Le théorème de la progression arithmétique

Serres Jordan

16 mai 2017

Table des matières

Première partie
Introduction

Vers 300 av. J.-C, Euclide démontra que "les nombres premiers sont plus nombreux que n'importe quelle multitude de nombres premiers proposée" par la méthode aujourd'hui célèbre consistant à considérer tous les nombres premiers inférieurs à N, et à voir que nécessairement $N!+1$ admet un diviseur premier supérieur à N. En effet, d'une part $N!+1$ admet au moins un diviseur premier et d'autre part si p était un nombre premier inférieur à N divisant $N!+1$ alors il diviserait aussi $N!$ et donc diviserait $1 = N!+1-N!$ ce qui constituerait une contradiction.

Une fois ceci établi, c'est-à-dire l'infinité de nombre premiers dans la progression arithmétique $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$, il est naturel de se demander si ceci est aussi le cas pour n'importe quelle progression arithmétique $(a+nb)_{n\in\mathbb{N}}$. Or il est bien évident que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors leur pgcd divise tous les termes de la progression et la réponse est alors trivialement négative. La question demeure donc dans le cas où a et b sont premiers entre eux. Il s'agit du théorème suivant.

Théorème 0.1. *Théorème de la progression arithmétique (**Dirichlet 1837**)*
Si a et b sont des entiers premiers entre eux alors il existe une infinité de nombres premiers $p \equiv a[b]$.

Certains cas se traitent bien d'une façon similaire à celle utilisée par Euclide. Par exemple le cas $a = 3$ et $b = 4$. En effet, par l'absurde si $p_1, ..., p_n$ sont tous les nombres premiers congrus à 3 modulo 4, alors on considère le nombre $n = 3p_1 \cdots p_n - 1$. Il est clair, d'une part que $n \equiv 3[4]$, d'autre part que n admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4. En effet, tous les nombres premiers > 2 sont congrus soit à 1 soit à 3 modulo 4 car les nombres congrus à 0 ou 2 sont pairs. Donc si n n'admettait pas de facteur premier congru à 3 modulo 4, alors tous ses facteurs seraient congrus à 1 puisque n est impair. Donc n serait aussi congru à 1, ce qui est faux. Soit donc q un facteur premier de n congru à 3 modulo 4. Si q était l'un des p_i alors q diviserait 1, ce qui constituerait une contradiction. D'où le résultat.

Cependant, il n'y a pas de preuve de ce type qui marche dans tous les cas : c'est le théorème de Schur et Murty (en 1912 et 1988, Cf. référence 3), dont la preuve dépasse le cadre de ce projet.

En 1737 [1], Euler mit au point une nouvelle méthode. Armé des outils de l'analyse de son époque, plutôt que de procéder par l'absurde pour montrer qu'un ensemble $A \subset \mathbb{N}$ est infini, il décide de montrer qu'une certaine série indexée par les éléments de A est divergente, ce qui prouve bien le caractère infini de A car si A était fini alors la série serait une somme au vrai sens du terme et donc trivialement convergente. Il montre qu'il y a une infinité de nombres premiers par la formule suivante :

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{p^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

où la dernière égalité résulte directement du théorème de factorisation unique (à l'ordre près) des entiers en nombres premiers. La dernière série étant la série harmonique qui diverge, le produit diverge, et donc l'ensemble d'indexation $\mathbb{P}$ est infini. Cette méthode a de plus l'avantage de fournir des informations plus fines sur l'ensemble prouvé être infini que la méthode d'Euclide. Par exemple, on peut montrer que la série $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverge alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

1. Cf. référence 6

Il y a donc infiniment plus de nombres premiers que de nombres carrés. Il s'agit de résultats de densités.

En 1837 [2], Dirichlet parvint à démontrer le théorème de la progression arithmétique à l'aide de cette méthode analytique, et de l'analyse complexe développée à son époque. C'est cette preuve, adaptée d'une façon plus moderne, que nous proposons ici.

Remarque 0.1. *Dans tout ce document les sommes indexées par $p \in \mathbb{P}$ seront conventionnellement notées $\sum_p$.*

Deuxième partie
Outils techniques

1 Les caractères

1.1 Les caractères d'un groupe abélien fini

Définition 1.1. *Soit G un groupe abélien fini. On appelle caractère de G tout morphisme de groupes $\chi : G \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G, et on le nomme le groupe dual de G.*

Remarque 1.1. *On voit immédiatement que $\widehat{G}$ est un groupe abélien pour la multiplication des applications (ie : $\chi_1 \cdot \chi_2 : n \mapsto \chi_1(n)\chi_2(n)$).*
On note χ_0 le caractère trivial constant égal à 1.

Lemme 1.1. *On a $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'application

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} &\to \mathbb{U}_n \\ \chi &\mapsto \chi(\bar{1}) \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que c'est un isomorphisme. □

Lemme 1.2. *Soit G un groupe abélien fini. Soit h un sous-groupe de G. Soit $\chi : H \to \mathbb{C}^*$ un caractère de H. Il existe $\chi' \in \widehat{G}$ tel que $\chi'|_H = \chi$.*

Démonstration. Par *récurrence forte* sur l'indice de H dans G. (Donc il n'y a pas besoin d'initialisation).
Soit $x \in G \setminus H$ (si $G = H$ c'est immédiat). Il est clair que $\{m > 0 | x^m \in H\} \neq \emptyset$ car il y a par exemple l'ordre de H. Soit donc n le plus petit élément de cet ensemble. On pose $t := \chi(x^n)$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$ tel que $w^n = t$. Soit $H' :=< H, x >= \{hx^k \quad | h \in H, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. On définit

$$\begin{aligned} \chi' : H' &\to \mathbb{C}^* \\ hx^k &\mapsto \chi(h)w^k \end{aligned}$$

2. Cf. référence 6

χ' est bien définie. En effet, soient $h_1,\ h_2 \in H$ et $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $h_1 x^{k_1} = h_2 x^{k_2}$. On a alors $x^{k_2-k_1} = h_1 h_2^{-1} \in H$ donc en faisant la division euclidienne de $k_2 - k_1$ par n, il vient $k_2 - k_1 = nq + r$ avec $0 \leq r < n$. Or $x^{k_2-k_1} = (x^n)^q \cdot x^r \in H$ donc $x^r \in H$ donc $r = 0$ par définition de n. D'où $k_2 - k_1 = nq$, d'où $\chi(h_1 h_2^{-1}) = \chi(x^{nq}) = \chi(x^n)^q$ car $x^n \in H$ donc $\chi(h_1 h_2^{-1}) = t^q = w^{nq} = w^{k_2-k_1}$. Donc χ' est bien définie. Mais il est clair que χ' est un morphisme, que $\chi'|_H = \chi$, et que l'indice de H' dans G est strictement inférieur à celui de H. On peut donc conclure par l'hypothèse de récurrence forte. $\square$

Lemme 1.3. *Soit G un groupe abélien fini. Soit H un sous-groupe de G.*
Soit $A := \{\chi \in \widehat{G} |\quad \forall x \in H, \quad \chi(x) = 1\}$. Alors $A \simeq \widehat{G/H}$.

Démonstration. Soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. On considère

$$\begin{aligned} \phi : \widehat{G/H} &\to A \\ \chi &\mapsto \chi \circ \pi \end{aligned}$$

Il est clair que ϕ est un morphisme de groupes, et qu'elle est injective. Elle est surjective par le lemme de prolongement 1.2. $\square$

Lemme 1.4. *Soit G un groupe abélien fini. Soit H un sous-groupe de G. Alors*

$$card(\widehat{G}) = card\left(\widehat{G/H}\right) \cdot card(\widehat{H})$$

Démonstration. On considère

$$\begin{aligned} \rho : \widehat{G} &\to \widehat{H} \\ \chi &\mapsto \chi_{|H} \end{aligned}$$

Vu le lemme précédent, c'est un morphisme de groupes de noyau $\widehat{G/H}$.
Vu le lemme 1.2, ρ est surjectif. D'où le résultat par la formule de combinatoire classique : $card(\widehat{G}) = card(\ker(\rho)) \cdot card(\rho(\widehat{G}))$. $\square$

Proposition 1.1. *Soit G un groupe abélien fini. Alors $card(\widehat{G}) = card(G)$.*

Démonstration. Par récurrence forte sur le cardinal de G. Si G n'admet pas de sous-groupe non trivial, alors il est clair que G est monogène, et on conclut par le lemme 1.1. Sinon, soit $1 < H < G$. Alors $card(H) < card(G)$ et $card(\widehat{G/H}) < card(G)$. D'où le résultat par le lemme précédent et l'hypothèse de récurrence forte. $\square$

