mathbb{R}^2$

Posons  $U_1 = D(p_1, r) \cap X$  et  $U_2 = D(p_2, r) \cap X$

ainsi que  $E_1 = D(0, r) \cap \{x \geq 0\}$  et  $E_2 = D(0, r) \cap \{x \leq 0\}$

Alors, par rotation ou translation,  $U_1$  est homéomorphe à  $E_1$  (par une application  $f_1$ ) et  $U_2$  est homéomorphe à  $E_2$  ( par  $f_2$ ).

Les segments  $]a_1, a_2[$  et  $]a_3, a_4[$  sont envoyées sur  $\{0\} \times ]-r, r[ \subset D(0, r)$ .

Selon le sens du recollement, et donc en composant  $f_2$  éventuellement avec une symétris, on peut demander la propriété suivante :

si  $m \in ]a_1; a_2[$  et  $n \in ]a_3; a_4[$  tels que  $\pi(m) = \pi(n)$  alors  $f_1(m) = f_2(n)$ .

Soit  $\Phi$  l'application suivante : 
$$\Phi : V \rightarrow D(0, r)$$
 
$$x \mapsto f_i(x) \text{ pour } x \in U_i, i = 1, 2$$
 est

surjective et continue.

En effet, si  $W$  est un ouvert de  $D(0, r)$  alors  $\Phi^{-1}(W)$  est un ouvert de  $V$  car  $f_1$  et  $f_2$  sont des homéomorphismes,  $E_1$  et  $E_2$  des ouverts de  $D(0, r)$  et  $\Phi^{-1}(U) = f_1^{-1}(U \cap E_1) \cup f_2^{-1}(U \cap E_2)$ .

De plus deux points distincts ont même image pas  $\Phi$  si et seulement si ils

sont identifiés dans l'espace quotient  $Y$

On introduit donc l'application 
$$\tilde{\Phi} : \pi(V) \rightarrow D(0, r)$$

$$\tilde{x} \mapsto \Phi(\tilde{x}) = \Phi(x)$$
 ou  $x$  est un représentant de  $\tilde{x}$ .

$\tilde{\Phi}$  est une bijection de  $\pi(V)$  sur  $D(0, r)$  et  $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \pi$  sur  $V$

Soit  $U$  un ouvert de  $D(0, r)$ , alors  $\Phi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $V$ . Par conséquent  $\pi^{-1}(\tilde{\Phi}^{-1}(U)) = (\tilde{\Phi} \circ \pi)^{-1}(U) = \Phi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $V$ ,  $\tilde{\Phi}^{-1}(U)$  est donc un ouvert de  $\pi(V)$ , et l'application  $\tilde{\Phi}$  est donc continue.

Pour montrer la continuité de la réciproque  $\tilde{\Phi}^{-1}$ , il faut montrer que la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^2$  sur  $D(0, r)$  coïncide avec la topologie quotient que l'on peut définir sur  $D(0, r)$  grâce à l'application continue  $\Phi$ .

Soit  $F$  un fermé de  $V$  alors  $\Phi(F) = f_1(F \cap U_1) \cup f_2(F \cap U_2)$ ,  $f_1$  et  $f_2$  étant des homéomorphismes, on déduit que  $f_1(F \cap U_1)$  (resp.  $f_2(F \cap U_2)$ ) est un fermé de  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) pour les topologies induites par celles de  $D(0, r)$  sur  $E_1$  et  $E_2$ .

Or  $E_1$  et  $E_2$  sont des fermés de  $D(0, r)$  donc  $f_1(F \cap U_1)$  et  $f_2(F \cap U_2)$  sont des fermés de  $D(0, r)$ .  $\Phi$  est donc un fermé de  $D(0, r)$ .

On en déduit que  $F_0 \subset D(0, r)$  fermé  $\Leftrightarrow \Phi^{-1}(F_0)$  fermé; la topologie de  $D(0, r)$  induite par celle de  $\mathbb{R}^2$  et la topologie définie par  $\Phi$  coïncident donc bien.

Par conséquent, si  $U$  est un ouvert de  $\pi(V)$  alors  $\pi^{-1}(U) = \Phi^{-1}(\tilde{\Phi}(U))$  ouvert de  $V$ , et comme  $D(0, r)$  est muni de la topologie quotient déterminée par  $\Phi$ , on en déduit que  $\tilde{\Phi}(U)$  est un ouvert de  $D(0, r)$ .  $\tilde{\Phi}^{-1}$  est continue.

$\tilde{\Phi}$  est bijective, continue et à réciproque continue : c'est donc bien un homéomorphisme.

Le voisinage ouvert  $\pi(V)$  de  $p$  est donc homéomorphe au disque ouvert  $D(0, r)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Cas n°3 :  $p$  est l'image d'un sommet de  $X$

Soit  $p_1$  un antécédent de  $p$  par  $\pi$ . On considère un disque ouvert centré en  $p_1$  et de rayon  $r$  suffisamment petit pour que sa fermeture intersecte les arêtes issues de  $p_2$  en des points  $a_1$  et  $a_2$  tels que la distance  $p_1 a_1$  soit strictement inférieure à la moitié de la longueur d'un côté du polygone régulier.

Alors le point  $a_2$  sera identifié avec un point  $a_3$ , qui se situe lui aussi à la distance  $r$  d'un sommet du polygone :

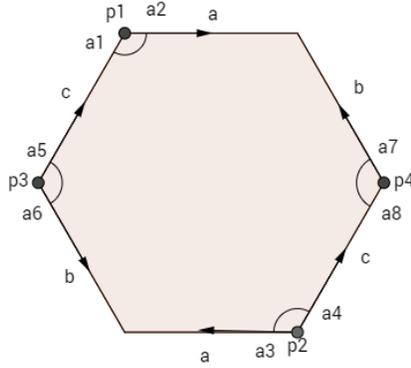


FIGURE 3 – Cas n°3

-Si ce point  $a_3$  est confondu avec  $a_1$ , le point  $p$  a un unique antécédent et les segments  $]a_1; p_1]$  et  $[p_1; a_2[$  sont identifiés.

-Sinon le point  $a_3$  est à la distance  $r$  d'un autre antécédent de  $p$ , noté  $p_2$  et le disque fermé centré en  $p_2$  de rayon  $r$  intersecte l'autre arête issue de  $p_2$  en un point  $a_4$ . On procède de même avec  $a_4$ , il sera identifié avec un point  $a_5$  situé sur une arête issue d'un antécédent de  $p$ , et ainsi de suite jusqu'à revenir à  $a$  (voire figure 3).

