4. Applications du théorème de Thalès : théorèmes de Ceva, Menelaüs et Pappus

Pré-requis : Lemme des proportions, théorème de Thalès.
Objectif : L'objectif de ce TD est d'établir quelques théorèmes classiques de géométrie affine (Ceva, Menelaüs, Pappus) qu'on peut déduire du théorème de Thalès.

Exercice 12 (Le lemme du chevron) Soit ABC un triangle et O un point du plan à l'intérieur du triangle. On suppose que la droite (AO) coupe (BC) en A'.

Démontrer que

$$\frac{aire(AOB)}{aire(AOC)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

On a en effet d'après le lemme des proportions :

$$\frac{aire(AA'B)}{aire(AA'C)} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{aire(OA'B)}{aire(OA'C)}$$

d'où, par « soustraction »

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{aire(OAB)}{aire(OAC)}.$$

En effet, il est facile de vérifier que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ *lorsque* $b \neq d$.

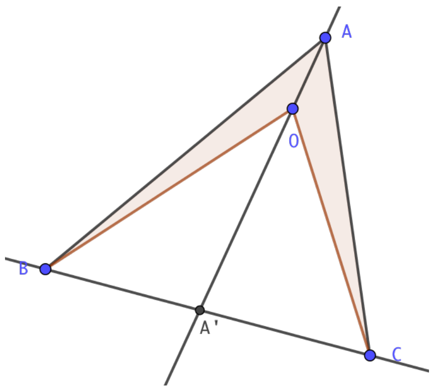

Figure 23. Lemme du chevron : O est à l'intérieur du triangle

Ce nouveau lemme, corollaire du lemme des proportions, qu'on a démontré dans l'un des cas de figure possible, est nommé par Perrin « lemme du chevron » :

Lemme (Lemme du chevron). Soient ABC un triangle et O un point quelconque du plan distinct de A. On suppose que la droite (AO) coupe (BC) en A'. Alors on a :

$$\frac{aire(AOB)}{aire(AOC)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Nous l'emploierons dans la suite.

Remarque. Voici un autre cas de figure où le raisonnement est le même à ceci près qu'on remplace la « soustraction » par une « addition ».

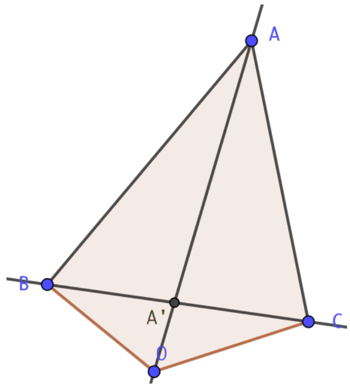

FIGURE 24. Lemme du chevron : un autre cas de figure

Exercice 13 (Relations de Gergonne et Ceva)
Soient ABC un triangle et O un point intérieur au triangle. On suppose que les droites (AO), (BO), (CO) coupent les côtés du triangle en A', B', C'.

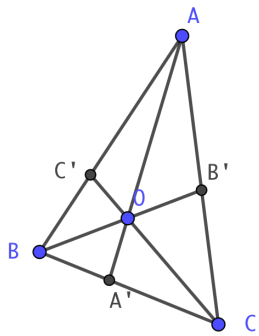

FIGURE 25. Relations de Gergonne et de Ceva

1) Démontrer à l'aide du lemme des proportions que

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{aire(OBC)}{aire(ABC)}.$$

On a d'après le lemme des proportions :

$$\frac{aire(OA'B)}{aire(AA'B)} = \frac{OA'}{AA'} = \frac{aire(OA'C)}{aire(AA'C)}$$

d'où, par « addition »

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{aire(OA'B) + aire(OA'C)}{aire(AA'B) + aire(AA'C)} = \frac{aire(OBC)}{aire(ABC)}.$$

En effet, il est facile de vérifier que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.

