Résumé du cours d'Intégration 2018

Introduction. Objectifs du cours:

1. Construire une théorie permettant d'attribuer une "mesure" (= analogue de longueur, aire, volume) à des ensembles plus généraux que les sous-ensembles de $\mathbf{R}^N$ et intégrer des fonctions définies sur de tels ensembles.

2. Éviter les difficultés qu'on rencontre avec l'intégrale de Riemann, notamment pour les passages à la limite.

Question. Quand une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est-elle intégrable au sens de Riemann?

Exemple. On sait que $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ est dénombrable. On écrit $\mathbf{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. On définit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque f_n est Riemann intégrable, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x\,dx = 0$, $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq 1$ et $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ pour tout $x \in [0,1]$, où $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Cependant, la fonction f n'est pas Riemann intégrable!

Certains pensaient qu'un ensemble "négligéable" devait être fini. J'ai alors proposé l'exercice suivant:

Exercice. (fonction de Riemann) On définit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ \frac{1}{p} \text{ si } x \in \mathbf{Q} \text{ et } x \text{ s'écrit } x = \frac{m}{p} \text{ avec } m, p \in \mathbf{N},\ (m,p) = 1. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en chaque point $x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$.

b) Montrer que f est discontinue en chaque point $\frac{m}{p} \in \mathbf{Q}$.

c) Montrer que f est Riemann intégrable sur $[0,1]$. (résolu en utilisant (a), (b) et le Théorème de Lebesgue)

1 Espaces mesurables, fonctions mesurables, mesures

Ensembles

1. Notion d'ensemble. Partie d'un ensemble. Complémentaire. $\mathcal{P}(X)$. Union, intersection.

2. $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i, \qquad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = ..., \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = ...$

3. Définition. Suite d'ensembles $(A_n)_{n\geq 1}$. Suite croissante et décroissante.

4. Définition. $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$.

5. Exemple. $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ dans le cas où $(A_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

Espaces mesurables

1. Définition. Algèbre.
Exemples (triviaux): $\{\emptyset, X\}$ ou $\mathcal{P}(X)$.

2. Propriétés élémentaires. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Alors:
- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ et $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Démonstration.

3. Définition. Sigma-algèbre (tribu).

4. Remarque. Soit $\mathcal{A}$ une $\sigma-$algèbre. On a: $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2, A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$. En particulier, toute $\sigma-$algèbre est une algèbre. La réciproque est fausse.

Exemple. Soit $X = \mathbf{R}$ et $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbf{R} \mid A$ est fini ou $\mathbf{R} \setminus A$ est fini $\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algère mais pas une tribu.

5. Propriétés élémentaires. Soit $\mathcal{A}$ une $\sigma-$algèbre. Alors:
- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- Si $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$, lors $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

6. Théorème. Une intersection quelconque de $\sigma-$algèbres est une $\sigma-$algèbre.

Démonstration complète.

7. Définition. $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ est } \sigma-\text{algèbre}, \mathcal{E}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}$ est la $\sigma-$algèbre engendrée par la fanille $\mathcal{E}$.

8. Exemple. Rappel de la définition d'un ouvert dde $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{R}^N$. On note $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, respectivement $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ la $\sigma-$algèbre engendrée par les ouverts de $\mathbf{R}$ (respectivement de $\mathbf{R}^N$). On appelle $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, resp. $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ la $\sigma-$algèbre de Borel.

$\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ est aussi engendrée par les fermés de $\mathbf{R}^N$.

Exemple. Les ensembles $\{0\}$, $[a, b[$, etc. sont des boréliens de $\mathbf{R}$.

Définition des ensembles de type G_δ et F_σ. Tous les ensembles G_δ et F_σ sont dans $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$.

9. Exemple. $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est engendrée par chacune des familles suivantes: $\mathcal{I}_1 = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$, $\mathcal{I}_2 = \{]-\infty, a[\mid a \in \mathbf{R}\}$, etc. Exercice - v. feuille TD.

