Fonction caractéristique

Dans toute la suite, pour tout $x = (x_i)_{i=1}^d, y = (y_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

1 Fonction caractéristiques de variables aléatoires

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. – Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, la fonction caratéristique de μ est la fonction φ_μ, définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$.

– Soit X une variable aléatoire vectorielle, la fonction caractéristique de X est la fonction φ_X définie par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t,x\rangle}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$.

Elle vérifie
- $\varphi(0) = 1$,
- $|\varphi(t)| \leq 1$,
- φ_μ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 2. i. La fonction caractéristique caractérise la loi : si X et Y sont deux variables aléatoires qui ont la même fonction caractéristiques, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

ii. Si X est une variable aléatoire de transformée de Fourier φ_X intégrable, alors X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité f_X est

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\Pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} \varphi_X(t) dm(t), \quad m \quad pp \quad x.$$

1.2 Génération des moments via la fonction caractéristique

Théorème 3. Soit X une v.a.r. de loi P_X et de fonction caractéristique φ_X.

i. Si $\mathbb{E}(|X|^n) < +\infty$, alors φ_X est n fois dérivable et on a

$$\forall 0 \leq k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} P_X(dx). \tag{1}$$

En particulier, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$.

ii. Réciproquement, si, pour un n **pair**, φ_X est n fois dérivable en 0 , alors $\mathbb{E}(|X|^n) < +\infty$.

Démonstration. i. L'identité (1) se montre par récurrence : c'est une conséquence immédiate du théorème de dérivation sous le signe somme (c.v. dominée). Cela a déjà été démontré pour la T.F. d'une fonction $\mathbb{L}^1$.

ii. Par récurence sur $k = n/2 \geq 1$. Le cas $k = 1$ contient essentiellement toute la difficulté. Supposons donc $\phi = \phi_X$ deux fois dérivable en 0. Par la formule de Taylor-Young,

$$\phi(t) - \phi(0) - \phi'(0)t - \phi''(0)\frac{t^2}{2} = \circ(t^2)$$

quand t tend vers 0. En appliquant cela à t et $-t$ et en sommant, on obtient donc

$$\frac{\phi(t)+\phi(-t)-2\phi(0)}{t^2} \to \phi''(0). \tag{2}$$

Remarquons que

$$\frac{2\phi(0)-\phi(t)-\phi(-t)}{t^2} = \mathbb{E}\left(\frac{2-(e^{itX}+e^{-itX})}{t^2}\right) = 2\,\mathbb{E}\left(\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right) \in \mathbb{R}_+$$

ce qui montre, à la limite quand $t \to 0$, que $-\phi''(0) \in [0,+\infty[$. Enfin, le lemme de Fatou pour $\frac{1-\cos(tX)}{t^2} \geq 0$ permet d'affirmer que

$$+\infty \quad > \quad -\phi''(0) \quad = \quad 2\lim_{t\to 0}\mathbb{E}\left(\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right) \quad \geq \quad 2\,\mathbb{E}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right) \quad = \quad \mathbb{E}(X^2).$$

C'est le résultat souhaité pour $k=1$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour $n=2k$ et montrons le pour $n=2k+2$. On suppose donc que $\phi^{(2k+2)}(0)$ existe. Soit $\psi = \phi^{(2k)}$. ψ est donc dérivable autour de 0 et $\psi''(0)$ existe : on peut donc appliquer (2) à ψ. Mais, comme $\phi^{(2k)}(0)$ existe, on sait par hypothèse de récurrence que $\mathbb{E}(X^{2k}) < +\infty$. Et donc d'après la partie i., pour tout t, $\psi(t) = (-1)^k\mathbb{E}(X^{2k}e^{itX})$. On peut alors conclure comme précédemment :

$$\begin{aligned}+\infty > -(-1)^k\psi''(0) &= \lim_{t\to 0}(-1)^k\frac{2\psi(0)-\psi(t)-\psi(-t)}{t^2}\\ &= 2\lim_{t\to 0}\mathbb{E}\left(X^{2k}\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right) \geq 2\,\mathbb{E}\left(X^{2k}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right) = \mathbb{E}(X^{2k+2}).\end{aligned}$$

□

Exemple 4. Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{\sigma^{2n}}{2^n}\frac{(2n)!}{n!}$.
Pour le voir, on développe $\Phi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ en série entière. On obtient

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\sigma^{2k}}{2^k}\frac{t^{2k}}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Phi_X^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}.$$

D'où l'on tire $\Phi_X^{(2k)}(0) = (-1)^k\frac{\sigma^{2k}}{2^k}\frac{(2k)!}{k!}$ (et $\Phi_X^{(2k+1)}(0) = 0$).

1.3 Autres fonctions pouvant caractériser la loi d'une variable aléatoire

1.3.1 Transformée de Laplace

Définition 5. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, sa transformée de Laplace est

$$L^X(s) = \mathbb{E}(e^{\langle s,X\rangle})$$

définie pour les valeurs de s telles que $e^{\langle s,X\rangle}$ soit intégrable.

Proposition 6. Si X est une variable aléatoire réelle telle que e^{tX} soit intégrable pour tout $t \in I$ où I est un intervalle ouvert contenant 0, alors L^X est définie sur I, analytique au voisinage de 0, X admet des moments de tous ordre

$$L^X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbb{E}(X^n).$$

En particulier, $(L^X)^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$.
De plus si Y est une variable aléatoire telle que $L^X = L^Y$ sur J un intervalle ouvert contenant 0 alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Exemple 7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ_1 comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue, alors la transformée de Laplace de X^2 est $L^{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}, \quad t < 1$.

1.3.2 Fonction génératrice des moments

Définition 8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice des moments G^X est définie par $G^X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(\{\omega, X(\omega) = n\}) = \mathbb{E}(s^X), \quad s \in]-1, 1]$.

Proposition 9.

i. La fonction G^X est analytique sur $]-1, 1[$.

ii. Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $G^X(s) = G^Y(s)$, $s \in]-1, 1[$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.