1. Le théorème de Thalès et le théorème de la droite des milieux

Pré-requis : égalité et similitude de triangles.
Objectif : L'objectif de ce TD est de démontrer de manière *élémentaire* le **théorème de Thalès** au moyen de la « méthode des aires » employée par Euclide dans *Les Éléments* ainsi que le **théorème de la droite des milieux**.

Exercice 1 (aire : découpages et recollements)

Soient $ABCD$ et $BCFE$ deux parallélogrammes possédant la même base $[BC]$ et situées entre les mêmes parallèles (*i.e.* les côtés $[AD]$ et $[EF]$ sont sur la même droite parallèle à la base$[BC]$).

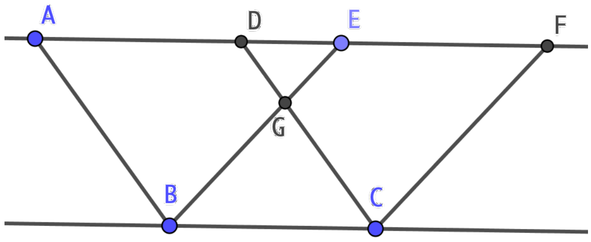

Figure 1. Les parallélogrammes $ABCD$ et $BCFE$ ont la même aire.

1) Justifier que les triangles AEB et DFC sont égaux.
2) En déduire que les parallélogrammes $ABCD$ et $BCFE$ ont même aire.

   On en déduit aussitôt la même proposition pour les **triangles** (pourquoi ?).

   On considère à présent la figure 2 sous les hypothèses suivantes : $(AC) \perp (BD)$; $(EF) \parallel (BD)$; $CB = BG = GH$.

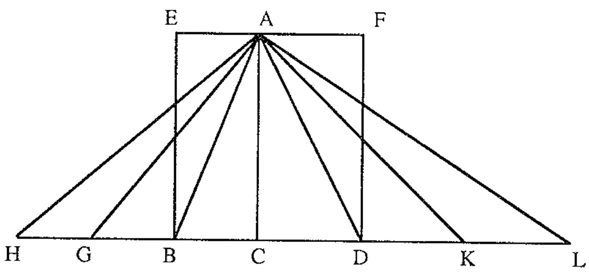

Figure 2. La proposition VI.1 des *Éléments* d'Euclide

3) Démontrer que $\dfrac{aire\,(AGC)}{aire\,(AHC)} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{GC}{HC}$.

   On admettra la proposition suivante, plus générale :

   Proposition (Éléments *VI.1*). Les triangles qui possèdent la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases.

qui admet pour corollaire le « lemme des proportions » (ainsi nommé par Perrin) :

Lemme (Lemme des proportions). Soient ABC et $AB'C'$ deux triangles ayant en commun le sommet A et dont les côtés $[BC]$ et $[B'C']$ sont portés par la même droite. Alors on a :

$$\frac{aire(ABC)}{aire(AB'C')} = \frac{BC}{B'C'}.$$

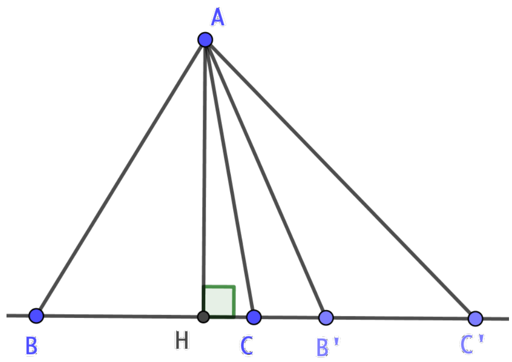

FIGURE 3. Le lemme des proportions

dont on va faire un usage constant dans la suite.

Exercice 2 (Le théorème de Thalès)

On se propose de démontrer le théorème de Thalès en utilisant la méthode euclidienne des aires.

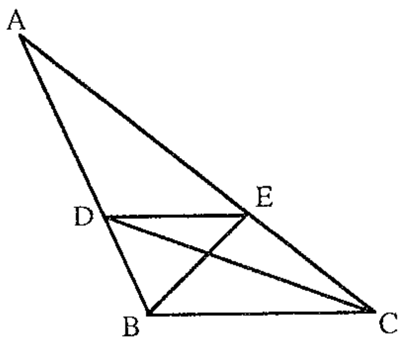

FIGURE 4. Le théorème de Thalès démontré par les aires

1) Justifier que les triangles BDE et CDE sont égaux en aire.
2) Justifier que

$$\frac{aire(BDE)}{aire(ADE)} = \frac{BD}{DA}.$$

3) En déduire que $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CE}{EA}$. Conclure.
4) On considère la parallèle à (AB) passant par E qui coupe (BC) en F.
   a) Démontrer que $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{aire(ABF)}{aire(ABC)}$.
   b) Justifier que $aire(ABF) = aire(ABE)$.
   c) En conclure que $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$.

Exercice 3 (Le théorème de Thalès et la similitude des triangles)

1) Énoncer la définition de la *similitude* de figures rectilignes. Justifier que la condition d'égalité des angles n'est pas suffisante.

   On se propose à présent de démontrer à l'aide du théorème de Thalès que la condition d'égalité des angles est *suffisante* pour établir la similitude des **triangles**, *i.e.* que les côtés homologues de triangles équiangles sont proportionnels.

   Soient ABC et DCE des triangles équiangles (voir figure 5). On suppose que $[BC]$ est placée en alignement avec $[CE]$.

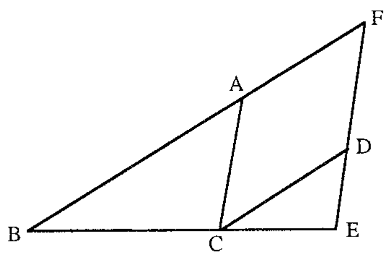

FIGURE 5. Triangles équiangles et triangles semblables

2) Justifier que la somme des angles $\widehat{ABC}+\widehat{DEC}$ est inférieure à « deux droits ». En déduire que les droites (AB) et (DE) sont sécantes.
3) Soit F le point d'intersection des droites (AB) et (DE). Démontrer que $FACD$ est un parallélogramme.
4) Démontrer à l'aide du théorème de Thalès que les triangles ABC et DCE sont semblables.

Exercice 4 (Le théorème de la droite des milieux)

Soient ABC un triangle et D et E les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

1) Rappeler l'énoncé du théorème de la droite des milieux.

   On trace la droite parallèle à la droite (BC) [resp. la droite (AC)] passant par D qui coupe $[AC]$ en E' [resp. $[BC]$ en F'].

2) Démontrer que les triangles ADE' et BDF' sont égaux.
3) Justifier que $AE' = E'C$.
4) Conclure en démontrant le théorème de la droite des milieux.

   On trace les médianes (DC) et (BE) qui se coupent en G.

5) Justifier que les triangles DEG et BGC sont semblables en précisant le rapport de similitude. En déduire la position du centre de gravité sur chaque médiane.