On obtient ainsi l'ensemble  $\{p_1, \dots, p_n\}$  des antécédents de  $p$  d'une part, et un ensemble de point  $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$  d'autre part, tels que  $\forall i \in \{2, \dots, 2n-1\}$ , les points  $a_i$  et  $a_{i+2}$  seront identifiés et  $a_{2n}$  sera identifié avec  $a_1$ .

On pose  $w = \bigcup_{i=1}^{10} D(p_i, r) \cap X$  alors  $W \subset \pi^{-1}(W)$ .

Soit  $x \in \pi(W)$  :

-Si  $x$  est l'image d'un point de  $\overset{\circ}{X}$ , il n'a qu'un antécédent et  $\pi^{-1}(x) \subset W$

-Si  $x$  est l'image d'un point d'une arête de  $X$  mais pas d'un sommet, il a deux antécédents  $x_1$  et  $x_2$ , et  $\exists (i_1, i_2) \in \{1, \dots, n\}^2, (j_1, j_2) \in \{1, \dots, 2n\}^2$  tels que  $x_k \in ]a_{j_k}, p_{i_k}[$  pour  $k = 1$  ou  $2$ . Par conséquent  $\pi^{-1}(x) \subset W$ .

-Si  $x$  est l'image d'un sommet alors  $x = p$  car les disques sont suffisamment petit pour ne pas contenir d'autres sommets de  $X$ . Dans ce cas on a clairement  $\pi^{-1}(x) \subset W$ .

Donc  $\pi_{-1}(\pi(W)) = W$  et  $W$  est un ouvert de  $X$  donc  $\pi(W)$  est un ouvert de  $Y$ . On peut montrer que  $\pi(W)$  est homéomorphe à  $D(0, r)$  d'une façon analogue au cas précédent, en recollant ensemble les secteurs angulaires centrés en les pré-images de  $p$  et de rayon  $r$  pour obtenir un disque, en modifiant éventuellement l'angle et en respectant l'ordre d'identification :  $\forall i \in \{2, \dots, 2n-1\}$ , les points  $a_i$  et  $a_{i+1}$  seront identifiés, ainsi de  $a_1$  et  $a_{2n}$ . On a ainsi montré que tout point possède un voisinage homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $Y$  est séparé pour finir la preuve de cette proposition.

Soit  $(p, q) \in Y^2$  avec  $p \neq q$ .

On note  $\{p_1, \dots, p_n\} = \pi^{-1}(p)$  et  $\{q_1, \dots, q_m\} = \pi^{-1}(q)$  l'ensemble des antécédents respectifs à  $p$  et  $q$  par la surjection canonique  $\pi$ .  $\{p_1, \dots, p_n\}$  et  $\{q_1, \dots, q_m\}$  sont alors disjoints car  $p \neq q$ .

Il reste alors un ouvert de  $Y$  de la forme  $D(p, r)$  ou  $\pi(V)$  contenant  $p$ , noté  $U_r(p)$  et un ouvert de  $Y$  de la forme  $D(p, r')$  ou  $\pi(V')$  ou  $\pi(W')$  contenant  $q$ , noté  $U_{r'}(q)$ .

Si  $U_{r'}(q) \cap U_r(p) \neq \emptyset$  on remplace :

$r$  par  $r_1 = \min(\{r\} \cap \frac{|p_i - q_j|}{3}; i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

$r'$  par  $r_2 = \min(\{r'\} \cap \frac{|p_i - q_j|}{3}; i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

Alors on vérifie que les nouveaux ouverts  $U_{r_1}(p)$  et  $U_{r_2}(q)$  sont disjoints. Il existe donc des ouverts disjoints contenant respectivement  $p$  et  $q$ , donc  $Y$  est séparé.

L'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone régulier est donc une surface compacte.  $\square$

Les polygones réguliers étant homéomorphes au disque unité, on peut les représenter sous la forme d'un disque unité comme dans la figure 4.

En choisissant un sommet du polygone (celui le plus à gauche) et un sens de rotation (horaire), on peut décrire la façon dont on identifie les côtés du

polygone par un "mot". Plus précisément, si la flèche est dans le sens de rotation, on identifie la lettre avec exposant 1, et un exposant -1 dans le sens opposé.

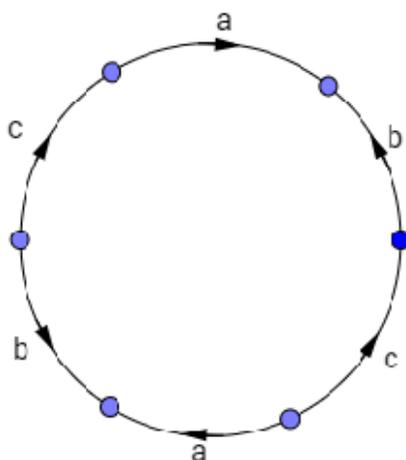


FIGURE 4 –

On peut associer à la surface de la figure 4 le mot  $cab^{-1}c^{-1}ab^{-1}$

## 1.4 Somme connexe

La somme connexe est une opération qui consiste à "coller" deux surfaces ensemble selon un procédé précis.

Si  $D$  est homéomorphe à un disque fermé  $D'$  de  $\mathbb{R}^2$ , on notera  $\partial D$  le sous-ensemble de  $D$  homéomorphe au bord de  $D'$ .

**Définition 2 :** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces disjointes. On considère un sous-ensemble  $D_1$  de  $S_1$  et un sous-ensemble  $D_2$  de  $S_2$ , tous deux homéomorphes au disque unité fermé.

On pose  $S'_i$  le complémentaire de  $D_i$  dans  $S_i$ , pour  $i = 1, 2$  :  $S'_i = S_i \setminus \overset{\circ}{D}_i$

Il existe un homéomorphisme  $h$  de  $\partial D_1$  sur  $\partial D_2$ .

On appelle somme connexe de  $S_1$  et  $S_2$ , noté  $S_1 \# S_2$ , l'espace quotient obtenu à partir de  $S'_1 \cup S'_2$  en identifiant les point  $x$  et  $h(x)$ ,  $\forall x \in \partial D_1$ .

**Proposition 2** : La somme connexe de deux surfaces est une surface. Les propriétés topologiques de le somme connexe de dépendent ni des choix de disque ni des homéomorphismes.

On peut utiliser un procédé analogue à celui de la proposition 1 pour montrer que l'espace quotient  $S_1 \# S_2$  est une surface.