Proposition 1.2. *Soit G un groupe abélien fini. Alors $\widehat{\widehat{G}} \simeq G$.*

Démonstration. On considère

$$\begin{aligned} \varepsilon : G &\to \widehat{\widehat{G}} \\ x &\mapsto (\chi \mapsto \chi(x)) \end{aligned}$$

ε est bien définie, et c'est un morphisme de groupe. De plus, ε est injectif, en effet si $x \in G, \quad x \neq 1$ alors l'application $\alpha :< x > \to \mathbb{C}^*$ qui envoie x sur $\exp(\frac{2i\pi}{ordre(x)})$ est un morphisme de groupes non trivial qui se prolonge à G d'après le lemme 1.2. D'où l'injectivité. La surjectivité découle d'argument sur les cardinaux d'après le lemme 1.4. $\square$

Proposition 1.3. *Soit G un groupe abélien fini. Soit $n = card(G)$. Alors pour tout caractère $\chi \in \widehat{G}$, on a :*

$$\sum_{x\in G} \chi(x) = \begin{cases} n & si \quad \chi = \chi_0 \\ 0 & si \quad \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

Démonstration. Le cas $\chi = \chi_0$ est clair. Si $\chi \neq \chi_0$, soit alors $y \in G$ tel que $\chi(y) \neq 1$. Alors

$$\chi(y) \sum_{x\in G} \chi(x) = \sum_{x\in G} \chi(yx) = \sum_{x\in G} \chi(x)$$

car $x \mapsto yx$ est une bijection de G dans lui-même. D'où

$$(\chi(y) - 1) \sum_{x\in G} \chi(x) = 0.$$

Et on conclut avec le fait que $\chi(y) \neq 1$. □

Proposition 1.4. *Soit G un groupe abélien fini. Soit $n = card(G)$. Alors pour tout $x \in G$, on a :*

$$\sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} n & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x \neq 1 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $x \in G$. Soit

$$\begin{aligned} \xi : \widehat{G} &\to \mathbb{C}^* \\ \chi &\mapsto \chi(x) \end{aligned}$$

Alors $\xi \in \widehat{\widehat{G}}$, et d'après la proposition 1.3 :

$$\sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(x) = \sum_{\chi\in \widehat{G}} \xi(\chi) = \begin{cases} n & si \quad \xi \equiv 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On conclut par le fait que $\xi \equiv 1$ ssi $x = 1$. En effet, si $x = 1$ alors il est bien clair que $\xi \equiv 1$, et réciproquement, si $x \neq 1$ alors le lemme 1.2 permet de construire un $\chi \in \widehat{G}$ (en prolongeant l'isomorphisme entre $< x >$ et $\mathbb{U}_{ordre(x)}$) tel que $\chi(x) \neq 1$ ie : tel que $\chi \neq \chi_0$, et donc $\xi \neq 1$. □

1.2 Les caractères de Dirichlet

Définition 1.2. *Si $b > 1$ est un entier, on appelle groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, et on le note $\left(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\right)^\times$, l'ensemble des classes inversibles modulo b muni de la multiplication. Il s'agit bien d'un groupe abélien fini.*
On appelle caractère de Dirichlet modulo b les caractères des groupes multiplicatifs $\left(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\right)^\times$ pour $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Remarque 1.2. *Si $\chi : \left(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\right)^\times \to \mathbb{C}^*$ est un caractère de Dirichlet modulo b alors on le prolonge à $\mathbb{Z}$ entier en posant*

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(n \quad modulo \quad b) & si \quad n \wedge b = 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On vérifie alors que χ est complètement multiplicative, ie : que $\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad \chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$. En effet, si $n \wedge b > 1$ ou si $m \wedge b > 1$ alors $nm \wedge b > 1$ et donc $\chi(nm) = 0 = \chi(n)\chi(m)$; et si $n \wedge b = 1$ et $m \wedge b = 1$ alors :

$$\chi(nm) = \chi(\overline{nm}) = \chi(\bar{n}\bar{m}) = \chi(\bar{n})\chi(\bar{m})$$

car χ est un morphisme de $\left(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\right)^{\times}$.

Dans la suite, sauf confusion possible, on ne distinguera plus la notion de caractère de Dirichlet en tant que telle avec son prolongement à $\mathbb{Z}$.

2 Une formule sur les racines n-ièmes de l'unité

Soit μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité, fixé pour toute la suite.

Lemme 2.1. *On a :*

$$\prod_{w \in \mu_n} (X - w) = X^n - 1.$$

Démonstration. Ces deux polynômes ont même degré et les mêmes n racines. □

Lemme 2.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \mu_n &\to \mu_n \\ w &\mapsto w^{-1} \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. Ceci est vrai dans n'importe quel groupe et résulte immédiatement des axiomes de groupe. □

Proposition 2.1. *On a :*

$$\prod_{w \in \mu_n} (1 - wX) = 1 - X^n.$$

Démonstration. On a :

$$\prod_{w \in \mu_n} (1 - wX) = \prod_{w \in \mu_n} \left((-w)(X - w^{-1})\right) = \prod_{w \in \mu_n} (-w) \prod_{w \in \mu_n} (X - w^{-1})$$

D'après le lemme 2.2 :

$$= \prod_{w \in \mu_n} (-w) \cdot \prod_{w \in \mu_n} (X - w)$$

D'après le lemme 2.1, en prenant $X = 0$:

$$= - \prod_{w \in \mu_n} (X - w)$$

Et enfin, encore d'après le lemme 2.1 :

$$= -(X^n - 1) = 1 - X^n.$$

Ce qui est le résultat voulu. □

3 Transformée de Mellin

Rappel 3.1. *La fonction Γ d'Euler*[3] *est la fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$*

$$\Gamma(z) = \left(ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{+\infty} ((1 + \frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}) \right)^{-1}$$

où γ est la constante d'Euler.
Sur $\Re(s) > 0$, on a aussi $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$
La fonction Γ ne s'annule pas sur son domaine d'holomorphie.
De plus, la fonction Γ vérifie l'identité $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Définition 3.1. *Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est continue on définit*

$$s \mapsto \mathcal{M}el(f, s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt$$

appelée la transformée de Mellin de f.

Définition 3.2. *$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide à l'infini si $\forall N \in \mathbb{N}, \quad t^N f(t)$ est bornée en $+\infty$.*

Théorème 3.1. *Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est C^∞ et à décroissance rapide en l'infini ainsi que toute ses dérivées alors :*

(i) La fonction $M(f, s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt$ définie pour tout $\Re(s) > 0$, admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ (Cf. Colmez référence 2).

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad M(f, -k) = (-1)^k f^{(k)}(0)$.

Démonstration. (i) Par décroissance rapide de f en l'infini, si t est assez grand, alors $|f(t) t^2 t^{x-1}| \leq 1$. Donc si $x > \Re(s) > y > 0$ alors pour $t > 1$ on a :

$$|f(t) t^{s-1}| \leq |f(t) t^{x-1}| \leq \frac{1}{t^2}$$

D'où l'intégrabilité en $+\infty$.De même, si $0 < t < 1$, alors on a : $|f(t) t^{s-1}| \leq |f(t) t^{y-1}|$ d' où l'intégrabilité en 0 car $y > 0$. Donc $|f(t) t^{s-1}|$ est dominée sur la bande $x < \Re(s) < y < 0$ par $|f(t) \max(t^{x-1}, t^{y-1})|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Or, $\forall t > 0, s \mapsto f(t) t^{s-1}$ est holomorphe sur $\Re(s) > 0$, donc par théorème classique, puisque Γ est holomorphe sur $\Re(s) > 0$ et ne s'annule pas, alors $s \mapsto M(f, s)$ l'est également.

Pour ce qui est du prolongement, on remarque, par une intégration par partie, que :

$$\forall \Re(s) > 0, \qquad \Gamma(s) M(f, s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} f(t) (\frac{t^s}{s})' dt$$

$$= \left[f(t) \frac{t^s}{s} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} f'(t) t^s dt$$

D'où, puisque $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$,il vient : $\forall \Re(s) > 0, \quad M(f, s) = -M(f', s+1)$. Par récurrence immédiate, $\forall \Re(s) > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad M(f, s) = (-1)^k M(f^{(k)}, s+k)$, ce qui a bien du sens car par hypothèse, toutes les dérivées de f sont à décroissance rapide. En appliquant le raisonnement précédent à $f^{(k)}$ on trouve que $s \mapsto M(f^{(k)}, s+k)$ est holomorphe sur $\Re(s) > -k$ et coïncide sur $\Re(s) > 0$ avec $M(f, s)$. Donc pour tout k, $M(f, s)$ se prolonge à $\Re(s) > -k$. D'où un prolongement à $\mathbb{C}$ tout entier.

