## 2. Le théorème de Pythagore et ses généralisations

**Pré-requis** : égalité et similitude de triangles.

**Objectif** : L'objectif de ce TD est de démontrer de manière *élémentaire* le **théorème de Pythagore** au moyen de la « méthode des aires » employée par Euclide dans *Les Éléments* ainsi que deux de ses généralisations : la proposition VI.31 des *Éléments* d'Euclide qui considère des figures semblables quelconques construites sur les côtés du triangle rectangle et le théorème du parallélogramme.

**Exercice 5 (Le théorème de « Pythagore »)**

On se propose de démontrer le théorème de Pythagore en utilisant la méthode euclidienne des aires[1].

Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$. On trace les carrés $ABFG$, $BDEC$ et $ACKH$ et la parallèle à $(CE)$ passant par $A$ qui coupe $[DE]$ en $L$.

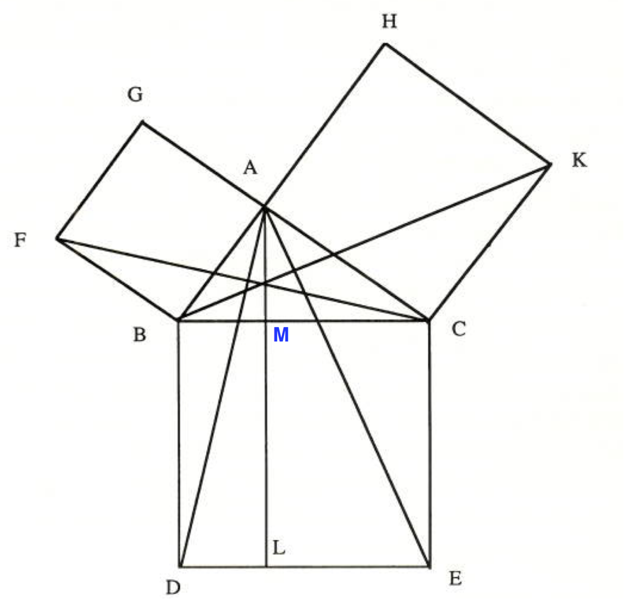


Figure 6. Le théorème de Pythagore démontré par les aires

1) Justifier que les triangles $ACE$ et $BCK$ sont égaux.
2) Démontrer que $aire(ACKH) = aire(MLEC)$.
3) Conclure.

   On considère à présent la hauteur $[AM]$ du triangle $ABC$.

4) Justifier que les triangles $ABM$, $ACM$ et $ABC$ sont semblables et proposer une nouvelle démonstration du théorème de Pythagore.

1. Euclide démontre le théorème de Pythagore puis sa réciproque dans les propositions I.47 et I.48 des *Éléments*.

On considère à présent la proposition réciproque du théorème de Pythagore. Euclide emploie la construction suivante :

*Construction.* Soit $ABC$ un triangle vérifiant $BC^2 = AB^2 + AC^2$. À partir du point $A$, on mène la demi-droite perpendiculaire à la droite $(AC)$ [dans le demi-plan ne contenant pas $B$] ; on place sur cette demi-droite le point $D$ tel que $AD = AB$, et on joint $D$ à $C$.

5) Proposer une démonstration en vous appuyant sur cette construction et en utilisant le théorème de Pythagore.

**Exercice 6 (Une généralisation du théorème de Pythagore)**

Dans cet exercice, on va étudier la généralisation du théorème de Pythagore qui est donnée par Euclide dans la proposition 31 du Livre VI :

*Proposition (Eléments VI.31).* Dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale en aire aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrites.

Autrement dit, si l'on note $\mathsf{Fig}_{BC}$ *l'aire de* la figure construite sur $BC$ [2], on a :

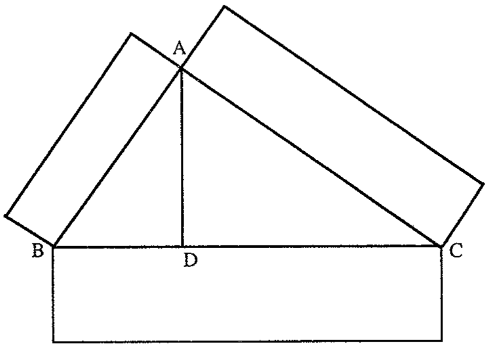


FIGURE 7. $\mathsf{Fig}_{BC} = \mathsf{Fig}_{AB} + \mathsf{Fig}_{AC}$

On trace la hauteur $[AD]$ du triangle $ABC$.

1) En vous appuyant sur la similitude des triangles, justifier que

$$\frac{CB}{AB} = \frac{AB}{DB} \quad \text{et} \quad \frac{CB}{CA} = \frac{CA}{CD}.$$

2) En déduire que

$$\frac{\mathsf{Fig}_{BC}}{\mathsf{Fig}_{AB}} = \frac{CB}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{\mathsf{Fig}_{BC}}{\mathsf{Fig}_{AC}} = \frac{CB}{CD}.$$

3) Conclure.

2. Euclide ne distingue pas dans ses notations une figure et son aire.

4) Construire un triangle équilatéral dont l'aire est égale à la somme des aires des deux triangles équilatéraux donnés : $\triangle = \triangle_1 + \triangle_2$

5) Construire un cercle dont l'aire est égale à la somme des aires de deux cercles donnés : $\bigcirc = \bigcirc_1 + \bigcirc_2$.

**Exercice 7 (Le théorème du parallélogramme)**

On se propose à présent de démontrer le théorème suivant :

*Théorème.* Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

On considère le parallélogramme $ABCD$ (voir figure 8) : soient $H$ et $K$ les pieds des hauteurs des triangles $ABC$ et $BCD$ issues de $C$ et $B$.

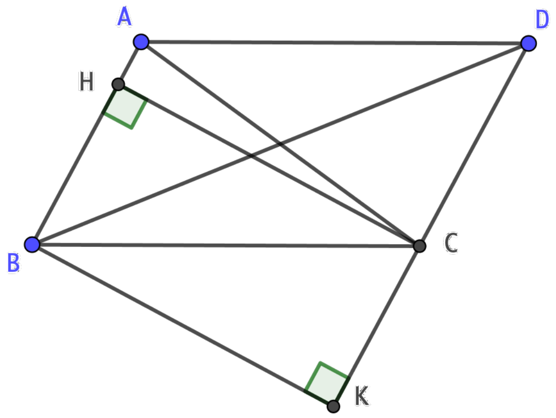


Figure 8. Le théorème du parallélogramme

1) Justifier que $BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2CD \cdot CK$.
2) En déduire le théorème du parallélogramme.