**Proposition 3** : Soit  $S$  une surface, et  $S^2$  la sphère unité. Alors  $S \# S^2$  est homéomorphe à  $S$ .

**Preuve** : Soit  $D_1$  un sous-ensemble de  $S$  homéomorphe à un disque fermé. On pose  $D_2 = S^2 \cap \{z \leq 0\}$ . Cet ensemble est homéomorphe à un disque fermé. Quand on effectue la somme connexe en identifiant le bord de  $D_1$  avec celui de  $D_2$ , comme le complémentaire de  $D_2$  dans  $S^2$  est homéomorphe au disque, cela revient au même de coller un disque à la place de  $D_1$ , et donc la surface obtenue est homéomorphe à  $S$ .  $\square$

**Remarque** : On peut vérifier que l'opération de somme connexe est commutative, associative, et possède un élément neutre (la sphère). L'ensemble des classes de surfaces compactes pour la relation "est homéomorphe à" est donc un semi groupe, il n'y a pas d'inverses.

Soient deux tores  $T_1$  et  $T_2$ . on considère leur écriture sous forme de carré. Effectuons leurs somme connexe. On commence par enlever un disque à chacun des tores (parties achurés sur la figure 5).

On recolle ensuite les deux polygones selon  $c_1$  et  $c_2$ , ce qui nous donne finalement la figure 6.

On peut donc associer à la somme connexe de deux tores le mot :  $b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$ , et par récurrence la somme de  $n$  tores :  $b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} \dots b_n a_n b_n^{-1} a_n^{-1}$

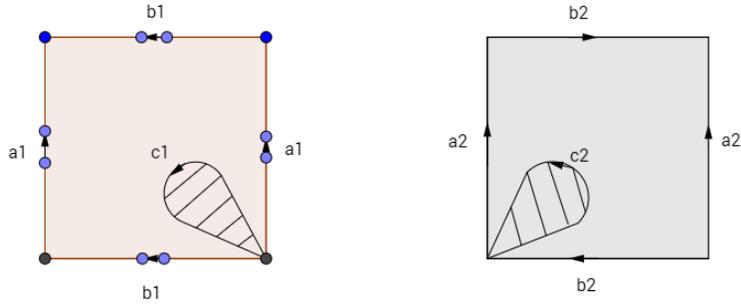


FIGURE 5 – Figure 5 : Deux tores

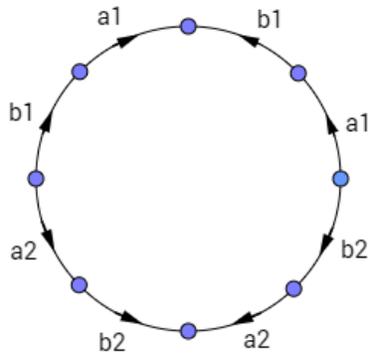


FIGURE 6 – Somme connexe de deux tores

## 1.5 Orientabilité

Nous allons distinguer deux types de surfaces : celles qui sont orientables, et celles qui ne le sont pas.

Comme tout point d'une surface possède un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , choisir une orientation en un point de la surface revient à choisir une orientation du disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , par exemple un repère ou un sens de rotation.

Une surface sera dite orientable si lorsqu'on choisit une orientation en un point, et que l'on se déplace le long d'un chemin quelconque en gardant le

même choix d'orientation, on retrouve la même orientation à l'arrivée qu'au départ.

On commence par définir un chemin tracé sur une surface.

**Définition 3 :** Soit  $S$  une surface. Un chemin tracé sur la surface est une application continue  $f$  d'un intervalle fermé  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $S$ . Si de plus  $f(a) = f(b)$ , on dit que c'est un lacet.

L'orientabilité d'une surface se définit à partir de la propriété de ses lacets à changer d'orientation ou non.

**Définition 4 :** Un lacet d'une surface  $S$  préserve l'orientation si l'orientation au départ et à l'arrivée sont identiques. Sinon, on dit qu'il change l'orientation.

**Définition 5 :** Une surface est dite orientable si tous ses lacets préservent l'orientation. Sinon, elle est dite non orientable.

**Proposition 4 :** La somme connexe de deux surfaces est orientable si et seulement si les deux surfaces le sont.

L'orientabilité d'une somme connexe dépend donc de celle des deux surfaces considérées.

## 2 Seconde partie : Développement de la théorie

### 2.1 Triangulation des surfaces compactes

**Définition 6 :** Une triangulation d'une surface compacte  $S$  est une famille finie d'ensembles fermés  $T_1, \dots, T_n$  qui couvre la surface et une famille d'homéomorphismes  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  telles que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists T'_i$  triangle de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\phi_i$  est un homéomorphisme de  $T'_i$  sur  $T_i$ . On appelle triangle les  $T_i$ , côtés les images des côtés des triangles de  $\mathbb{R}^2$ , et sommets les images des sommets des triangles de  $\mathbb{R}^2$ . On demande de plus que deux triangles  $T_i$  et  $T_j$  ( $j \neq i$ ) soient disjoints, ou possèdent un côté en commun, ou un sommet en commun.

On admettra le théorème suivant :

**Théorème 1** (T.Rado, 1925) : Toute surface compacte  $S$  admet une triangulation

## 2.2 Théorème de classification des surfaces compactes

**Théorème 2** : Toute surface compacte est homéomorphe soit à une sphère, soit à une somme connexe de plans projectifs, soit à une somme connexe de tores.

**Preuve** (selon la démarche proposée par W.S Massey en cinq étapes) : Dans la suite,  $S$  désigne une surface compacte,  $T$  une triangulation de  $S$  contenant  $n$  triangles.

*Première étape : d'une triangulation à un polygone*

On passe de la triangulation de  $S$  à un polygone dont le nombre de côtés est pair et dont les arêtes sont deux à deux identifiées. Tout d'abord numérotions les triangles de la triangulation  $T$  dans un ordre avantageux.

**Proposition 5** : On peut numéroter de 1 à  $n$  les triangles de  $T$  de sorte que  $\forall i \in \{2, \dots, n\}$ , le triangle  $T_i$  possède un côté  $C_i$  en commun avec un des triangles  $T_1, \dots, T_{i-1}$ .

On choisit un des triangles de la triangulation  $T$  (nommé  $T_1$ ) et  $c_2$  un côté de  $T_1$ .  $\exists T_2 \neq T_1$  tel que  $T_1 \cap T_2 = c_2$ .