10. Définition. Soit (X, d) espace métrique. Un ouvert de X est un ensemble $O \subset X$ tel que pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.

Par exemple X, $\emptyset$, toute boule ouverte sont des ouverts.

On note $\mathcal{B}(X)$ la $\sigma-$algèbre engendrée par tous les ouverts de X. On l'appelle la $\sigma-$algèbre des boréliens de X.

Mesures

1. Définition. Soit $\mathcal{A}$ une $\sigma-$algèbre. Une mesure (positive) sur $\mathcal{A}$ est une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ telle que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ est une suite d'ensembles **disjoints** on a $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

2. Conséquences de la définition. (avec démonstration pour chacune)

C1. Si A_1, A_2 sont disjoints, $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

C2. (Monotonie) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$.

C3. $A \subset B$ et $\mu(B) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

C4. (continuité supérieure) $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n+1} \quad \Rightarrow \mu\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

C5. (continuité inférieure) $A_{n+1} \subset A_n$ et $\mu(A_1) < \infty \quad \Rightarrow \mu\left(\cap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

C6. ($\sigma-$sous-additivité) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque d'ensembles mesurables (pas forcément disjoints!). On a

$$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration.

3. Exemples. a) Masse de Dirac.

b) Mesure de comptage.

c) Contre-exemple: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{N}^*)$, $\quad \mu(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini.} \end{cases}$

4. Définition. Mesure finie, $\sigma-$finie. Mesure de probabilité.

5. Définition. Mesure complète.

6. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et soit

$$\widehat{\mathcal{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\ \exists B \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(B) = 0 \text{ et } N \subset B\}.$$

On définit $\widehat{\mu} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow [0, \infty]$ par $\widehat{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$. Alors $\widehat{\mathcal{A}}$ est une $\sigma-$algèbre, $\widehat{\mu}$ est correctement définie et est une mesure sur $\widehat{\mathcal{A}}$, et $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ est un espace mesuré complet. On a $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$ et $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ est la plus petite extension complète de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Démonstration.

7. Définitions. Longueur d'un intervalle. $x + A$. tA.

8. Théorème. (mesure de Lebesgue sur R) Il existe une $\sigma-$algèbre $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R})$ et une mesure $m : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ telles que:

i) $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}$.

ii) $m(I) = longueur(I)$ pour tout intervalle I.

iii) Pour tout $A \in \mathcal{M}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$.

iv) m est invariante par translation: $m(x + A) = m(A)$.

v) $m(tA) = |t| m(A)$.

vi) $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ est complet.

De plus, le couple $(\mathcal{M}, m)$ avec les propriétés ci-dessus est unique.

Notation. Dans certains ouvrages la mesure de Lebesgue est notée λ.

10. Définition. Pavé de $\mathbf{R}^N$. Volume d'un pavé.

11. Théorème. (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^N$) Même énonce que dans le cas $N = 1$.

12. Remarque. $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), m_{|\mathcal{B}(\mathbf{R})})$ n'est pas complet. Son complété est précisément $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$.

Fonctions mesurables

1. Définition. Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite *mesurable* (par rapport aux $\sigma-$algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) ssi pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

2. Exemple. a) Soit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Alors toute fonction $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable.
b) Soit $\mathcal{B} = \{\emptyset, Y\}$. Alors toute fonction $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable.

3. Exercice. Soient X et Y deux ensembles, $f : X \longrightarrow Y$ une fonction et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une $\sigma-$algèbre de parties de X. On pose

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une $\sigma-$algèbre de parties de Y et que $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable. De plus, $\mathcal{B}$ est la plus grande $\sigma-$algèbre de parties de Y telle que f soit mesurable.

4. Exemple. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (Y, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes:
i) f est mesurable par rapport aux $\sigma-$algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(Y)$.
ii) Pour tout ouvert $O \subset Y$ on a $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$.
iii) Pour tout fermé $F \subset Y$ on a $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.
Démonstration.