3. Cf. Colmez, référence 2

(ii) En notant (abusivement) encore $M(f,s)$ le prolongement de $M(f,s)$, il vient, d'après les formules précédentes :

$$M(f,-k) = (-1)^{k+1}M(f^{(k+1)},1) = (-1)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} f^{(k+1)}(t)dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

par décroissance rapide de $f^{(k)}$ en l'infini.

□

4 Séries de Dirichlet

4.1 Définition

Définition 4.1. *Une série de Dirichlet est une série de la forme* $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ *avec* $a=(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $s\in\mathbb{C}$*. On note une telle série* $L(a,s)$*.*

Remarque 4.1. *Ceci est défini indépendamment des problèmes de convergence d'une telle série.*

4.2 Abscisses de convergences

Définition 4.2. *Si* $L(a,s)$ *avec* $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $s\in\mathbb{C}$ *est une série de Dirichlet, on définit :*

(i) $\sigma_{conv} = \inf\{\Re(s)|L(a,s)\text{converge }\}$ *l'abscisse de convergence.*

(ii) $\sigma_{abs} = \inf\{\Re(s)|L(a,s)\text{ converge absolument}\}$ *l'abscisse de convergence absolue.*

(iii) $\sigma_{hol} = \inf\{\sigma\in\mathbb{R}|L(a,s)\text{ admet un prolongement holomorphe sur }\Re(s)>\sigma\ \}$ *l'abscisse de prolongement holomorphe.*

Proposition 4.1. *(i) Si* $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ *converge pour* s_0 *alors elle converge normalement sur le demi-plan* $\Re(s)>\Re(s_0)+1+\delta$ *quel que soit* $\delta>0$*, donc est holomorphe sur* $\Re(s)>\Re(s_0)+1$*.*

(ii) Si $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ *converge absolument pour* s_0 *alors elle converge normalement sur* $\Re(s-s_0)\geq 0$*, donc est holomorphe sur* $\Re(s-s_0)>0$ *et continûment prolongeable sur* $\Re(s-s_0)\geq 0$*.*

Démonstration. (i) Par convergence en s_0 on a que $a_n = o(n^{\Re(s_0)})$ donc il existe n_0 tel que $\forall n\geq n_0$ on ait : $|a_n|\leq n^{\Re(s_0)}$. Si alors $\Re(s)>\Re(s_0)+1+\delta$ alors on a : $|a_n n^{-s}|\leq n^{\Re(s_0)-\Re(s)}\leq n^{-(1+\delta)}$ d'où la convergence normale par critère de Riemann. L'holomorphie résulte de théorèmes classiques d'analyse complexe et du fait que pour tout $n\geq 1$, $s\mapsto a_n n^{-s}$ est holomorphe.

(ii) Si $\Re(s-s_0)\geq 0$ alors : $|a_n n^{-s}| = |a_n|n^{-\Re(s)}\leq |a_n|n^{-\Re(s_0)} = |a_n n^{-s_0}|$ d'où la convergence normale. Le reste découle aussi de théorèmes classiques.

□

Corollaire 4.1. $L(a,s)$ *converge uniformément sur les compacts du demi-plan* $\Re(s)>\sigma_{abs}$ *et est holomorphe sur ce demi-plan.*

Démonstration. Par la proposition précédente, et par définition de σ_{abs} on a :
$\forall\Re(s_0)>\sigma_{abs},\quad L(a,s)$ converge normalement sur le demi-plan $\Re(s)>\Re(s_0)$ et est holomorphe sur ce demi-plan. D'où le résultat. □

4.3 Le théorème de Landau

Commençons par énoncer un lemme.

Lemme 4.1. *Si $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ alors $D(\sigma+\varepsilon, 3\varepsilon) \subset D(\sigma, 3\varepsilon) \cup \{s \in \mathbb{C} | \quad \Re(s) > \sigma\}$. En notant $D(z,r)$ le disque dans $\mathbb{C}$ de centre z et de rayon r.*

Démonstration. Soit $z \in D(\sigma+\varepsilon, 3\varepsilon) \setminus D(\sigma, 3\varepsilon)$. Montrons que $\Re(s) > \sigma$. On a donc

$$\begin{cases} |z-\sigma-\varepsilon| < 3\varepsilon \\ |z-\sigma| \geq 3\varepsilon \end{cases}$$

Soit, en notant $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, et puisque $\sigma, \varepsilon \in \mathbb{R}$, il vient :

$$\begin{cases} ((x-\sigma)-\varepsilon)^2 + y^2 < 9\varepsilon^2 \\ (x-\sigma)^2 + y^2 \geq 9\varepsilon^2 \end{cases}$$

Donc en combinant les deux inéquations : $((x-\sigma)-\varepsilon)^2 + y^2 < (x-\sigma)^2 + y^2$
D'où en développant et simplifiant : $x > \sigma + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui termine la preuve du lemme. □

Théorème 4.1. *Théorème de Landau*
Si $L(a,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \mathbb{R}_+$, et si $\sigma_{abs} \neq +\infty$ alors σ_{abs} n'a aucun voisinage dans $\mathbb{C}$ sur lequel $L(a,s)$ admette un prolongement analytique.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\exists \varepsilon > 0$ tel que $L(a,s)$ admette un prolongement analytique sur $D(\sigma_{abs}, 3\varepsilon)$. Soit alors f le prolongement analytique de $L(a,s)$ sur $\Omega := D(\sigma_{abs}, 3\varepsilon) \cup \{\Re(s) > \sigma_{abs}\}$. D'après le lemme 4.1 on a $D(\sigma_{conv}+\varepsilon, 3\varepsilon) \subset \Omega$ donc, par théorème classique d'analyse complexe, f est la somme de sa série de Taylor en $\sigma+\varepsilon$ sur le disque $D(\sigma_{abs}+\varepsilon, 3\varepsilon)$ et

$$f(\sigma_{abs}-\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a, \sigma_{abs}+\varepsilon)}{k!}(-2\varepsilon)^k$$

De plus, $\sigma_{abs}+\varepsilon > \sigma_{abs}$ donc par le corollaire 4.1 et par théorème classique d'analyse complexe, on peut dériver la série $L(a,s)$ terme à terme. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(\sigma_{abs}-\varepsilon) = L^{(k)}(a, \sigma_{abs}+\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(-\ln(n))^k}{n^{\sigma_{abs}+\varepsilon}}$$

D'où :

$$f(\sigma_{abs}+\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(-\ln(n))^k}{n^{\sigma_{abs}+\varepsilon}} \right) (\frac{(-2\varepsilon)^k}{k!}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(2\varepsilon\ln(n))^k}{k! n^{\sigma_{abs}+\varepsilon}}$$

Or il résulte des hypothèses et du fait que $\sigma_{abs} \in \mathbb{R}$, que $\frac{a_n(2\varepsilon\ln(n))^k}{k! n^{\sigma_{abs}+\varepsilon}}$ est toujours un réel positif. D'où, par Fubini-Tonelli,

$$f(\sigma_{abs}-\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_{abs}+\varepsilon}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\varepsilon\ln(n))^k}{k!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_{abs}+\varepsilon}} \left(n^{2\varepsilon}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_{abs}-\varepsilon}}$$

Et puisque $\frac{a_n}{n^{\sigma_{abs}-\varepsilon}} > 0$, on en déduit que $L(a,s)$ converge absolument pour $s = \sigma_{abs}-\varepsilon$ ce qui constitue une contradiction à la définition de σ_{abs}. □

Corollaire 4.2. *Si $L(a,s)$ est une série de Dirichlet à coefficients positifs alors $\sigma_{hol} = \sigma_{abs}$.*

Démonstration. Il est clair, d'après le corollaire 4.1, que $\sigma_{hol} \leq \sigma_{abs}$.
De plus, si $\sigma_{hol} < r < \sigma_{abs}$ alors $L(a,s)$ admettrait un prolongement holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > r$ qui est un voisinage de σ_{abs}, contredisant le théorème de Landau 4.1. □

4.4 Forme intégrale

Théorème 4.2. *Si $L(a,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge quelque part alors*

(i) la série entière $F_a(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ est de rayon au moins 1.