On choisit ensuite un triangle  $T_3$  ayant un côté  $c_3$  commun à  $T_1$  ou  $T_2$ . On peut montrer par l'absurde que ce procédé engendre tous les triangles de  $T$  : supposons qu'à un moment donné il reste un ensemble  $E$  de triangles non numérotés, et qu'aucun n'a de côté en commun avec les triangles numérotés  $\{T_1, \dots, T_k\}$ , alors aucun sommet des triangles numérotés n'est sommet d'un triangle de  $E$  car pour un sommet  $s$  donné, on peut numéroter les triangles de sorte que chacun ait un côté commun avec le suivant. Or on a supposé que les triangles de  $E$  n'ont pas de côtés en commun avec  $\{T_1, \dots, T_k\}$ .

Les deux ensemble sont disjoints et le fait qu'ils soient fermés contredit la connexité de la surface  $S$ .

On peut donc numéroter les triangles comme indiqué dans la proposition.

Tous les triangles de  $\mathbb{R}^2$  étant homéomorphes, on peut supposer que chacun des triangles  $T_i$  de la triangulation  $T$  est homéomorphe à un triangle équilatéral  $T'_i$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que tous les triangles  $T'_i$  ont leurs côtés de même longueur. On pose  $\phi_i$  l'homéomorphisme de  $T'_i$  sur  $T_i$ .

On colle les triangles  $T'_1$  et  $T'_2$  selon l'antécédent  $c'_2$  de  $c_2$  par  $\phi_1$ , le triangle  $T'_3$  à un des triangles précédents selon  $c_3$  et ainsi de suite jusqu'à  $T_n$ .

Soit  $P$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  ainsi obtenu.

Nécessairement, les côtés des triangles  $T'_1, \dots, T'_n$  dont les images par les  $\phi_i$  correspondants de sont pas dans  $\{c_2, \dots, c_n\}$  sont identifiés avec un autre côté qui n'est pas lui non plus une préimage d'un  $c_i$ .

En considérant de bord du polygone  $P$  (homéomorphe à  $S$  et à un disque), on obtient une succession de côtés qui seront deux à deux identifiés.

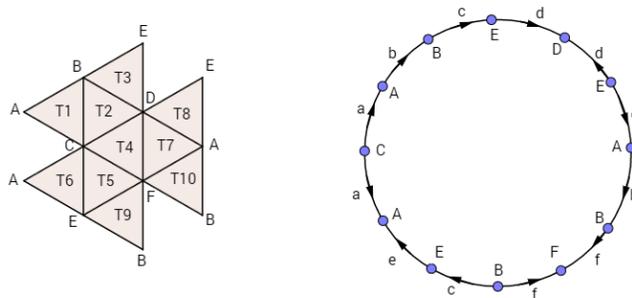


FIGURE 7 – D'une triangulation à un mot

La figure 7 illustre le processus : on part de la triangulation  $\{ABC, ACE, CEF, EFB, FBA, ADF, ADE, BDE, BDC, CDF\}$  ( $=\{T_1, T_6, T_5, T_9, T_{10}, T_7, T_8, T_3, T_2, T_4\}$ )

On colle ensuite les triangles selon la règle énoncé plus haut. Enfin en parcourant le tour du polygone, on obtient une représentation sous forme de cercle.

*Deuxième étape : élimination des paires adjacentes de première espèce*

On utilise l'écriture introduite précédement pour décrire l'enchainement des côtés autour de polygone. Par exemple, la figure 7 peut être décrite par le mot :  $bcdd_{-1}ebff_{-1}cea_{-1}a$ .

**Définition 7** : On appelle paire de première espèce les paires de côtés pour lesquelles les exposants 1 et -1 apparaissent. Les autres sont dites de deuxième espèce.

*Rappel : La sphère peut être écrite par le mot  $aa^{-1}$  ; c'est l'élément neutre pour la somme connexe.*

Si  $a$  et  $a^{-1}$  apparaissent côte à côte, et si  $P$  a d'autres côtés, alors on peut supprimer ces deux côtés de la liste. En effet cela revient à considérer la somme connexe de  $S'$  avec la sphère  $S^2$ , ce qui est homéomorphe à  $S'$ . L'exemple de la figure 7 devient  $bcebce$ .

*Troisième étape : identifier en un seul point tous les sommets du polygone*

Cependant, à l'issue de l'étape 2 certains sommets peuvent ne pas être identifiés avec d'autres, comme c'est le cas de l'exemple suivant, où les sommets indiqués par la lettre A ne seront pas identifiés avec les sommets notés B, ni ceux portant la lettre C.

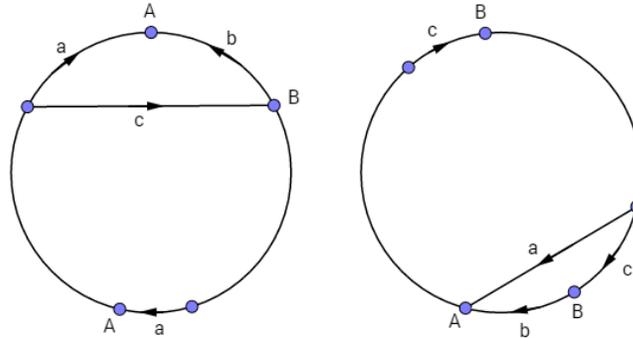


FIGURE 8 – Elimination d'un sommet de la classe de A

Comme on l'a remarqué, certains sommets peuvent ne pas être identifiés. On désigne par classe d'un sommet A l'ensemble des sommets qui seront identifiés avec A.

On se propose de supprimer la classe de A par la méthode de "couper-coller" qui consiste à couper le polygone à certains endroits et à recoller les morceaux différemment.

Forcément, il y a un endroit où deux sommets successifs A et B ne seront pas identifiés. Coupons donc, comme sur la figure 8 selon le segment c reliant le sommet B avec celui juste avant A, et recollons le suivant a.

Nécessairement  $a \neq b$ , autrement soit les sommets A et B seraient identifiés soit on pourrait appliquer l'étape 2.

Voici maintenant l'algorithme pour finalement obtenir un polygone dont tous les sommets vont être identifiés.

Si on peut appliquer de nouveau l'étape 2 on l'applique, et s'il reste encore des éléments dans la classe de A on leur applique de nouveau l'étape 3, jusqu'à que cette dernière soit vide. Ensuite, s'il y a encore plusieurs classes de sommets, on en choisit une autre et on l'élimine de la même manière, jusqu'à que finalement il ne reste plus qu'une classe de sommet.

**Remarque :** Les classes de sommets finiront toujours par être vides car elles ne possèdent qu'un nombre fini de sommets et que l'application de l'étape 3 diminue le nombre de sommets dans une classe de 1 à chaque fois. L'application de l'étape 3 à la figure 8 engendre le plan projectif.

