Sujets de stage de L3
Année 2018-2019

Sujet 1

Encadrant: Dan Popovici (popovici@math.univ-toulouse.fr)
Titre: Théorème de Sard et fonctions de Morse

Résumé: Ce stage aura pour but de donner à l'étudiant la possibilité de s'initier à la topologie différentielle via l'étude des applications lisses entre deux variétés différentiables.

Après un rappel des notions sans doute connues de l'étudiant d'immersions et submersions et leurs formes locales respectives dans un système de coordonnées adaptées, seront étudiées les notions de "transversalité" (d'une application lisse à une sous-variété de la variété d'arrivée, respectivement de deux sous-variétés), de "stabilité" par *homotopie* (des difféomorphismes locaux, des immersions, des submersions, etc), avant d'étudier une démonstration du *théorème de Sard*.

Ce dernier affirme que le sous-ensemble des *valeurs critiques* d'une application lisse $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés différentiables est de mesure de Lebesgue nulle.

Deux applications du théorème de Sard seront ensuite étudiées : une aux *fonctions de Morse* (= les fonctions dont tous les points critiques sont non dégénérés) et une autre à l'étude d'une démonstration du *théorème de plongement de Whitney* affirmant que toute variété de dimension k peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2k+1}$ (et même dans $\mathbb{R}^{2k}$, mais nous nous bornerons aux résultat plus faible.)

Ces choses sont bien expliquées, avec des exemples, au chapitre 1 et à l'appendice 1 de la référence principale [GP] pour ce stage.

Bibliographie.

[GP] Victor GUILLEMIN, Alan POLLACK — *Differential Topology* — Prentice-Hall, Inc., Englewood, New Jersey (1974).

[M] John MILNOR — Morse Theory — Princeton, N.J., Princeton University Press, **51** (1963).

Sujet 2

Encadrant: Dan Popovici (popovici@math.univ-toulouse.fr)
Titre: Transversalité et intersection

Résumé: Après l'étude de quelques propriétés de base des variétés à bord, quelques résultats fondamentaux seront étudiés : une variété compacte à bord n'admet pas de rétraction sur son bord; le *théorème de point fixe de Brouwer* affirmant que toute application lisse de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même possède un point fixe.

Ensuite, nour verrons une démonstration du fait que la transversalité est une propriété *générique* : toute application lisse $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés différentiables (quelque soit son comportement par rapport à une sous-variété Z de Y donnée d'avance) peut être déformée arbitrairement peu vers une application *transversale* à Z.

Après une étude de la notion de *voisinage tubulaire* d'une sous-variété, nous étudierons des notions de *théorie de l'intersection modulo* 2 : pour toute application lisse $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés dont X est supposée *compacte* et toute sous-variété fermée lisse Z de Y telle que f est *transversale* à Z et $\dim X + \dim Z = \dim Y$, on définit le *nombre d'intersection modulo* 2 $I_2(f, Z)$ de f avec Z comme étant le nombre modulo 2 de points de $f^{-1}(Z)$. (Puisque $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété fermée de dimension 0 de X, elle n'a qu'un nombre fini de points.) Nous verrons que les applications *homotopes* et transversales à la même sous-variété Z ont mêmes nombres d'intersections modulo 2 avec Z.

On étudiera ensuite les *nombres d'enroulement modulo* 2 et une d'émonstration du *théorème de séparation de Jordan-Brouwer* affirmant que le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ d'une hypersurface compacte connexe X consiste en deux ouverts connexes, l"'intérieur" et l"'extérieur" de X.

Enfin, on étudiera une démonstration du théorème de Borsuk-Ulam : toute application lisse $f : S^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ ne passant pas par l'origine et symétrique autour de celle-ci (i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^k$) tourne autour de l'origine un *nombre impair de fois* (i.e. son nombre d'enroulement modulo 2 est égal à 1).

Ces choses sont bien expliquées, avec des exemples, au chapitre 2 de la référence principale [GP] pour ce stage.

Bibliographie.

[GP] Victor GUILLEMIN, Alan POLLACK — *Differential Topology* — Prentice-Hall, Inc., Englewood, New Jersey (1974).

Sujet 3

Encadrant: Dan Popovici (popovici@math.univ-toulouse.fr)
Titre: Opérateurs compacts, opérateurs à trace et opérateurs de Hilbert-Schmidt

Résumé: Le but de ce stage est de permettre à l'étudiant d'apprendre quelques notions de base d'analyse fonctionnelle. On étudiera des opérateurs linéaires bornés entre des espaces de Banach et de Hilbert et, dans certains cas, des réalisations concrètes de ces opérateurs. Un des résultats principaux sera le théorème de Hilbert-Schmidt affirmant que pour tout opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable, il existe une base orthonormée de l'espace de Hilbert formée de vecteurs propres de l'opérateur dont les valeurs propres tendent vers 0.

Ensuite, pour un opérateur positif comme ci-dessus, on définira et étudiera la notion de trace. Si le temps le permet, on étudiera également le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints bornés.

Bibliographie.

M. REED, B. SIMON — *Methods of Modern Mathematical Physics* — Academic Press Inc. (1972).