(ii) $f_a(t) := F_a(e^{-nt})$ est $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées.

Démonstration. (i) Par hypothèse, $\exists s \in \mathbb{C}$ tel que $\sum \frac{a_n}{n^s}$ converge. Donc $a_n = o(n^\sigma)$ en notant $\sigma = \Re(s)$ pour un s tel que la série converge. On a alors $|a_n z^n| \leq |n^\sigma z^n|$ pour tout n assez grand. Or $\sum n^\sigma z^n$ converge pour tout $|z| < 1$, par exemple par le critère de Cauchy. Ce qui montre la première partie du théorème.

(ii) Puisque $\forall t > 0, |e^{-t}| < 1$, on déduit de la première partie que $f_a \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Puis :

$$\frac{|F_a(z)|}{|z|} = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}||z^n| \underset{z\to 0}{\longrightarrow} |a_1|$$

Donc $F_a(z) = O(|z|)$ en 0. Or $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\frac{F_a(e^{-t})}{e^{-t}}$ est bornée en $+\infty$. Donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad t^N F_a(e^{-t}) = t^N e^{-t} \frac{F_a(e^{-t})}{e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où la décroissance rapide de f_a.
Enfin, on remarque que

$$f_a^{(k)}(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt} \right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^k a_n e^{-nt} = f_{(-n)^k a}(t)$$

en notant $(-n)^k a$ la suite $n \mapsto (-n)^k a_n$. Or la série de Dirichlet

$$L((-n)^k a, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-n)^k a_n}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^k a_n}{n^{s-k}} = (-1)^k \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^{s-k}}$$

converge quelque part car $L(a,s)$ converge quelque part. Tout ce que l'on a vu précédemment s'applique donc à toutes les dérivées de f_a.

□

Théorème 4.3. *Avec les mêmes notations que dans le théorème 4.2, si $Re(s) > sup(\sigma_{abs}, 0)$ alors $f_a(t)t^{s-1} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ et*

$$L(a,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f_a(t) t^{s-1} dt$$

Démonstration. Par Fubini-Tonnelli, on a, en notant $\sigma = \Re(s)$,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-nt} t^{s-1}| dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-nt} t^{\sigma-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{\sigma-1} dt$$

Avec le changement de variable $u = nt$, il vient :

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^{\sigma-1}}{n^{\sigma-1}} \frac{du}{n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \right) \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\sigma-1} dt = \Gamma(\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < +\infty$$

et cette quantité est finie car $\sigma > \sigma_{abs}$. Donc $(n,t) \mapsto a_n e^{-nt} t^{s-1}$ est intégrable sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$. D'où, par Fubini-Lebesgue :

$$\int_0^{+\infty} f_a(t) t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt} t^{s-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt = \Gamma(s) L(a,s)$$

en concluant avec le même changement de variable que précédemment. □

4.5 Prolongement des séries de Dirichlet : cas général

Proposition 4.2. *Si $L(a,s)$ est une série de Dirichlet convergeant quelque part, et si $f_a(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, alors $L(a,s)$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad L(a,-k) = (-1)^k f_a^{(k)}(0)$.*

Démonstration. D'après le théorème 4.2, on sait que $f_a(t)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car $L(a,s)$ converge quelque part. Toujours d'après 4.2, f_a est à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées. Puisqu'elle est de plus supposée C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, la proposition découle des théorèmes 4.3 et 3.1. □

4.6 Produit eulérien des séries $L(a,s)$ quand a est multiplicative

Définition 4.3. *On dit que la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 1}$ est multiplicative si $a_1 = 1$ et si $a_{nm} = a_n a_m$ chaque fois que n et m sont premiers entre eux.*

Définition 4.4. *On dit que la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 1}$ est complètement multiplicative si $a_1 = 1$ et si $a_{nm} = a_n a_m$ pour tout $n, m \geq 1$.*

Lemme 4.2. *Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, est une suite de nombre complexes, alors en notant $P_n^m := \prod_{k=n}^{k=m}(1+u_k)$ et $Q_n^m := \prod_{k=n}^{m}(1+|u_k|)$ on a :*

(i) $Q_n^m \leq \exp(\sum_{k=n}^{m} |u_k|)$.

(ii) $|P_n^m - 1| \leq Q_n^m - 1$.

Démonstration. (i) On a : $\exp(\sum_{k=n}^{m} |u_k|) = \prod_{k=n}^{m} \exp(|u_k|) \geq \prod_{k=n}^{m}(1+|u_k|) = Q_n^m$.

(ii) Par récurrence sur $m \geq n$ avec n fixé.
Si $m = n$ alors $|P_n^m - 1| = |1 + u_n - 1| = |u_n| = Q_n^n - 1$.
Si le résultat est vrai pour $m-1 \geq n$ montrons le pour m. On a :

$$|P_n^m - 1| = |P_n^{m-1}(1+u_m) - 1| = |P_n^{m-1}(1+u_m) - (1+u_m) + u_m| = |(P_n^{m-1} - 1)(1+u_m) + u_m|$$

Par hypothèse de récurrence on a alors :

$$|P_n^m - 1| \leq (Q_n^{m-1} - 1)(1 + |u_m|) + |u_m| = Q_n^{m-1}(1 + |u_m|) - 1 - |u_m| + |u_m| = Q_n^m - 1.$$

Ceci termine la preuve du lemme.

□

Théorème 4.4. *Si $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est multiplicative et si $L(a,s)$ converge quelque part alors, en notant*

$$u_p(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{a(p^n)}{p^{ns}}, \qquad \text{on} \quad a :$$

(i) $\forall \Re(s) > \sigma_{abs}$, $\sum_p u_p(s)$ *est absolument convergente.*

(ii)

$$\prod_p (1 + u_p(s)) = \prod_p \sum_{n\geq 0} \frac{a(p^n)}{p^{ns}}$$

converge uniformément sur tout demi-plan de la forme $\Re(s) > c > \sigma_{abs}$.

(iii)

$$\forall \Re(s) > \sigma_{abs}, L(a,s) = \prod_p \sum_{n\geq 0} \frac{a(p^n)}{p^{ns}}.$$

Démonstration. (i) Si $\Re(s) > c > \sigma_{abs}$ (possible car $\sigma_{abs} \neq +\infty$ car $L(a,s)$ converge quelque part), on a :

$$\sum_p |u_p(s)| = \sum_p \left| \sum_{n\geq 1} \frac{a(p^n)}{p^{ns}} \right| \leq \sum_p \sum_{n\geq 1} \left| \frac{a(p^n)}{p^{ns}} \right| \leq \sum_p \sum_{n\geq 1} \frac{|a(p^n)|}{p^{nc}} \leq \sum_{n\geq 2} \frac{|a_n|}{n^c} < +\infty$$

d'où la convergence absolue.

(ii) Soit $c > \sigma_{abs}$. Par le lemme 4.2, on a

$$\forall \Re(s) > c > \sigma_{abs}, \quad \left| \prod_{p\leq n} (1 + u_p(s)) \right| \leq \prod_{p\leq n} (1 + |u_p(s)|) \leq \exp(\sum_{p\leq n} |u_p(s)|$$

Or, vu ce qui précède, on a que $\sum_p |u_p(s)| \leq C$ pour une constante C ne dépendant pas de n ni de $s \in \{\Re(s) > c > \sigma_{abs}\}$. D'où $\forall n, |\prod_{p\leq n}(1 + u_p(s))| \leq K$ avec $K := e^C$.
Soit donc $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > c > \sigma_{abs}$. Soit $\varepsilon \in]0, \ln(2)]$. Par convergence de $\sum_p |u_p(s)|$, il existe N tel que $\forall n \geq N, \sum_{p\geq n} |u_p(s)| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Soient alors $m \geq n \geq N$. On a :

$$\left| \prod_{p\leq m+n} (1 + u_p(s)) - \prod_{p\leq n} (1 + u_p(s)) \right| = \left| \prod_{p\leq n} (1 + u_p(s)) \right| \cdot \left| \prod_{n\leq p\leq m+n} (1 + u_p(s)) - 1 \right|$$

Par le lemme 4.2, il vient alors :

$$\leq K \left[\prod_{n\leq p\leq m+n} (1 + u_p(s)) - 1 \right] \leq K \left[\exp\left(\sum_{n\leq p\leq m+n} |u_p(s)| \right) - 1 \right] \leq K \left[\exp\left(\sum_{p\geq n} |u_p(s)| \right) - 1 \right]$$

Or puisque $n \geq N$, il vient :

$$< K \left(\exp(\frac{\varepsilon}{2K}) - 1) \right) \leq K \frac{\varepsilon}{2K} \cdot 2 = \varepsilon$$

car $e^t - 1 \leq 2t$ pour tout $t \in [0, \ln(2)]$. (On peut le vérifier par une étude immédiate de fonction.)
On a donc montré que :

$$\forall c > \sigma_{abs}, \forall \varepsilon \in]0, \ln(2)], \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall m \geq 0, \forall s \in \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > c > \sigma_{abs}\},$$

$$\left| \prod_{p\leq m+n} (1 + u_p(s)) - \prod_{p\leq n} (1 + u_p(s)) \right| < \varepsilon.$$

Donc $\prod_{p\leq n}(1 + u_p(s))$ est uniformément de Cauchy sur $\Re(s) > c > \sigma_{abs}$, et ce quel que soit $c > \sigma_{abs}$. D'où la deuxième partie du théorème.