5. Exemple. Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques. Alors toute fonction continue $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable par rapport aux $\sigma-$algèbres $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$.
Remarque. Il se peut qu'une fonction continue ne soit pas mesurable si l'on choisit des $\sigma-$algèbres différentes de $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$.
Par exemple $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x$ n'est pas mesurable de $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{P}(\mathbf{R}))$.

6. Convention. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une fonction. On dit que f est mesurable si f est mesurable par rapport aux $\sigma-$algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$.

7. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes:
i) f est mesurable.
ii) Pour tout $a \in \mathbf{R}$ on a $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{A}$.
iii) Pour tout $a \in \mathbf{R}$ on a $f^{-1}([-\infty, a[) \in \mathcal{A}$.
iv) Pour tout $a \in \mathbf{R}$ on a $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$.
v) Pour tout $a \in \mathbf{R}$ on a $f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathcal{A}$.
vi) $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(\infty) \in \mathcal{A}$ et pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ on a $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{A}$.
Démonstration.

8. Définition. $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = -\min(f, 0)$, $\sup f_n$, $\inf f_n$.

9. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ deux fonctions mesurables. Alors $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, f_+, f_- sont mesurables.
Démonstration.

10. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$ et $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ sont mesurables.
Démonstration.

11. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout $x \in X$. Alors f est mesurable.
Démonstration.

12. Théorème. Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont mesurables, alors $g \circ f$ est mesurable.
Démonstration.

13. Exercice. a) Soit $O \subset \mathbf{R}^2$ un ouvert. Montrer qu'il existe une suite de rectangles ouverts $(]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[)_{n\geq 1}$ telle que $O = \bigcup_{n\geq 1}]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$.

b*) On note $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ la $\sigma-$algèbre de parties de $\mathbf{R}^2$ engendrée par tous les ensembles de la forme $A \times B$, oò $A \in \mathcal{B}(R)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$.

c) Montrer que la fonction $q : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0, \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}$ est Borel mesurable.

14. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions mesurables. Alors $(f, g) : X \longrightarrow \mathbf{R}^2$ est mesurable par rapport à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$.
Démonstration.

15. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions mesurables. Alors $f + g$, $f - g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sont mesurables. Si $g \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est aussi mesurable.
La fonction $\sin(3f)\cos(5g)$ est également mesurable.
Démonstration.

Fonctions simples (étagées)

1. Définition. Soìt $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ est *simple* (ou *étagée*, ou *en escalier*) si f est mesurable et f prend un nombre fini de valeurs, c'est-à-dire $f(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, où $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

2. Remarque. La fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$, auquel cas $\mathbf{1}_A$ est simple.

3. Remarque. a) Soit f une fonction simple, $f(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $A_i = f^{-1}(a_i)$. Alors $(A_1, \ldots, A_n)$ est une partition mesurable de X et on peut écrire $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$.

b) Toute fonction de la forme $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, où $A_i \in \mathcal{A}$, est simple.

4. Proposition. Soient f, g deux fonctions simples. Alors $f + g$, fg, αf, f_+, f_-, $|f|$ sont simples.
Démonstration.

5. Théorème (de Borel) Soit $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction mesurable et positive. Alors il existe une suite croissante de fonctions simples $(s_n)_{n\geq 1}$ telle que $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout $x \in X$.
De plus, si f est bornée on peut choisir $(s_n)_{n\geq 1}$ telle que $s_n \longrightarrow f$ uniformément sur X.
Démonstration.

6. Corollaire. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ mesurable. Il existe une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples telle que $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout $x \in X$. De plus, si f est bornée, on peut choisir $(s_n)_{n\geq 1}$ telle que la convergence soit uniforme sur X.