*Quatrième étape : rendre adjacentes les paires de seconde espèce*

On remarque que dans l'expression de la somme connexe de plans projectifs, les paires de seconde espèce sont toutes adjacentes. On se propose donc, par la méthode de couper-coller, de les mettre côte à côte.

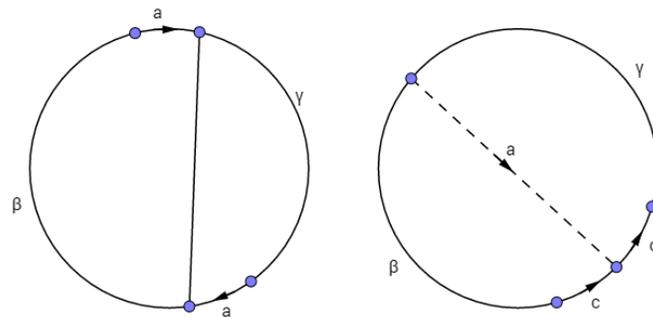


FIGURE 9 – Rendre adjacentes les paires de seconde espèce

Supposons qu'il y ait une paire  $a, a$  de seconde espèce telle que les deux côtés ne se suivent pas. Alors on découpe le polygone selon le segment  $c$  indiqué sur la figure 9, et on recolle selon  $a$ . Les lettres  $\beta$  et  $\gamma$  représentant des mots.

Dans le polygone que l'on obtient, les deux côtés portant le lettre  $c$  se suivent. On remarque que cela n'a pas changé l'ordre des lettres  $\beta$  et  $\gamma$ . On peut donc procéder de même avec les éventuelles autres paires de seconde espèce sans séparer celles qui ont déjà été réunies.

Une fois que toutes les paires de seconde espèce sont adjacentes, s'il n'y a pas de paires de première espèce, on obtient l'écriture d'une somme connexe de plans projectifs, et donc la surface  $S$  est homéomorphe à une somme connexe de plans projectifs.

S'il y a des paires de première espèce, il faut continuer.

Cinquième étape : les paires de première espèce

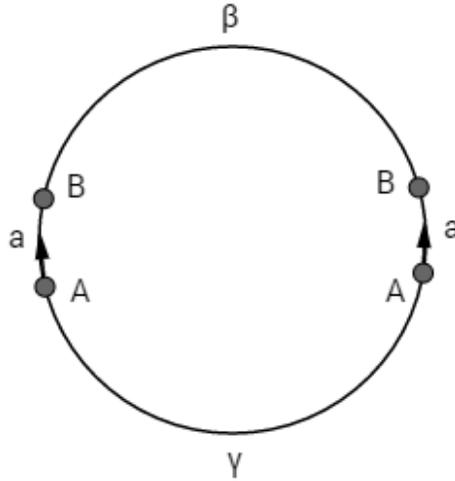


FIGURE 10 – Une paire de première espèce

Supposons qu'à l'issue de la quatrième étape il reste une paire de la première espèce, indiquée par  $a$ , et au moins quatre côtés. Alors il y a une deuxième paire de première espèce, indiquée par la lettre  $b$  telle que la succession de côtés s'écrit :  $a\beta b\gamma a^{-1}\delta b^{-1}\lambda$ .

En effet comme l'étape 4 est terminée, les paires de deuxième espèce sont adjacentes, donc si on suppose qu'il n'y a pas de paire de première espèce  $b$  telle que le mot  $a\beta b\gamma a^{-1}\delta b^{-1}\lambda$  décrive la surface, cela signifie que la surface peut être obtenue par le mot  $a\beta a^{-1}\gamma$  où aucun côté de  $\beta$  ne sera identifié avec un côté de  $\gamma$ . La surface peut alors être représentée par la figure 10.

Les sommets A et B appartiennent à des classes différentes, ce qui contredit le fait qu'on a terminé l'étape 2.

Il existe donc bien une deuxième paire  $b$  de première espèce, telle que le polygone soit décrit par le mot  $a\beta b\gamma a^{-1}\delta b^{-1}\lambda$ .

On veut les rendre consécutifs de façon à retrouver l'écriture d'un tore :  $aba^{-1}b^{-1}$ . On procède encore par couper-coller. L'idée est de choisir une extrémité d'un côté portant la lettre  $a$ , de le relier avec l'autre côté portant la lettre  $a$  pour rendre successifs les côtés de première espèce. On coupe selon  $c$

et on recolle selon b, et on procède ensuite de même en reliant les extrémités de c, on coupe selon d et on recolle selon a (voire figure 11).

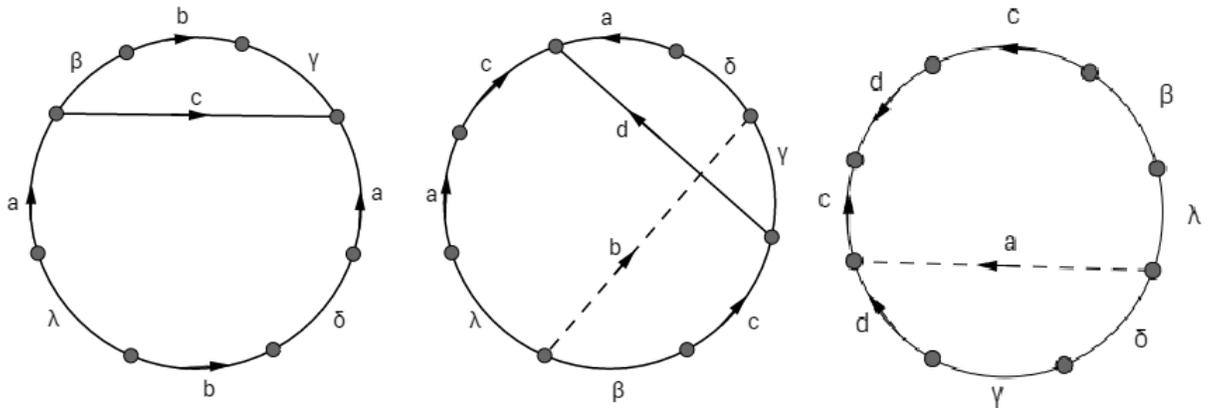


FIGURE 11 – Etape 5

On obtient donc un polygone de côté  $dcd^{-1}c^{-1}\beta\lambda\delta\gamma$ , ce qui est bien de la forme que l'on voulait.

On procède de même s'il reste des paires de première espèce que ne se suivent pas selon le schéma du tore.

Si à la fin, il n'y a que des paires de première espèce on obtient l'écriture d'une somme connexe de tores.