(iii) Cette égalité résulte, en développant le produit $\prod(1 + u_p(s))$, de la multiplicativité de a et du théorème de factorisation des entiers en produit de puissances de nombres premiers. □

Corollaire 4.3. *Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complètement multiplicative, et si $L(a,s)$ converge quelque part, alors*

$$\forall \Re(s) > \sigma_{abs}, L(a,s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{a_p}{p^s}}$$

où le produit est uniformément convergent sur $\Re(s) > c > \sigma_{abs}$.

Démonstration. Résulte entièrement du théorème 4.3 et du fait que si a est complètement multiplicative on a alors :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a(p^n)}{p^{ns}} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{a_p}{p^s}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a_p}{p^s}}$$

□

Remarque 4.2. *Les produits infinis indexés par les nombres premiers sont appelés produits eulériens en hommage au mathématicien Leonhard Euler.*

4.7 Abscisse de convergence absolue des séries $L(\chi, s)$

On fixe un entier relatif b. Pour tout caractère modulo b que l'on note χ, on considère les séries de Dirichlet $L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$.

Lemme 4.3. *Pour tout χ, $L(\chi, s)$ est d'abscisse de convergence absolue égale à 1.*

Démonstration. Soit χ un caractère modulo b. Par complète multiplicativité de χ, on a (cf. 4.3), en notant $\sigma := \Re(s)$ et χ_0 le caractère trivial :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^\sigma} = \prod_{p\nmid b} \frac{1}{1-\frac{1}{p^\sigma}} = \left(\prod_{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p^\sigma}}\right)\left(\prod_{p\mid b}(1-\frac{1}{p^\sigma})\right)$$

$$= \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\sigma}\right)\left(\prod_{p\mid b}(1-\frac{1}{p^\sigma})\right)$$

Et comme le produit de droite est un produit fini, on conclut par critère de Riemann. □

4.8 Prolongement des séries de Dirichlet $L(\chi, s)$

On fixe un entier relatif b. On étudie le prolongement de $L(\chi, s)$ pour χ un caractère de Dirichlet modulo b. On distingue deux cas : celui du caractère trivial χ_0 et les autres.

4.8.1 Cas de $L(\chi_0, s)$

Remarque 4.3. *On a*

$$L(\chi_0, s) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n\wedge b=1}} \frac{1}{n^s}$$

et la somme ***n'est pas*** *sur tout $n \geq 1$.*

Proposition 4.3. *Il y a une unique fonction que l'on note ζ telle que :*

(i) ζ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et a un pôle simple de résidu 1 en 1.

(ii) ζ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ coïncident sur $\Re(s) > 1$.

Démonstration. Il s'agit d'étudier les prolongements de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$. D'après la formule intégrale du théorème 4.3, si $\Re(s) > 1$, on a :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 1} e^{-nt} t^{s-1} dt.$$

On pose alors $f(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-nt}$ et $g(t) = tf(t)$. D'après le théorème 4.2, f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées. Alors si $\Re(s) > 1$:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt = \frac{1}{(s-1)\Gamma(s-1)} \int_0^{+\infty} tf(t)t^{s-2}dt = \frac{1}{s-1} M(g, s-1).$$

avec les notations du théorème 3.1 et parce que $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$. Or g est analytique sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f(t) = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ l'est. Mais de plus on a au voisinage de 0 :

$$g(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{te^{-t}}{t+o(t)} = \frac{e^{-t}}{1+o(1)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Donc g est prolongeable analytiquement sur $\mathbb{R}_+$. Soit alors g_1 son prolongement analytique. Puisque $\{0\}$ est de mesure nulle et que g est bornée en 0, on a, d'une part $M(g, s-1) = M(g_1, s-1)$ sur $\Re(s) > 1$. D'autre part, $M(g, s-1) = M(g_1, s-1)$ sont holomorphes sur $\Re(s) > 1$ et g_1 vérifie les conditions du théorème 3.1. Donc $M(g_1, s-1)$ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$ entier. Par théorème de prolongement analytique, ce prolongement en est aussi un pour $M(g, s-1)$. Donc $M(g, s-1)$ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$ entier.
Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un seul pôle en 1. Ce pôle est simple et de résidu $M(g, 0) = (-1)^0 g^{(0)}(0) = g(0) = 1$, toujours d'après le théorème 3.1 et l'égalité vu plus haut :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} M(g, s-1)$$

. □

Corollaire 4.4.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\ln(\zeta(x))}{\ln(\frac{1}{x-1})} = 1$$

avec x une variable réelle > 1 (donc le $\ln$ est bien défini).

Démonstration. On a :

$$\frac{\ln(\zeta(x))}{\ln((x-1)^{-1})} = \frac{\ln(\zeta(x)) + \ln(x-1) - \ln(x-1)}{\ln((x-1)^{-1})} = \frac{\ln((x-1)\zeta(x))}{\ln((x-1)^{-1})} + 1$$

Or $(x-1)\zeta(x) \underset{x\to 1_+}{\longrightarrow} 1$ d'après la proposition 4.3 précédente. Donc $\frac{\ln((x-1)\zeta(x))}{\ln((x-1)^{-1})} \underset{x\to 1_+}{\longrightarrow} 0$, et on a le résultat voulu. □

Corollaire 4.5. *$L(\chi_0, s)$ a un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ entier avec pour seul pôle un pôle simple en 1.*

Démonstration. Vu le théorème 4.3 et son corollaire, et vu la proposition 4.3, on a $\zeta(s) = L(\mathbb{1}, s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$, où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1. D'où :

$$L(\chi_0, s) = \prod_{p\nmid b} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p\mid b}(1 - \frac{1}{p^s}) = \zeta(s) \prod_{p\mid b}(1 - \frac{1}{p^s})$$

D'où le caractère méromorphe de $L(\chi_0, s)$ et son seul pôle (simple) en 1 (proposition 4.3). □

4.8.2 Le cas d'un caractère non trivial

Théorème 4.5. *Si $\chi \neq \chi_0$ alors $L(\chi, s)$ a un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)e^{-nt}$ a un prolongement C^∞ sur $\mathbb{R}_+$. En effet, d'après la proposition 4.3, si h est un tel prolongement on aura alors

$$L(\chi, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} h(t)t^{s-1}dt = M(g, s)$$

car $\{0\}$ est négligeable, et par le théorème 3.1 et le principe du prolongement analytique on aura bien que $L(\chi, s)$ est analytiquement prolongeable sur $\mathbb{C}$.
Or f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (théorème 4.2). Il s'agit donc d'étudier son prolongement en 0. Or

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)e^{-nt} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=0}^{\infty} \chi(j + kb)e^{-(j+kb)t}$$

car

$$\begin{aligned} [[1, b]] \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^* \\ (j, k) &\mapsto j + kb \end{aligned}$$

est une bijection. Or $\chi(j + kb) = \chi(j)$ d'où, si $t \neq 0$:

$$f(t) = \left(\sum_{j=1}^{b} \chi(j)e^{-jt}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kbt}\right) = \frac{1}{1 - e^{-bt}} \sum_{j=1}^{b} \chi(j)e^{-jt} = \frac{1}{1 - e^{-bt}} \sum_{j \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times} \chi(j)e^{-jt}$$

car $\chi(j) = 0$ si $j \notin (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times$ Or $z \mapsto 1 - e^{-bz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et a un zéro simple en 0. De même $z \mapsto \sum_{j \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times} \chi(j)e^{-jz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule en 0 par orthogonalité des caractères de Dirichlet.
Donc $h : z \mapsto \frac{1}{1-e^{-bt}} \sum_{j \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times} \chi(j)e^{-jt}$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier. Donc $f(t)$ a un prolongement C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ car coïncide avec h sur $\mathbb{R}_+^*$. □

4.9 Non annulation de $L(\chi, 1)$ pour $\chi \neq \chi_0$

On laisse fixé $b \in \mathbb{Z}$ pour toute la section.

