

**Laboratoire de Recherche Conventionné  
ANABASE**

**Analyse Numérique Appliquée de Bordeaux  
A la Simulation d'Ecoulements complexes  
IMB – CEA-CESTA**

Institut de Mathématiques de Bordeaux  
351 Cours de la Libération, 33405 Talence



R. Loubère [raphael.loubere@u-bordeaux.fr](mailto:raphael.loubere@u-bordeaux.fr)  
P.-H. Maire [pierre-henri.maire@cea.fr](mailto:pierre-henri.maire@cea.fr)

**Étude et développement de méthodes numériques dédiées à la résolution des équations d'Euler bidimensionnelle en régime hypersonique sur des maillages non-structurés**

Ce stage de Master Recherche est proposé dans le cadre du Laboratoire de Recherche Conventionné (LRC) porté conjointement par l’Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB) et le Centre d’Études Scientifiques et Techniques d’Aquitaine (CESTA) du CEA. Il pourra se prolonger par une thèse à partir de l’automne 2026.

Lors de la rentrée atmosphérique d’un véhicule spatial, les écoulements rencontrés sont dits *hypersoniques* car leur vitesse est très largement supérieure à celle du son. Ces écoulements se caractérisent par la présence d’ondes de choc et de détente intenses, ainsi que par des niveaux extrêmes de pression, de température et de flux thermique [1]. La simulation numérique de tels phénomènes est essentielle pour prédire les sollicitations aérothermodynamiques (pressions et flux de chaleur) subies par le véhicule, informations indispensables à son dimensionnement optimal.

Dans ce contexte, la robustesse et la précision des méthodes numériques employées dans les codes de calcul demeurent un enjeu majeur, malgré plusieurs décennies de recherche sur la discrétisation des équations aux dérivées partielles hyperboliques. En effet, il est nécessaire à la fois :

- De capturer correctement le choc détaché incurvé au voisinage du nez du véhicule, ce qui requiert un niveau adapté de dissipation numérique,
- D’évaluer avec précision les flux visqueux et thermiques pariétaux, ce qui impose un maillage suffisamment fin de la couche limite et une discrétisation fidèle des termes visqueux et conductifs des équations de Navier–Stokes.

La distribution spatiale de la dissipation numérique doit par ailleurs être maîtrisée afin de garantir une évaluation fiable des transferts thermiques dans la couche limite. Le compromis entre robustesse (davantage de dissipation) et précision (moins de dissipation) est particulièrement délicat en régime hypersonique, en raison des conditions extrêmes de l’écoulement.

### Objectif du stage

Le stage porte sur l’étude et l’évaluation de méthodes numériques dédiées à la discrétisation des équations d’Euler (partie non visqueuse et non conductrice de chaleur des équations de Navier–Stokes) sur des maillages non structurés. Ces derniers sont bien adaptés aux géométries complexes, mais leur non-alignement avec les directions principales de l’écoulement accroît fortement les exigences de robustesse et de précision des schémas numériques. Une réponse possible consiste à développer des schémas dotés d’une dissipation numérique intrinsèquement multidimensionnelle. Parmi ceux-ci, on distingue :

- Les méthodes aux **Résidus Distribués** (RD) [2],
- Une méthode de type **Volumes Finis multipoint** récemment proposée [3].

### Méthodes étudiées

- **Résidus Distribués (RD)** : méthode co-localisée aux noeuds du maillage. Elle repose sur l’évaluation du résidu (fluctuation des flux) associé à chaque élément, puis sur sa distribution entre les noeuds de l’élément. La somme des résidus d’un élément est égale à une approximation de l’intégrale du flux physique sur la frontière de l’élément. Cette condition de consistance est essentielle, car elle garantit la convergence du schéma vers la solution faible du problème via un théorème de type Lax–Wendroff.

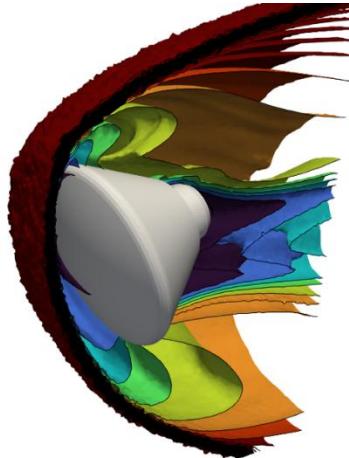
- **Volumes Finis multipoint (VF multipoint)** : méthode co-localisée aux mailles, fondée sur une approximation des flux issue d'un solveur de Riemann nodal. Dans ce cadre, les flux de face ne sont plus définis de manière unique et la conservation au sens classique des volumes finis est perdue. Elle est toutefois restaurée par une condition de conservation écrite autour de chaque nœud, équivalente à la condition de consistance des méthodes RD. Le lien entre les méthodes VF multipoint et RD a été récemment clarifié dans [4].

## Programme du stage

Après une phase de familiarisation avec ces approches, le stage consistera à :

- Écrire le schéma numérique RD pour les équations d'Euler,
- Développer un schéma numérique de type volumes finis centré aux nœuds, utilisant un solveur de Riemann multidimensionnel issu des travaux [5],
- Concevoir un schéma VF multipoint centré aux nœuds, inspiré des travaux [3],
- Implanter ces méthodes dans un code de recherche dédié à la résolution des équations d'Euler compressibles en 2D sur maillages non structurés hybrides,
- Comparer leur robustesse et leur précision sur des cas tests représentatifs d'écoulements hypersoniques, incorporer et valider, ou invalider, dans le contexte hypersonique des résultats récents sur les schémas numériques [5,6].

Ce stage offre l'opportunité d'intégrer un environnement de recherche appliquée où sont élaborées et évaluées des méthodes numériques de pointe en analyse numérique. Il constitue une excellente préparation pour les étudiants intéressés par la poursuite d'un doctorat dans ce domaine.



## Bibliographie

- [1] J. D. Anderson. Hypersonic and high-temperature gas dynamics. AIAA education series, 2006.
- [2] R. Abgrall. Toward the Ultimate Conservative Scheme: Following the Quest. *Journal of Computational Physics*, 167, pp 277-315, 2001.
- [3] G. Gallice, A. Chan, R. Loubère, P.-H. Maire. Entropy stable and positivity preserving Godunov-type schemes for multidimensional hyperbolic systems on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 468, 2022.
- [4] R. Abgrall, P.-H. Maire, M. Ricchiuto. Embedding General Conservation Constraints in Discretizations of Hyperbolic Systems on Arbitrary Meshes: A Multidimensional Framework, submitted to M3AS, available at <https://arxiv.org/abs/2509.25967>, 2025.
- [5] M. Dumbser, E. Gaburro, M. Ricchiuto. On general and complete multidimensional Riemann solvers for nonlinear systems of hyperbolic conservation laws. Available at <https://arxiv.org/abs/2506.00207>, 2025.
- [6] R. Abgrall, Y. Liu and G. Wissocq. A positive- and bound-preserving vectorial lattice Boltzmann method in two dimensions. *SIAM SISC*, available at <https://arxiv.org/abs/2411.15001>, 2025

**Encadrement :** R. Abgrall (Université de Zürich), P.-H. Maire (CEA), M. Ricchiuto (INRIA), G. Wissocq (CEA)

**Lieu :** présentiel au CEA CESTA et à l'IMB

**Durée :** 6 mois

**Contact :** envoyer votre CV et une lettre de motivation à [pierre-henri.maire@cea.fr](mailto:pierre-henri.maire@cea.fr) et [gauthier.wissocq2@cea.fr](mailto:gauthier.wissocq2@cea.fr)