Mesurabilité dans les espaces avec mesure complète

1. Définition. Propriété vraie presque partout (p.p. μ).

2. Exemples. $f \geq 0$ p.p. μ, $f = g$ p.p. μ, f continue p.p. μ, $f_n \longrightarrow f$ p.p. μ.

3. Théorème. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet. Soient $f : X \longrightarrow Y$ deux fonctions. Si f est mesurable et $f = g$ p.p. μ, alors g est mesurable.
Démonstration.

4. Exercice. (résolu) Montrer que l'énoncé du Théorème précédent est faux si X n'est pas complet.

5. Exercice. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet. Soit $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $f_n \longrightarrow f$ $\mu-$p.p. Montrer que f est mesurable.

6. Exercice. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet. On suppose que (X, d) est espace métrique et $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Soit $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue $\mu-$p.p. Montrer que f est $\mathcal{A}-$mesurable.

7. Convention. Dorénavant tous les espaces mesurés considérés seront complets (sauf mention explicite du contraire). Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas complet, on travaillera avec $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ à la place de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

2 L'intégrale de Lebesgue

L'intégrale des fonctions simples positives

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet.
Convention: $0 \cdot \infty = 0$.

1. Définition. Soit $s : X \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction simple *positive.* On écrit s sous la forme $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ où $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. L'intégrale de s par raport à μ est la quantité

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \in [0, \infty].$$

Dessin.

2. Proposition. La définition est correcte (ne dépend pas du choix des a_i et A_i).

3. Exemple. $\mathbf{1_Q}$.

4. Proposition. Propriétés de l'intégrale:

1. Additivité: $\int_X s + t \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu.$
2. Homogénéité: Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+$ on a $\int_X \alpha s \, d\mu = \alpha \int_X s \, d\mu.$
3. Monotonie: $s \leq t \Rightarrow \int_X s \, d\mu \leq \int_X t \, d\mu.$
4. $s = 0$ p.p. $\mu \Leftrightarrow \int_X s \, d\mu = 0.$

Démonstration.

5. Définition. $\int_E s \, d\mu = \int_X s \cdot \mathbf{1}_E \, d\mu.$

6. Proposition. L'intégrale a les propriétés suivantes:

1. $E, F \in \mathcal{A}$, $E \subset F \Rightarrow \displaystyle\int_E s\,d\mu \leq \int_F s\,d\mu$.

2. $\mu_s : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ définie par $\mu_s(A) = \displaystyle\int_A s\,d\mu$ est une mesure.

3. Pour toute fonction simple t on a $\displaystyle\int_X t\,d\mu_s = \int_X ts\,d\mu$.

Démonstration.

L'intégrale des fonctions mesurables positives

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet. Soit $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction mesurable.

1. Définition. On note $\mathcal{E}(f) = \{s : X \longrightarrow [0, \infty[\;\big|\; s \text{ est fonction simple et } s \leq f\}$. On définit

$$\int_X f\,d\mu = \sup_{s \in \mathcal{E}(f)} \int_X s\,d\mu \quad \text{et}$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_E\,d\mu.$$

2. Propriétés de l'intégrale des fonctions positives.

1. (monotonie) $f \leq g \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.
2. (homogénéité) Pour $\alpha \in [0, \infty[$ on a $\displaystyle\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu$.
3. $E \subset F \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_E f\,d\mu \leq \int_F f\,d\mu$.

Démonstration.

3. Théorème de convergence monotone. (Beppo Levi) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives telle que $f_n \leq f_{n+1}$ et $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ en tout point $x \in X$. Alors $\displaystyle\int_X f_n\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu$.

Démonstration.

4. Corollaire 1. f, g mesurables positives $\Rightarrow \displaystyle\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$.

Démonstration.

4. Corollaire 2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Démonstration.

4. Corollaire 3. Soit f une fonction mesurable positive. On définit $\mu_f : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ par $\mu_f(A) = \displaystyle\int_A f\,d\mu$. Alors μ_A est ume mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Démonstration.