Définition 4.5. *On définit $F(s) := \prod_\chi L(\chi, s)$. Le produit porte sur tous les caractères modulo b, y compris le caractère trivial.*

Lemme 4.4.

$$\forall \Re(s) > 1, \quad F(s) = \prod_{p \nmid b} \prod_{\chi} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$$

Démonstration. Résulte du lemme 4.3 et du corollaire 4.3 suivi d'une interversion d'un produit fini. □

Quel que soit p premier fixé, on considère le morphisme du groupe des caractères modulo b dans $\mathbb{C}^*$ défini par $\varphi : \chi \mapsto \chi(p)$. $Im\varphi$ est de cardinal au plus $\varphi(b)$ donc est fini donc est un sous-groupe de $\mathbb{C}$ de la forme $\mathbb{U}_{d(p)} = \{z \text{ tels que } |z|^{d(p)} = 1\}$. De plus, $\ker \varphi$ est un sous-groupe du groupe des caractères modulo b, et on note $h(p)$ son cardinal.

Lemme 4.5. *On a*

$$F(s) = \prod_{p \nmid b} \left(\frac{1}{1 - p^{-d(p)s}} \right)^{h(p)}.$$

Démonstration. Des résultats élémentaires sur les morphismes de groupes, il vient que $\forall \mu \in \mathbb{U}_{d(p)} = Im\varphi$, il existe exactement $h(p) = card(\ker \varphi)$ éléments χ envoyés par φ sur μ. Donc il découle du lemme précédent et d'un changement d'indexation sur le produit que

$$F(s) = \prod_{p \nmid b} \prod_{\chi} \left(1 - \chi(p)p^{-s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid b} \prod_{\mu \in \mathbb{U}_{d(p)}} \left(1 - \mu p^{-s}\right)^{-h(p)} = \prod_{p \nmid b} \left(1 - p^{-d(p)s}\right)^{-h(p)}$$

la dernière égalité résultant de la formule de la proposition 2.1. □

Lemme 4.6. *$F(s)$ est une série de Dirichlet à coefficients des entiers positifs ou nuls, d'abscisse de convergence absolue $\sigma_{abs} \leq 1$.*

Démonstration. Puisque dans $\frac{1}{1-p^{-d(p)s}} = 1 + \frac{1}{p^{d(p)s}} + \frac{1}{p^{2d(p)s}} + ...$ les coefficients des $\frac{1}{p^{ks}}$ sont 0 ou 1, en développant le produit $(1 - p^{-d(p)s})^{-h(p)}$ les coefficients des $\frac{1}{m^s}$ seront des sommes de 1, donc des nombres entiers positifs ou nuls. Et donc en développant le produit $\prod_{p \nmid b} (1 - p^{-d(p)s})^{-h(p)}$, les coefficients des $\frac{1}{n^s}$ seront des sommes de produits de nombres entiers positifs ou nuls, donc seront des entiers positifs ou nuls. On conclut alors avec le lemme précédent pour le fait que $F(s)$ est une série de Dirichlet à coefficients des entiers positifs ou nuls.
Pour σ_{abs}, cela résulte du fait que $F(s)$ est un produit fini de séries de Dirichlet d'abscisses de convergence ≤ 1 (lemme 4.3). □

Lemme 4.7. *L'écriture de $F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ avec $\forall n \geq 1, \quad a_n \in \mathbb{N}$ en série de Dirichlet diverge pour $s = 0$.*

Démonstration. On a $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^0} = \sum_{n \geq 1} a_n$. Or les a_n sont des entiers positifs ou nuls, donc il suffit de montrer qu'une infinité d'entre eux sont non nuls. Or en développant plus précisément que dans le lemme précédent, il vient :

$$F(s) = \prod_{p \nmid b} \left(1 + p^{-d(p)s} + p^{-2d(p)s} + ...\right)^{h(p)} = \prod_{p \nmid b} \left(1 + h(p)p^{-d(p)s} + (h(p) + \binom{h(p)}{2})p^{-2d(p)s} + ...\right)$$

$$= 1 + \sum_{p \nmid b} h(p)p^{-d(p)s} + Q$$

avec $Q \geq 0$. D'où $F(0) \geq 1 + \sum_{p \nmid b} h(p) = +\infty$ car $\forall p \nmid b, \quad h(p) \in \mathbb{N}^*$ en tant que cardinal d'un ensemble à au moins un élément (à savoir $\ker \varphi$) et aussi parce qu'il y a une infinité de p premiers ne divisant pas b. □

Corollaire 4.6.

$$\forall \chi \neq \chi_0, \quad L(\chi, 1) \neq 0.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il y ait au moins un $\chi \neq \chi_0$ tel que $L(\chi, 1) = 0$. Par théorème classique d'analyse complexe, ce zéro compenserait le pôle simple de $L(\chi_0, s)$ en 1 dans $F(s) = \prod_\chi L(\chi, s)$. Or $L(\chi_0, s)$ se prolonge de façon méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle le point $s = 1$, et pour tout $\chi \neq \chi_0$, $L(\chi, s)$ se prolonge de façon holomorphe à $\mathbb{C}$ entier. D'où il s'ensuivrait que $F(s)$ admettrait un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ entier. Mais $F(s)$ étant une série de Dirichlet à coefficients positifs, d'après le théorème de Landau (théorème 4.1) et son corollaire (corollaire 4.2), on aurait $\sigma_{abs} = \sigma_{hol} = -\infty$. Donc $F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ convergerait absolument sur tout $\mathbb{C}$, et en particulier en 0, $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^0} = \sum_{n \geq 1} a_n$ convergerait, ce qui contredirait le lemme précédent.
D'où le résultat. □

5 Logarithmes complexes

Rappel 5.1. *Si* $|z| < 1$ *on a* $\log(1-z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ *où* log *est la détermination principale du logarithme définie sur* $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Si $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et si $L(a,s)$ converge quelque part, alors d'après le corollaire 4.3 on a

$$L(a,s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{a_p}{p^s}} \quad \forall \Re(s) > \sigma_{abs}.$$

On veut définir un logarithme de $L(a,s)$ que l'on notera $l(a,s)$. Il est donc naturel de vouloir poser

$$l(a,s) = \sum_p \left(-\log(1 - \frac{a_p}{p^s}) \right)$$

avec log la détermination principale du logarithme. Mais il faut que $1 - \frac{a_p}{p^s}$ reste dans Ω_0.
Il suffit pour cela que $\left|\frac{a_p}{p^s}\right| < 1, \quad \forall \Re(s) > \sigma_{abs}, \quad \forall p \in \mathbb{P}.$
Il suffit donc d'avoir :

$$\forall n \geq 1, \quad |a_n| < 2^{\sigma_{abs}}.$$

Et on pourra alors utiliser le développement en série entière du log et on aura :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \quad \forall \Re(s) > \sigma_{abs}, \quad l(a,s) = \sum_p \sum_{n\geq 1} \frac{a_p^n}{np^{sn}}.$$

d'où la définition suivante.

Définition 5.1. *Si* $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, *on définit*

$$l(a,s) := \sum_p \sum_{n\geq 1} \frac{a_p^n}{np^{sn}}.$$

5.1 Convergence de $l(a,s)$

Lemme 5.1. *On suppose que* $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ *est strictement bornée par* $2^{\sigma_{abs}}$ *et que* $\sigma_{abs} \neq +\infty$. *On pose*

$$l_1(a,s) := \sum_p \frac{a_p}{p^s}, \quad \text{et} \quad R(a,s) := \sum_p \sum_{n\geq 2} \frac{a_p^n}{np^{ns}}.$$

On a alors $l(a,s) = l_1(a,s) + R(a,s)$ *et* $R(a,s)$ *est bornée* $\forall \Re(s) > \max(\sigma_{abs}, \frac{1}{2})$.