Il reste le cas où il y a des paires de première et de deuxième espèce. Nous avons donc la propriété suivant :

**Proposition 6 :** La somme connexe d'un tore et d'un plan projectif est homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs.

**Preuve** (Nous suivrons ici la preuve proposée par Y.Félix et D.Tanré)  
 Considérons un tore et un plan projectif. Si on effectue leur somme connexe, on obtient la figure 11. On coupe selon d et on recolle selon c. Les paires désignées pas a et b sont alors de la seconde espèce, et on procède comme dans l'étape 4 pour les rendre adjacents. Sans détailler, on obtient successivement les représentations indiquées sur la figure 13.

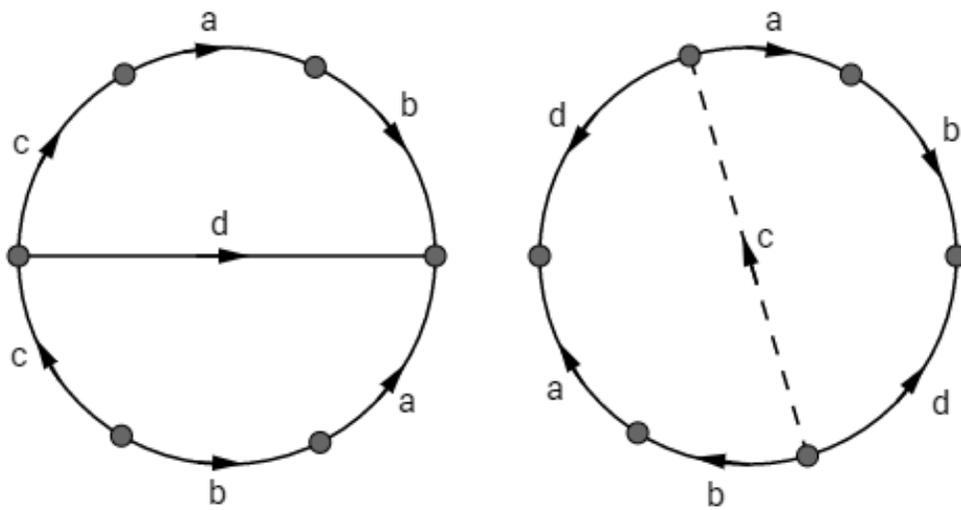


FIGURE 12 – Somme connexe d'un tore et d'un plan projectif

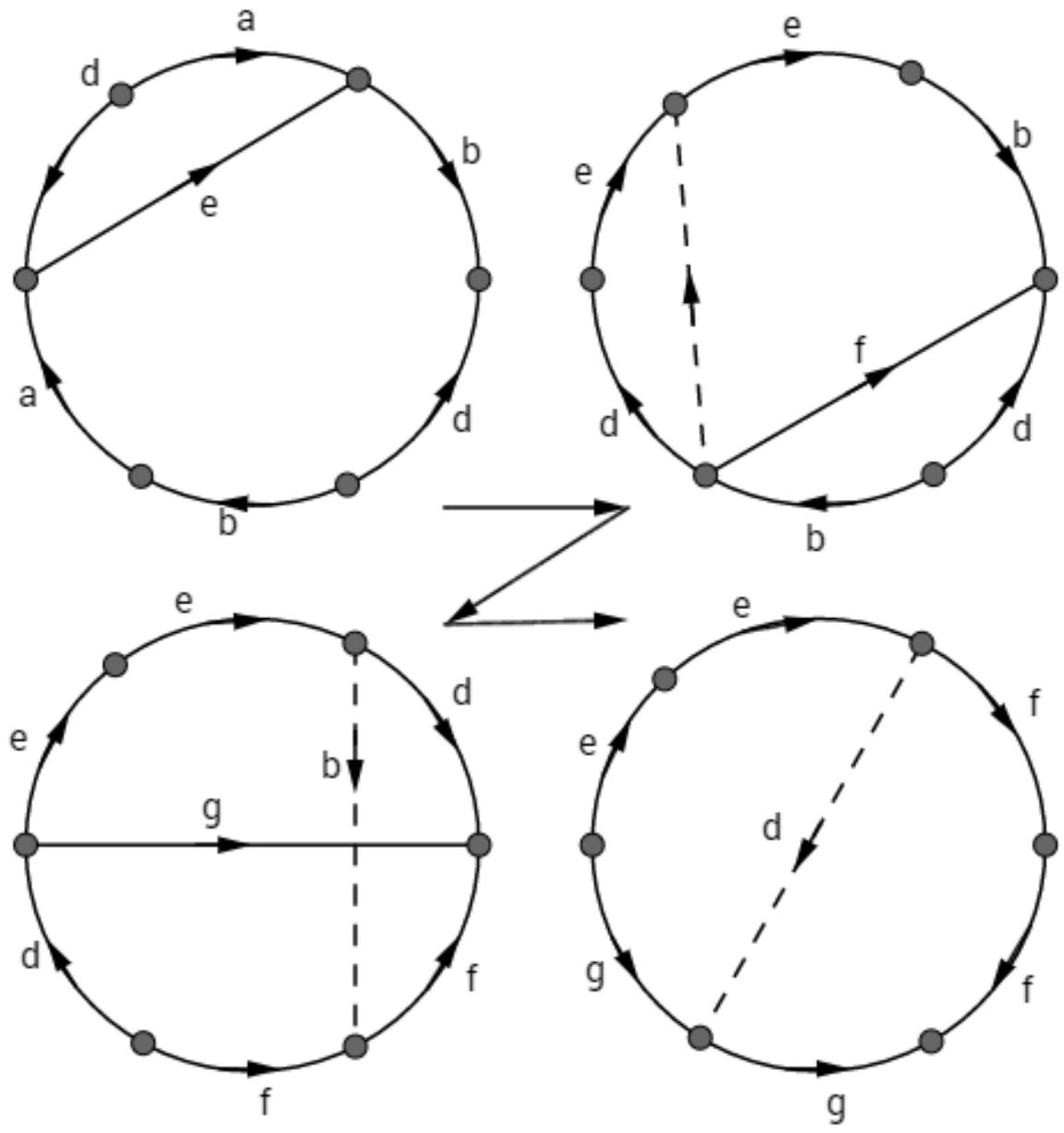


FIGURE 13 – Utilisation de l'étape 4

La dernière figure représente bien la somme connexe de trois plans projectifs.

Par conséquent, en utilisant cette propriété autant de fois que l'on a des quadruplets de la forme  $aba^{-1}b^{-1}$  suivit d'un couple cc, on obtient une somme de plans projectifs.

