



**Grégory Faye**

CNRS, UMR 5219

Institut de Mathématiques de Toulouse

Université Paul Sabatier

*Toulouse*

## L'équation de la chaleur

**Mots clés :** équation aux dérivées partielles, base Hilbertienne, série de Fourier et intégration.

**Résumé.** L'objectif du stage est l'étude de l'équation de la chaleur unidimensionnelle, dans un intervalle borné, avec conditions de bord de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x), & t > 0, \quad x \in ]0, \pi[, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in ]0, \pi[, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Cette étude se fera en plusieurs étapes, dont les grandes lignes sont les suivantes :

1. dérivation de l'équation à partir de considérations physiques : loi de Fick ;
2. existence, unicité et régularité des solutions de (1) pour  $u_0 \in L^2(]0, \pi[)$  ;
3. stabilité des solutions par rapport à la condition initiale en norme  $L^2(]0, \pi[)$  et  $L^\infty(]0, \pi[)$  ;
4. extension des résultats pour des conditions de bord non homogène ou bien lorsque l'équation présente un terme source ;
5. résolution approchée par la méthode des différences finies.

**Remarque générale.** Il est possible d'illustrer les résultats obtenus par des simulations numériques.

**Prérequis :** cours d'intégration de Lebesgue.