Démonstration. L'égalité annoncée (sans question de convergence) est évidente. Passons au caractère borné de $R(a,s)$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \max(\sigma_{abs}, \frac{1}{2})$, on a :

$$|R(a,s)| = \left| \sum_p \sum_{n\geq 2} \frac{a_p^n}{np^{sn}} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_p \sum_{n\geq 2} \left| \frac{a_p}{p^s} \right|^n$$

Or $|a_p| < 2^{\sigma_{abs}}$ et $\Re(s) > \sigma_{abs}$ donc

$$\left| \frac{a_p}{p^s} \right| = \frac{|a_p|}{p^{\Re(s)}} \leq \frac{|a_p|}{2^{\sigma_{abs}}} < 1.$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\sum_p\sum_{n\geq 2}\left|\frac{a_p}{p^s}\right|^n = \frac{1}{2}\sum_p\left(\frac{|a_p|^2}{|p^{2s}|}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{a_p}{p^s}\right|}\right) \leq 2^{2\sigma_{abs}-1}\sum_p\frac{|p^{-2s}|}{1-\left|\frac{a_p}{p^s}\right|}$$

Or $|a_p| < 2^{\sigma_{abs}}$ donc $-|a_p| > -2^{\sigma_{abs}}$ donc $-|a_p|p^{-\Re(s)} > -2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)}$ donc $1-|a_p|p^{-\Re(s)} > 1-2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)}$ donc

$$\frac{1}{1-|a_p|p^{-\Re(s)}} < \frac{1}{1-2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)}} \quad \forall p$$

En effet, $1-2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)}$ ne s'annule jamais car $p^{\Re(s)} \geq 2^{\Re(s)} > 2^{\sigma_{abs}}$ et donc $2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)} < 1$. Ainsi,

$$|R(a,s)| \leq 2^{2\sigma_{abs}-1}\sum_p\frac{p^{-\Re(s)}}{1-2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)}}$$

Or $\Re(s) > \frac{1}{2} > 0$ donc $2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $1-2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc

$$\frac{p^{-\Re(s)}}{1-2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)}} \underset{p\to\infty}{\sim} p^{-2\Re(s)}$$

Or $\Re(s) > \frac{1}{2}$ donc $2\Re(s) > 1$ donc $\sum_p p^{-2\Re(s)}$ converge donc $\sum_p \frac{p^{-\Re(s)}}{1-2^{\sigma_{abs}}p^{-\Re(s)}}$ converge également. Donc $R(a,s)$ est borné.

□

Proposition 5.1. *Si $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est strictement bornée par $2^{\sigma_{abs}}$ et si $\sigma_{abs} \neq +\infty$, alors $l(a,s)$ converge absolument sur $\Re(s) > \max(\sigma_{abs}, \frac{1}{2})$.*

Démonstration. On a, en séparant le cas $n = 1$ du cas $n \geq 2$:

$$\sum_p\sum_{n\geq 1}\left|\frac{a_p^n}{np^{sn}}\right| = \sum_p\frac{|a_p|}{p^{\Re(s)}} + \sum_p\sum_{n\geq 2}\frac{|a_p|^n}{np^{n\Re(s)}}$$

Or d'une part, on est sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 5.1 et on a vu lors de la démonstration de ce lemme que la double somme de droite est bornée (donc converge car c'est une série à termes positifs). Et d'autre part, puisque $\Re(s) > \sigma_{abs}$, on a :

$$\sum_p\frac{|a_p|}{p^{\Re(s)}} \leq \sum_{n\geq 1}\frac{|a_n|}{n^{\Re(s)}} < +\infty.$$

D'où la conclusion. □

Proposition 5.2. *Si $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est strictement bornée par $2^{\sigma_{abs}}$ et si $\sigma_{abs} \neq +\infty$, alors pour tout $\delta > 0$, $l(a,s)$ converge normalement sur $\Re(s) > \max(\sigma_{abs}, \frac{1}{2}) + \delta$.*

Démonstration. On a :

$$\sum_p\sum_{n\geq 1}\left|\frac{a_p^n}{np^{sn}}\right| \leq \sum_p\sum_{n\geq 1}\frac{|a_p^n|}{np^{(\max(\sigma_{abs},\frac{1}{2})+\delta)n}}.$$

Et on conclut avec la proposition 5.1. □

Corollaire 5.1. *Si $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est strictement bornée par $2^{\sigma_{abs}}$ et si $\sigma_{abs} \neq +\infty$, alors $l(a,s)$ est holomorphe sur $\Re(s) > \max(\sigma_{abs}, \frac{1}{2})$.*

Démonstration. Résulte de la convergence normale (cf. 5.2) et du fait que

$$\forall p, \quad \forall n \geq 1, \quad s \mapsto \frac{a_p^n}{np^{sn}}$$

est holomorphe. □

5.2 Le cas où a est complètement multiplicative

Théorème 5.1. *Si $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est complètement multiplicative, si elle est de plus strictement bornée par $2^{\sigma_{abs}}$ et si $\sigma_{abs} \neq +\infty$, alors $\forall \Re(s) > \max(\sigma_{abs}, \frac{1}{2})$, $\quad l(a,s)$ est un logarithme de $L(a,s)$*

Démonstration. Vu l'hypothèse a strictement bornée par $2^{\sigma_{abs}}$, pour tout p, le logarithme principal $\log(1 - \frac{a_p}{p^s})$ est bien défini. De plus, les limites qui suivent ont du sens vu le paragraphe sur la convergence de $l(a,s)$ et les hypothèses, et on peut alors écrire :

$$\exp(l(a,s)) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{p\leq n} -\log(1 - \frac{a_p}{p^s})\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{p\leq n} -\log(1 - \frac{a_p}{p^s})\right)$$

La dernière égalité résultant de la continuité de exp. Or il s'agit maintenant d'une somme finie comme argument de l'exponentielle, d'où :

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\leq n} \exp\left(-\log(1 - \frac{a_p}{p^s})\right) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{a_p}{p^s}} = L(a,s)$$

La dernière égalité résultant du corollaire 4.3 et de la complète multiplicativité de a. D'où le résultat. $\square$

5.3 Le cas $l(\chi, s)$

On fixe $b \in \mathbb{Z}$ pour toute la suite.
D'une part $\sigma_{abs} \neq +\infty$ car $\sigma_{abs} = 1$ (cf. le lemme 4.3). D'autre part,

$$\forall n \geq 1, \quad |\chi(n)| \leq 1 \quad \textit{donc} \quad |\chi(n)| < 2 \leq 2^{\sigma_{abs}}.$$

Donc tous les caractères modulo b, χ vérifient les hypothèses des propositions de la section précédente. D'où :

Proposition 5.3. *Pour tout χ caractère modulo b, $l(\chi, s)$ est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1$.*

Démonstration. Résulte des considérations précédentes (et du fait que $\max(\sigma_{abs}, \frac{1}{2}) = 1$ par le lemme 4.3). $\square$

5.3.1 Le cas d'un caractère non trivial $\chi \neq \chi_0$

Théorème 5.2. *Si $\chi \neq \chi_0$ alors $l(\chi, s)$ est borné en 1.*

Démonstration. Faisons tout d'abord remarquer que vu le domaine de définition de $l(\chi, s)$ (cf. la proposition 5.3), ceci signifie que $l(\chi, s)$ est borné au voisinage de 1 *dans le demi-plan* $\Re(s) > 1$.
Soit $\chi \neq \chi_0$. D'après le corollaire 4.6, on a $L(\chi, 1) \neq 0$ donc par continuité de $L(\chi, s)$ on a $\exists r > 0$, tel que $\forall z \in D(1,r)$, on ait $|L(\chi, z) - L(\chi, 1)| < \frac{1}{2}|L(\chi, 1)|$. D'où

$$\forall z \in D(1,r), \quad |L(\chi, z)| \geq \frac{1}{2}|L(\chi, 1)| > 0.$$

Soit donc $\Omega := D(L(\chi, 1), \frac{1}{2}|L(\chi, 1)|)$. Ω est un ouvert convexe ne contenant pas 0, donc par théorème classique d'analyse complexe, il existe Λ un logarithme (ie : une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$) sur Ω. Alors $g := \Lambda \circ L(\chi, \cdot)$ est correctement définie sur $D(1,r)$ et est holomorphe sur ce même domaine. Et on a :

$$\forall z \in D(1,r), \quad g'(z) = \frac{L'(\chi, z)}{L(\chi, z)} = l'(\chi, z).$$

