Suite du TD 6

Exercice 1 (Calcul des erreurs d'arrondi sur la méthode d'Euler). On se propose d'étudier les erreurs d'arrondi sur la méthode d'Euler explicite. On considère l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est M-Lipschitzienne. Soit X_n la solution du schéma d'Euler explicite associée à un pas $h > 0$. Lorsqu'on effectue des opérations algébriques sur un ordinateur, on commet des erreurs d'arrondi. L'essentiel de ces erreurs est généré lorsqu'on effectue des additions/soustractions ou lors de l'évaluation d'une fonction en un point. On peut considérer les opérations de multiplications/divisions comme négligeables en terme d'erreur.

1. Montrer que la solution $\tilde{X}_n$ de la méthode d'Euler calculée par la machine vérifie

$$\tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n + hf(\tilde{X}_n) + h\mu_n + \rho_n.$$

   avec $\mu_n, \rho_n \in \mathbb{R}$.

2. On suppose ici que pour tout n, $|\mu_n| \leqslant \mu, |\rho_n| \leqslant \rho$. On rappelle que la méthode d'Euler est convergeante d'ordre 1. Montrer que en posant $\tilde{e}_n = x(nh) - \tilde{X}_n$, on a

$$|\tilde{e}_n| \leqslant A + Bh + \frac{C}{h},$$

   où A, B et C sont des constantes indépendantes de h.

3. En déduire l'existence d'un pas optimal pour lequel les erreurs d'arrondi sont minimales.