5. Exercice. Soient f, g fonctions mesurables positives. Montrer que $\displaystyle\int_X g\,d\mu_f = \int_X fg\,d\mu$.

6. Proposition. Soit f fonction mesurable positive. Alors $f = 0$ p.p.$-\mu \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\int_X f\,d\mu = 0$.
Démonstration.

7. Remarque. Si $\mu(E) = 0$ alors pour toute fonction f mesurable positive on a $\displaystyle\int_E f\,d\mu = 0$.

8. Proposition. Soient f, g deux fonctions mesurables positives. Alors $f = g$ p.p.$-\mu$ $\Rightarrow \quad \int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.
Démonstration = exercice.

9. Lemme de Fatou. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Démonstration.

10. Exercice. Donner un exemple où l'inégalité du Lemme de Fatou est stricte.

L'intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

1. Définition. On dit qu'une fonction mesurable positive f est **intégrable** s.s.i. $\displaystyle\int_X f\,d\mu < \infty$.

2. Définition. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une fonction mesurable de signe quelconque. Alors f_+ et f_- sont fonctions mesurables positives. On dit que f est intégrable s.s.i. f_+ et f_- sont intégrables. Si tel est le cas on définit

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu.$$

Notation. $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \longrightarrow \overline{R} \mid f \text{ est intégrable}\}$.

3. Proposition. Soit f mesurable. Alors f est intégrable s.s.i. $|f|$ est intégrable.
Démonstration.

4. Remarque. La proposition précedente est fausse pour l'intégrale de Riemann (exemple).

5. Proposition. Soient f, g deux fonctions. Si f est intégrable et $f = g$ p.p.$-\mu$, alors g est intégrable et $\displaystyle\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.
Démonstration.

6. Proposition. Si f est intégrable, alors f est finie $\mu-$p.p.
Démonstration.

7. Remarque. Si f, g sont intégrables, on peut définir $f + g$ p.p.$-\mu$.

8. Proposition. Si f, g sont intégrables, alors $f + g$ est intégrable et

$$\int_X f + g\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Démonstration.

9. Proposition. Soit f une fonction intégrable. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction αf est intégrable et

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu.$$

Démonstration.
Corollaire. $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel.

10. Proposition. Soient f, g intégrables avec $f \leq g$. Alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.
Démonstration.

11. Théorème. (convergence monotone décroissante) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que

$$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f_1 \text{ est intégrable.}$$

Alors $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$.
Démonstration.

12. Remarque. Le résultat est faux sans l'hypothèse que f_1 est intégrable (exemple: $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,\infty[}$).

13. Théorème de convergence dominée. (H. Lebesgue) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose qu'il existe deux fonctions f et g telles que:

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour $\mu-$presque tout $x \in X$.
b) Pour chaque n on a $|f_n| \leq g$ p.p.$-\mu$.
c) La fonction g est intégrable.

Alors f_n et f sont intégrables et on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0.$$

Par conséquent on a $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.
Démonstration.

14. Corollaire. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < \infty$ (par exemple, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilité). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que:

a) $f_n \longrightarrow f$ p.p.$-\mu$.
b) Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout n on a $|f_n| \leq M$ p.p.$-\mu$.

Alors $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.
Démonstration.

15. Théorème. (séries de fonctions) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Alors pour $\mu-$presque tout $x \in X$ la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument.

On note $f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) & \text{si la série converge,} \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$ On a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Démonstration.

16. Définition. On dit que f est intégrable sur un ensemble $E \in \mathcal{A}$ s.s.i. $f \cdot \mathbf{1}_E$ est intégrable. Si tel est le cas on définit $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_E\,d\mu$.