On a donc démontré que toute surface compacte est homéomorphe soit à une sphère, soit à une somme connexe de plans projectifs, soit à une somme connexe de tores.  $\square$

Néanmoins, nous n'avons pas encore prouvé qu'il n'est pas possible de réduire d'avantage le nombre de classes de surfaces.

### 2.3 Caractéristique d'Euler

**Définition 8 :** Soit  $S$  une surface compacte muni d'une triangulation  $T$ . On note  $S$  le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de triangles de  $T$ . La caractéristique d'Euler de la surface  $S$  est le nombre noté  $\chi(S)$  et défini par  $\chi(S) = S - A + F$ .

**Proposition 7 :** Soit  $T$  la triangulation d'une surface  $S$ ,  $T_k$  inscrit dans un triangle de  $T$  tel que  $T_k$  n'ait pas un seul sommet dans  $T$  (on s'autorise tous sommets de  $T_k$  sur différentes arêtes, deux sommets confondus et  $T_k$  appartenant à  $T$ ).

Alors on a  $T \cup T_k$  une triangulation de  $S$ , et de plus  $\chi(T) = \chi(T \cup T_k)$

**Preuve :** On pose  $\chi(T) = n$  et  $T_i$  le triangle de  $T$  contenant  $T_k$   
Trois cas différents :

*Cas n° 1 : Les trois sommets de  $T_k$  sont sur des arêtes distinctes de  $T_i$ .*  
 $T_k$  divise donc  $T_i$  en trois triangles.

Alors  $\chi(T_i) = 3 - 3 + 1 = 1$  et  $\chi(T_i|T_k) = 6 - 9 + 4 = 1$  ( voir figure 14)

*Cas n° 2 : Deux sommets de  $T_k$  sont confondus avec ceux de  $T_i$ .*  
Alors  $\chi(T_i) = 3 - 3 + 1 = 1$  et  $\chi(T_i|T_k) = 4 - 5 + 2 = 1$

*Cas n° 3 : Les trois sommets de  $T_k$  sont confondus avec ceux de  $T_i$ .*  
Alors  $T_k = T_i$  et  $T \cup T_k = T$

Dans les 3 cas on a bien que le rajout d'un triangle dans  $T$  ne change pas la caractéristique d'Euler de la surface  $S$ .  $\square$

**Proposition 8** : Quelque soit  $T_1$  et  $T_2$  deux triangulation d'une même surface  $S$ , on a  $\chi(T_1) = \chi(T_2)$ .

**Preuve** : On identifie une triangulation à la donnée des points de  $S$  et des segments entre ses points  $(P, S)$ .

On a  $P_1 = \{\text{sommet de } T_1\}$ ,  $S_1 = \{\text{segment de } T_1\}$ , ainsi que  $P_2 = \{\text{sommet de } T_2\}$  et  $S_2 = \{\text{segment de } T_2\}$ .

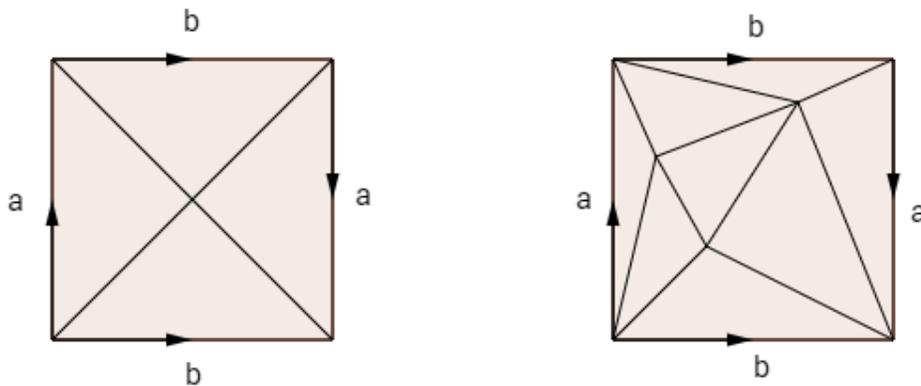


FIGURE 14 –

Partons de  $T_1$ , on prend  $P = P_1 \cup P_2 \cup I$ , avec  $I = \{\text{intersection des segments de } S_1 \text{ et } S_2\}$   
on cherche  $S$  respectant les conditions suivantes (car  $S = S_1 \cup S_2$  n'est pas  
forcement une triangulation) :

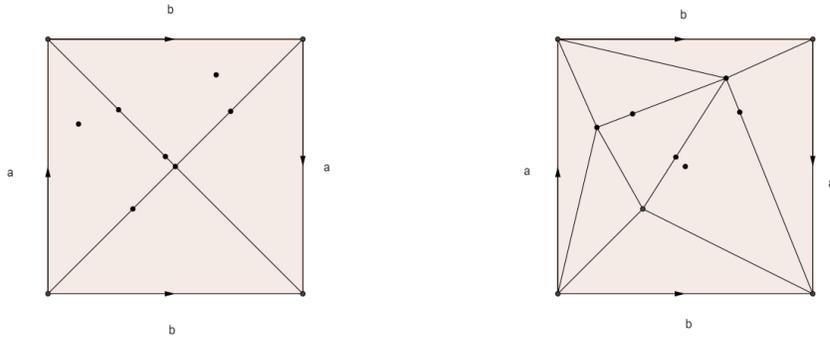


FIGURE 15 –

Pour tout  $x$  sommet appartenant à  $S_2 \cup I$  mais pas à  $S_1$  et n'étant sur aucun segment de  $P_1$  on considère  $ABC$  le plus petit triangle contenant  $x$ , on ajoute arbitrairement un segment passant par  $x$  et respectant les conditions de la proposition précédente et on note  $S_X = S_1 \cup S_x$  avec  $S_x$  l'ensemble des segments que l'on vient d'ajouter :