La dernière égalité résultant du fait que $l(\chi, s)$ est un logarithme de $L(\chi, s)$ (cf. 5.1). Donc $g = l(\chi, \cdot)$+constante. Or g étant continue en $1 \in D(1,r)$, elle est bornée en 1, donc $l(\chi, s)$ aussi. D'où le résultat. $\square$

5.3.2 Le cas du caractère trivial χ_0

Lemme 5.2. *Si $x > 1$ réel alors $l(\mathbf{1}, x) = \ln(\zeta(x))$.*

Démonstration. Soit $x > 1$, d'après le corollaire 4.3 on a :

$$\zeta(x) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{p \leq n} \left(1 - p^{-x}\right)^{-1}$$

Donc, par continuité de ln, il vient :

$$\ln(\zeta(x)) = \ln\left(\lim_{n \to +\infty} \prod_{p \leq n} \left(1 - p^{-x}\right)^{-1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\prod_{p \leq n} \left(1 - p^{-x}\right)^{-1}\right)$$

Il s'agit alors d'un produit fini, d'où :

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{p \leq n} \left(-\ln(1 - p^{-x})\right) = \sum_{p} -\ln(1 - p^{-x})$$

Or $\forall p, \quad \forall x > 1, \quad |p^{-x}| \leq \frac{1}{2} < 1$, donc, avec le développement en série entière de $\ln(1-u)$ pour $|u| < 1$, il vient :

$$\ln(\zeta(x)) = \sum_{p} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{np^{-nx}} = l(\mathbf{1}, x).$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème 5.3. *On a :*

$$\sum_{p} \frac{1}{p^x} \underset{x \to 1_+}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

avec x variable réelle.

Démonstration. En remarquant que $\sum_p \frac{1}{p^s} = l_1(\mathbf{1}, s)$ (en utilisant les notations du lemme 5.1), on a au voisinage de 1_+ :

$$l(\mathbf{1}, x) = \ln(\zeta(x)) = \sum_{p} \frac{1}{p^x} + O(1).$$

Donc

$$\frac{\sum_p \frac{1}{p^x}}{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \frac{\ln(\zeta(x)) + O(1)}{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)} \underset{x \to 1_+}{\longrightarrow} \lim_{x \to 1_+} \frac{\ln(\zeta(x))}{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)} = 1.$$

Le calcul de la dernière limite a été effectué au corollaire 4.4. $\square$

Troisième partie

La preuve de Dirichlet

Dans cette partie, nous donnons une démonstration du théorème de Dirichlet.

Théorème 5.4. ***(Dirichlet 1837)*** *Si a et b sont des entiers premiers entre eux alors il existe une infinité de nombres premiers $p \equiv a[b]$.*

Démonstration. C'est un corollaire du théorème et du lemme suivants. $\square$

Définition 5.2. *En notant $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, si $A \subset \mathbb{P}$ on appelle densité de Dirichlet la limite, lorsqu'elle existe,*

$$\lim_{s \to 1_+} \frac{\sum_{p \in A} p^{-s}}{\ln(s-1)^{-1}}$$

Lemme 5.3. *Si $A \subset \mathbb{P}$ est fini alors il a une densité de Dirichlet égale à 0.*

Démonstration. C'est immédiat en considérant la définition de densité de Dirichlet. $\square$

Théorème 5.5. *Si a et b sont des entiers premiers entre eux alors l'ensemble des nombres premiers $p \equiv a[b]$ a pour densité de Dirichlet $\frac{1}{\varphi(b)}$.*

Démonstration. Dans toute la preuve, les notations en O sont à considérer pour s au voisinage de 1. Définissons

$$S_{a,b}(s) := \sum_{p \equiv a[b]} \frac{1}{p^s}.$$

Ceci a du sens pour tout $\Re(s) > 1$. Il s'agit alors de montrer que

$$\lim_{s \to 1_+} \frac{S_{a,b}(s)}{\ln(s-1)^{-1}} = \frac{1}{\varphi(b)}$$

Pour simplifier l'indexation, on définit la fonction

$$\mathbf{1}_{a,b} : \mathbb{Z} \to \{0,1\}, \quad n \mapsto \mathbf{1}_{a,b}(n) := \begin{cases} 1 & si \quad n \equiv a[b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Ainsi

$$S_{a,b}(s) = \sum_{p} \frac{\mathbf{1}_{a,b}(p)}{p^s}$$

On veut maintenant mieux comprendre comment opère $\mathbf{1}_{a,b}$, c'est-à-dire l'exprimer à partir de fonctions ayant des propriétés de structure (multiplicativité, etc...) car c'est plus facile à manier. C'est ici que Dirichlet introduisit ce que l'on appelle aujourd'hui les *caractères*.

Or d'après la proposition 1.4, et en remarquant que $\chi(a^{-1}) = \overline{\chi(a)}$ car c'est un nombre complexe de module 1, on a :

$$\sum_{\chi \in \widehat{\left(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\right)^\times}} \overline{\chi(a)}\chi(n) = \sum_{\chi \in \widehat{\left(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\right)^\times}} \chi(a^{-1}n) = \begin{cases} card\left(\widehat{\left(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\right)^\times}\right) & si \quad a^{-1}n \equiv 1[b] \\ & \\ 0 \quad sinon & \end{cases}$$

Or $card\left(\left(\widehat{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}}\right)^\times\right) = \varphi(b)$ (Cf. proposition 1.1) donc :

$$\forall n, \quad \mathbf{1}_{a,b}(n) = \frac{1}{\varphi(b)} \sum_\chi \overline{\chi(a)}\chi(n)$$

où la somme porte sur tous les caractères de Dirichlet modulo b.

D'où :

$$S_{a,b}(s) = \sum_p \frac{\mathbf{1}_{a,b}(p)}{p^s} = \frac{1}{\varphi(b)} \sum_\chi \overline{\chi(a)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}.$$

(L'interversion des sommes est légitime car il n'y a qu'un nombre fini de caractères.)

D'où :

$$S_{a,b}(s) = \frac{1}{\varphi(b)} \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} + \frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

où χ_0 est le (prolongement du) caractère trivial (Cf. les remarques 1.1 et 1.2).

On voit donc qu'*il suffit* de montrer que

$$\lim_{s \to 1_+} \frac{\sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s}}{\ln(s-1)^{-1}} = 1$$

et que

$$\forall \chi \neq \chi_0, \quad \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = O(1)$$

pour avoir le résultat.

Soit donc $\chi \neq \chi_0$. On considère

$$l(\chi, s) := \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}} = l_1(\chi, s) + R(\chi, s).$$

Avec $l_1(\chi, s) := \sum_p \frac{\chi(p)}{p}$ et $R(\chi, s) := \sum_p \sum_{n \geq 2} \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}}$. (Ce sont les notations du lemme 5.1).

D'après le lemme 5.1, on a $R(\chi, s) = O(1)$. (χ vérifie les hypothèses du lemme, cf. section 5.3).

D'après le théorème 5.2, on a $l(\chi, s) = O(1)$.

Donc on a bien $l_1(\chi, s) = O(1)$.

Puis pour ce qui est du caractère trivial, on a que $\chi_0(p) = 1$ si et seulement si $p \wedge b = 1$ si et seulement si $p \nmid b$ car p est premier. D'où :

$$\sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} = \sum_{p \nmid b} \frac{1}{p^s} = \sum_p \frac{1}{p^s} - \sum_{p|b} \frac{1}{p^s}.$$

Or $\sum_{p|b} \frac{1}{p^s}$ est une somme finie donc :

$$\lim_{s \to 1_+} \frac{\sum_p \frac{1}{p^s} - \sum_{p|b} \frac{1}{p^s}}{\ln(s-1)^{-1}} = \lim_{s \to 1_+} \frac{\sum_p \frac{1}{p^s}}{\ln(s-1)^{-1}} = 1.$$

La dernière égalité résultant du théorème 5.3. Ceci termine la preuve. $\square$

Références

[1] J-P Serre. *Cours d'arithmétique* PUF, 1988

[2] P.Colmez. *Eléments d'analyse et d'algèbre* École Polytechnique

[3] Bruno Martin. *Sur l'existence d'une preuve "euclidienne" du théorème de Dirichlet (d'après Ram Murty)* 2002 Cf. http ://finanz.math.tu-graz.ac.at/ martin/memoire.pdf

[4] Pete L. Clark. *Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions* Cf. https ://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/Dirichlet_theorem.pdf

[5] Delphine Longuet. *Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet* Cf. https ://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/bayad/Enseignement/TER/Dirichlet.pdf

[6] Wikipedia Cf. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_la_progression_arithmétique