17. Remarque. Si $\mu(E) = 0$, alors toute fonction f est intégrable sur E et $\displaystyle\int_E f\,d\mu = 0$.

18. Proposition. Si f est intégrable et $E \in \mathcal{A}$, alors f est intégrable sur E.
Démonstration.

19. Proposition. Soit f une fonction intégrable. Pour $E \in \mathcal{A}$ on définit $\mu_f(E) = \displaystyle\int_E f\,d\mu$.
Si $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ensembles mesurables *disjoints*, on a $\mu_f(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(E_n)$.
Autrement dit, μ_f est une mesure *réelle* (avec signe).
Démonstration = exercice.

20. Théorème. (continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue) Soit f une fonction intégrable. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Démonstration.

Continuité et dérivabilité des intégrales avec paramètre

1. Théorème. (continuité des intégrales avec paramètre)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec mesure complète. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : X \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que

i) Pour $\mu-$presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.

ii) Pour tout $t \in I$ la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{A}-$mesurable et il existe une fonction intégrable $g : X \longrightarrow [0, \infty]$ telle que

$$\forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leq g(x) \quad \text{pour } \mu - \text{presque tout } x \in X.$$

Alors pour tout $t \in I$ la fonction $f(\cdot, t)$ est $\mu-$intégrable et la fonction $F(t) = \displaystyle\int_X f(x,t)\,d\mu(x)$ est continue sur I.
Démonstration.

2. Théorème. (dérivabilité des intégrales avec paramètre)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec mesure complète. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Soit $f : X \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que:

i) Pour tout $t \in I$ la fonction $f(\cdot, t) : X \longrightarrow \mathbf{R}$ est mesurable.

ii) Il existe $t_0 \in I$ tel que $f(\cdot, t_0) : X \longrightarrow \mathbf{R}$ est intégrable.

iii) Il existe un ensemble $Y \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(X \setminus Y) = 0$ et pour tout $x \in Y$, la fonction $f(x, \cdot)$ est dérivable sur I.

iv) Il existe une fonction positive et intégrable $h : X \longrightarrow [0, \infty]$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \forall x \in Y, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq h(x).$$

Alors pour tout $t \in I$ la fonction la fonction $f(\cdot, t) : X \longrightarrow \mathbf{R}$ est intégrable. De plus, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_X f(x,t)\,d\mu(x)$ est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x).$$

Démonstration.

Lien entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue

1. Rappels. Subdivision d'un intervalle $[a,b]$: $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Norme: $\|\Delta\| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$.
Système de points intermédiaires associé à la subdivision Δ: $\xi = \{\xi_1, \dots \xi_n\}$ où $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Somme de Riemann: $S(f,\Delta,\xi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$.

Somme de Darboux inférieure: $s_f(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i$ où $m_i = \displaystyle\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

Somme de Darboux supérieure: $S_f(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i$ où $M_i = \displaystyle\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

2. Définition. Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$ s'il existe $I \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision Δ de $[a,b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout système de points intermédiaires ξ associé à Δ on a $|S(f,\Delta,\xi) - I| < \varepsilon$.
Notation: $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Proposition. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est Riemann intégrable, alors f est bornée.

4. Théorème. (Darboux)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes.
i) f est Riemann-intégrable.
ii) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta$ subdivision telle que $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$.
iii) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\Delta$ subdivision avec $\|\Delta\| < \delta$ on a $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$.

5. Théorème. (Lebesgue) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On note

$$D(f) = \{x \in [a,b] \mid f \text{ est discontinue en } x\}.$$

Alors:
a) La fonction f est Riemann intégrable si et seulement si f est bornée et $m(D(f)) = 0$.
b) Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ alors f est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,dm.$$

Résultat admis.

6. Théorème. (Lebesgue) Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert borné. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On note

$$D(f) = \{x \in \Omega \mid f \text{ est discontinue en } x\}.$$

Alors:
a) La fonction f est Riemann intégrable si et seulement si f est bornée et $m(D(f)) = 0$.
b) Si f est Riemann intégrable sur Ω alors f est Lebesgue intégrable sur Ω et

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega f\,dm.$$

Résultat admis.

