Université Paul Sabatier — 2016-2017 / semestre 2
Licence L3 Enseignement — TD Ordinateurs

Geogebra, TDO 9

Analyse 2, étude de suites

Exercice 1 : Suites $u_n = f(n)$

1. Créez un fichier `ex1-suites.ggb` dans lequel vous entrez la fonction $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, un entier nommé `départ` et un curseur entier `n` qui varie de `départ` à une valeur entière supérieure que vous décidez. Ensuite, tracez tous les points $(k, f(k))$ pour k qui varie de `départ` à n.

   Mettre en légende un texte qui explique quels sont les points qui s'affichent.

2. Crér un outil `TraceSuite.ggt` qui demande une fonction f, un nombre *depart*, un nombre n et qui renvoie le tracé des points $(k, f(k))$ pour k allant de *depart* à n ainsi que la légende associée.

   Testez cet outil avec les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 2 : Suites récurrentes simples $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Pour tout $u_1 \in \mathbf{R}$, soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 1$. Créez un outil `SuiteRecurrenteSimple.ggt` dans lequel vous entrez une fonction f, un point $A = (k, u_k)$ et qui retourne le point $(k+1, u_{k+1})$.

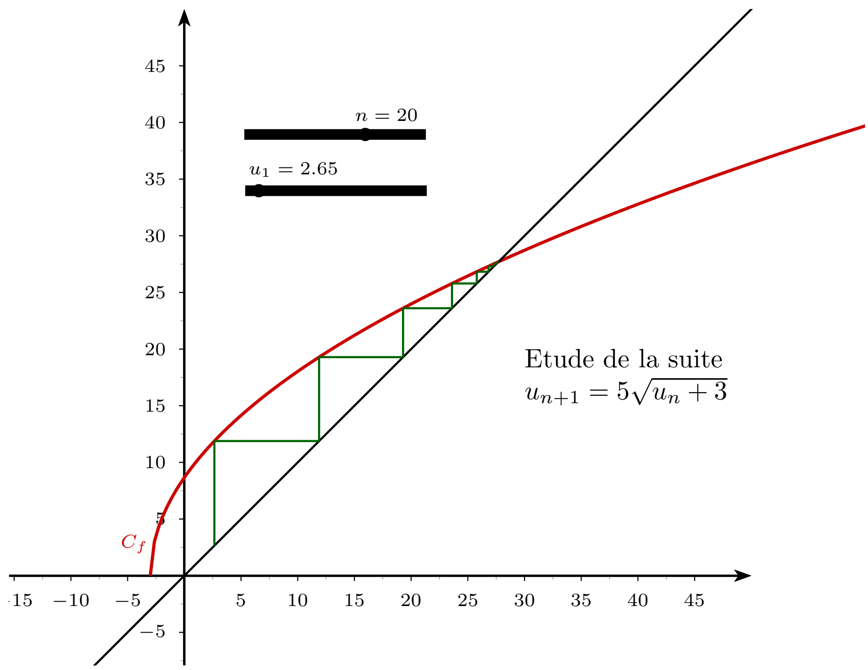
2. Dans un fichier `ex2_suites-recurrentes-1.ggb`, testez cet outil avec $f(x) = 5\sqrt{x+3}$ et $u_1 = 0$ puis avec $u_1 = 40$. On tracera dans chaque cas au moins 12 itérations. On mettra une légende qui explique quels sont les points tracés.

3. Dans un fichier `ex2_suites-recurrentes-1.ggb`, créez des curseurs pour l'entier n et pour la valeur initiale u_1. Toujours avec $f(x) = 5\sqrt{x+3}$ et $u_1 = 0$, utiliser la commande `ItérationListe[f,u_1,n]` pour obtenir la suite (que l'on nommera `suite`) des n premiers termes de $(u_n)_{n\geq 1}$ et dessinez la suite des points (k, u_k) ainsi obtenus avec la commande `Séquence[(k,Elément[suite,k]),k,1,n]`.

   Faire varier u_1 pour observer le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3 : Escaliers et colimaçons

1. a) Dans un fichier `ex3_fonction-f.ggb`, dessiner les escaliers obtenus lorsqu'on étudie $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 5\sqrt{x+3}$; par exemple, pour $u_1 = 2.65$, on obtient :



Quel est le point d'intersection du graphe de f et de la bissectrice $y = x$? On fera varier la valeur d'initialisation u_1 de -10 à 60 pour observer la variation (ou pas) de comportement de la suite.

b) Dans un fichier `ex3_fonction-g.ggb`, dessiner les escaliers obtenus lorsqu'on étudie $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{4}$ en faisant varier u_1 de -5 à 5. Pour quelles valeurs de u_1 la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ semble-t-elle convergente ? Quelles sont les limites possibles pour la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

2. a) Dans un fichier `ex3_fonction-h.ggb`, dessiner les colimaçons (ou escargots) obtenus lorsqu'on étudie $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = h_1(u_n)$ avec $h_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ semble-t-elle convergente ?

b) Remplacer h_1 par $h_2(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$. La situation est-elle qualitativement la même ?

c) Remplacer h_2 par $h_3(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$. La situation est-elle qualitativement la même ? Que semble-t-il se passer ?

Exercice 4 : Ni escaliers, ni colimaçons...

1. Dans un fichier `ex4_fonction-f.ggb`, étudier $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-1}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ semble-t-elle convergente ? Que se passe-t-il ?
2. Dans un fichier `ex4_fonction-g.ggb`, étudier $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = \dfrac{x-1}{1-x}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ semble-t-elle convergente ? Que se passe-t-il ?
3. Dans un fichier `ex4_fonction-h.ggb`, étudier $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h(x) = \dfrac{3x+3}{3-x}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ semble-t-elle convergente ? Que se passe-t-il ?

Exercice 5 : Suite logistique

On prend à présent $f(x) = a(x - x^2)$, a étant un paramètre réel qui varie dans $[0, 4]$. Dans un fichier `ex5_fonction-logistique.ggb`, étudier $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Il y aura un curseur pour $a \in [0, 4]$, un curseur pour $u_1 \in [0, 1]$ et un curseur pour n le nombre de termes de la suite calculés (prendre 300 comme valeur maximale).

Lorque a passe de 0 à 4, quelles évolutions constate-t-on ? Explications ? (question <u>très</u> difficile si on veut y répondre avec précision...!)