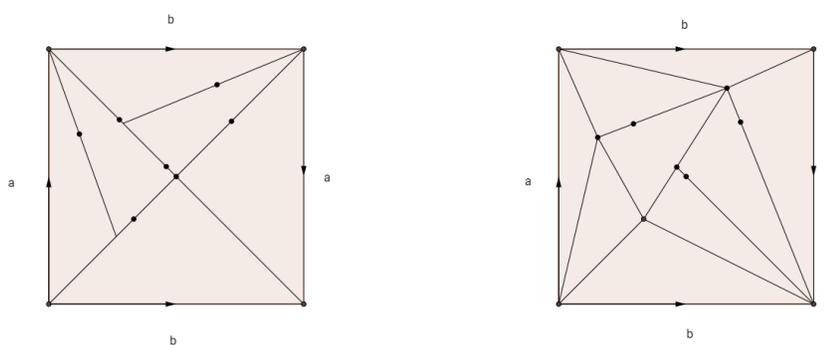


FIGURE 16 –

On a donc tout point de  $P$  étant soit sur une arête, soit uniquement sommet de un ou plusieurs triangles successivement, pour chaque point  $x$  de  $P_2 \cup I$  on ajoute arbitrairement tous les segments  $[xy]$  tels que  $y$  est sommet opposé de l'arête contenant  $x$  (au plus deux segments pour chaque point). :

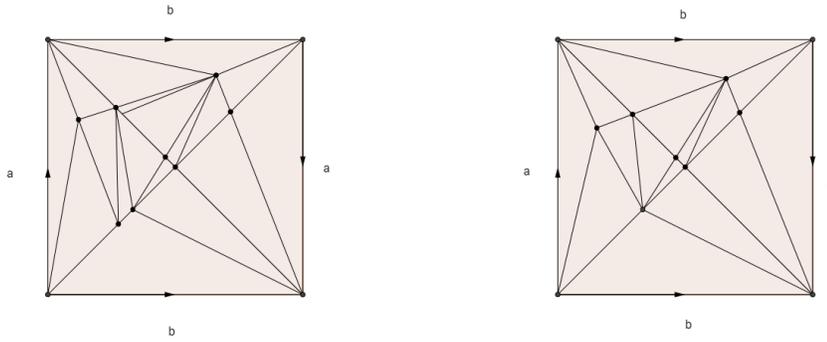


FIGURE 17 –

On a maintenant une triangulation contenant  $P = P_1 \cup P_2 \cup I$  et  $S_X$  telle que tout point de  $P$  est uniquement un sommet on peut donc ajouter simplement les segments de  $S_2$  et conserver la propriété de triangulation. :

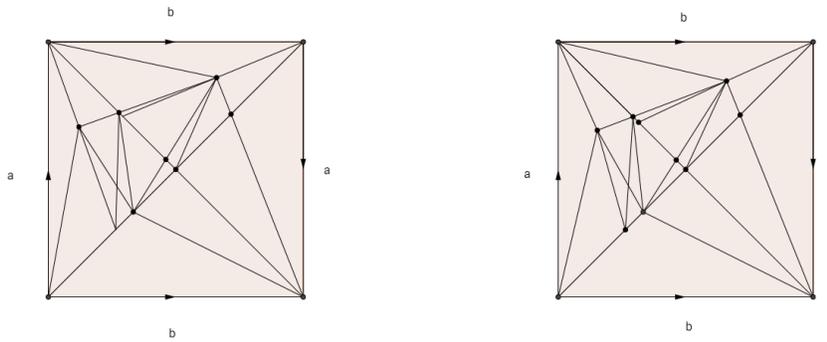


FIGURE 18 –

On a donc construit une méthode respectant les hypothèses de la proposition précédente pour passer de  $T_1$  à  $T$  et donc  $\chi(T) = \chi(T_1)$ . De même pour  $T_2$  on a ainsi construit une super-triangulation  $T$  contenant  $T_1$  et  $T_2$ .

**Proposition 9** : Deux surfaces compactes homéomorphes ont même caractéristique d'Euler.

**Preuve** : Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes homéomorphes par  $f$ . On muni  $S_1$  d'une triangulation  $T$ . Par l'homéomorphisme  $f$ , cette triangulation est envoyée sur une triangulation de  $S_2$ , et donc les deux surfaces ont même caractéristique d'Euler.  $\square$

On obtient donc un moyen de distinguer les classes de surfaces compactes, car alors, deux surfaces compactes ne seront pas homéomorphes si elles n'ont pas la même caractéristique d'Euler.

Commençons par calculer la caractéristique d'Euler d'une somme connexe de deux surfaces.

**Proposition 10** : Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes. La caractéristique de la somme connexe  $S_1 \# S_2$  est alors :  $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$ .

**Preuve** : Considérons une triangulation  $T_1$  de  $S_1$  et une triangulation  $T_2$  de  $S_2$ . Comme l'intérieur de chaque triangle est homéomorphe à un disque ouvert, on choisit pour réaliser la somme connexe d'enlever à  $S_1$  l'intérieur d'un triangle  $A_1A_2A_3$ , et à  $S_2$  l'intérieur d'un triangle  $B_1B_2B_3$ . Pour les recoller, on identifie pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  le sommet  $A_i$  avec le sommet  $B_i$ , et donc le côté  $A_iA_j$  avec le côté  $B_iB_j$ .

Il reste à compter le nombre de sommets, côtés et triangles obtenus. Pour les sommets, on obtient les sommets de  $S_1$  plus les sommets de  $S_2$  moins 3 du fait des identifications, de même pour les arêtes et pour les triangles, on obtient la somme du nombre de triangles de  $S_1$  et de  $S_2$  moins les deux triangles qu'on a enlevé. On a donc :

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 3 + 3 - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

Ce qui est bien la formule attendue.

Par conséquent, on peut calculer la caractéristique d'Euler de chacune des

surfaces données par le théorème de classification des surfaces compactes à partir de celles du tore, de la sphère et du plan projectif :

<b>Surface compacte S</b>	$\chi(S)$
Sphère	2
Tore	0
Somme connexe de n tores	2-2n
Plan projectif	1
Somme connexe de n plans projectifs	2-n

Comme de plus des surfaces homéomorphes ont même orientabilité, on a donc bien que les classes d'équivalence du théorème de classification des surfaces compactes sont deux à deux différentes.

Ainsi on a le théorème suivant :

**Théorème 3** : Deux surfaces compactes sont homéomorphes si elle on même caractéristique d'Euler et même orientabilité.

Au lieu de considérer la caractéristique d'euler on onsidère parfois un autre nombre, le genre  $g$ , que l'on obtient par la formule suivante :

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) & \text{si } S \text{ est orientable} \\ 2 - \chi(S) & \text{si } S \text{ est non orientable} \end{cases} \quad (1)$$

Le genre  $g$  d'une surface compacte est nul si elle est homéomorphe à une sphère, et correspond sinon au nombre de tores (cas orientable) ou de plans projectifs (cas non orientable) de la somme connexe à laquelle est homéomorphe la surface. On a donc une classification complète des surfaces compactes et un moyen de déterminer à quelle classe elles appartiennent grâce à leur orientabilité et leur genre.