7. Théorème. (intégrales généralisées des fonctions positives)
Soit $f : [a,b[\longrightarrow [0,\infty[$ une fonction Riemann intégrable sur tout intervalle $[a,c]$ avec $c < b$. Alors f est Riemann intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si f est Lebesgue intégrable sur $[a,b[$. Si tel est le cas on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b[} f\,dm$.
Démonstration.

8. Théorème. (intégrales généralisées - fonctions de signe quelconque)
Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction Riemann intégrable sur tout intervalle $[a,c]$ avec $c < b$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est *absolument* convergente. De plus, si tel est le cas on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b[} f\,dm$.
Démonstration: appliquer lr théorème précédent à $|f|$.

9. Remarque. La théorie de Leesgue ne s'applique pas aux intégrales de Riemann généralisées semi-convergentes.

10. Exemple. $\dfrac{\sin x}{x}$ est Riemann intégrable sur $[0,\infty[$, mais pas Lebesgue intégrable!

3 Intégration sur les espaces produit

Référence: W. Rudin, *Real and complex analysis,* McGraw-Hill, 1966 (Chapter 7).
Il existe une traduction en Français.

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés.

1. Définition. Un rectangle mesurable est un ensemble de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

2. Définition. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la $\sigma-$algèbre de $X \times Y$ engendrée par tous les rectangles mesurables:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\left(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}\right).$$

Soit $C \subset X \times Y$. Pour tout $x \in X$ on note $C_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$ et pour tout $y \in Y$ on note $C^y = \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$. (Donc $C_x \subset Y$ et $C^y \subset X$!)

3. Proposition. Soit $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Alors pour tout $x \in X$ on a $C_x \in \mathcal{B}$ et pour tout $y \in Y$ on a $C^y \in \mathcal{A}$.

Démonstration.

4. Proposition. Soit $(Z, \mathcal{C})$ un espace mesurable. Soit $f : X \times Y \longrightarrow Z$ une fonction. Pour $x \in X$ et $y \in Y$ on note respectivement $f_x = f(x, \cdot) : y \longrightarrow Z$ et $f^y = f(\cdot, y) : X \longrightarrow Z$ les foncrions partielles.

On suppose que $f : X \times Y \longrightarrow Z$ est mesurable par rapport aux $\sigma-$algèbres $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors:

$$\begin{array}{l} \forall x \in X, \text{ la fonction } f_x \text{ est } (\mathcal{B}, \mathcal{C}) - \text{mesurable, et} \\ \forall y \in Y, \text{ la fonction } f^y \text{ est } (\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \text{mesurable.} \end{array}$$

5. Théorème et définition. (Mesure produit) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés avec mesures $\sigma-$**finies**. Pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ on pose

$$\varphi_C(x) = \nu(C_x) \qquad \text{et} \qquad \psi_C(y) = \mu(C^y).$$

Alors φ_C est $\mathcal{A}-$mesurable, ψ_C est $\mathcal{B}-$mesurable et

$$\int_X \varphi_C \, d\mu = \int_Y \psi_C \, d\nu.$$

On définit $\mu \times \nu(C) = \displaystyle\int_X \varphi_C \, d\mu = \int_Y \psi_C \, d\nu$.
Alors $\mu \times \nu$ est une mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, qu'on appelle produit des mesures μ et ν.

Résultat admis. Vérification dans le cas où C est un rectangle mesurable.

6. Théorème. (Fubini pour les fonctions positives) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés avec mesures $\sigma-$**finies**. Soit $f : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}-$mesurale et positive. Pour $x \in X$ et $y \in Y$ on définit respectivement

$$\Phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu \qquad \text{et} \qquad \Psi(y) = \int_X f^y \, d\mu.$$

Alors Φ est $\mathcal{A}-$mesurable, Ψ est $\mathcal{B}-$mesurable et

$$\int_X \Phi \, d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \Phi \, d\nu.$$

Fin du cours du 14/11/2018