2) En déduire la relation suivante (dite de **Gergonne**) :

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

On obtient des relations analogues avec les deux autres rapports.
La formule demandée résulte alors de l'égalité

$$aire(ABC) = aire(OBC) + aire(OCA) + aire(OAB).$$

3) Démontrer la relation suivante (dite de **Ceva**) à l'aide du lemme du chevron :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Comme les trois rapports sont négatifs, il suffit de démontrer le résultat en valeur absolue, i.e. *pour les rapports de* longueurs.
D'après le lemme du chevron appliqué au triangle ABC et au point O, on a :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{aire(OAB)}{aire(OAC)}.$$

On déduit de même que

$$\frac{aire(COB)}{aire(AOB)} = \frac{B'C}{B'A} \quad et \quad \frac{aire(AOC)}{aire(BOC)} = \frac{C'A}{C'B}.$$

d'où le résultat, en multipliant les trois rapports et en simplifiant.

Exercice 14 (Théorème de Menelaüs)

Soit ABC un triangle. Une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par A, B, C coupe respectivement les droites (BC), (CA), (AB) en A', B', C'.

1) Démontrer la relation suivante (dite de **Menelaüs**) :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

On se place dans le cas de figure où la sécante $\mathcal{D}$ coupe les deux côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Dans le cas de figure considéré, le premier rapport est positif et les deux autres sont négatifs, il suffit donc de démontrer le résultat en valeur absolue, i.e. *pour les rapports de* longueurs.

a) en utilisant le théorème de Thalès. On pourra tracer la parallèle au côté $[AB]$ passant par C qui coupe $\mathcal{D}$ en C''.

Traçons la parallèle au côté $[AB]$ passant par C qui coupe $\mathcal{D}$ en C''.

En appliquant le théorème de Thalès au triangle $A'CC''$, on obtient :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BC'}{CC''}.$$

En appliquant le théorème de Thalès au « papillon » de sommet B', on obtient :

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CC''}{C'A}.$$

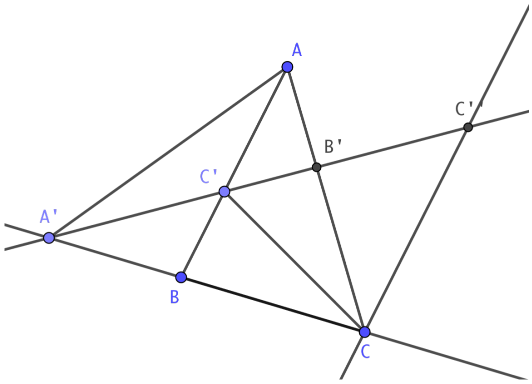

FIGURE 26. Le théorème de Menelaüs : démonstration au moyen du théorème de Thalès

Le produit des deux égalités donne

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} = \frac{BC'}{\cancel{CC''}} \times \frac{\cancel{CC''}}{C'A}$$

d'où le résultat.

b) en raisonnant avec des rapports d'aire.

On a d'après le lemme des proportions

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{aire(C'A'B)}{aire(C'A'C)} \quad et \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{aire(A'C'A)}{aire(A'C'B)}.$$

d'où

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{C'A}{C'B} = \frac{\cancel{aire(C'A'B)}}{aire(C'A'C)} \times \frac{aire(A'C'A)}{\cancel{aire(A'C'B)}} = \frac{aire(A'C'A)}{aire(C'A'C)}.$$

Pour démontrer la relation de Menelaüs, il suffit donc d'établir l'égalité

$$\frac{aire(C'A'A)}{aire(C'A'C)} = \frac{B'A}{B'C}$$

qu'on déduit du lemme du chevron *appliqué au point C' dans le triangle $A'AC$.*

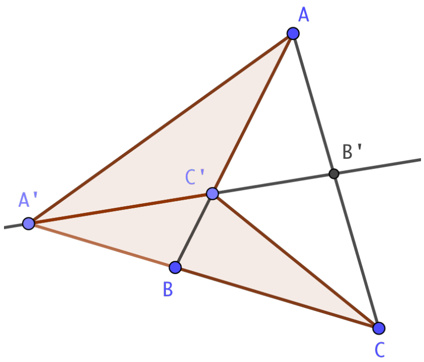

FIGURE 27. Le théorème de Menelaüs : démonstration au moyen du lemme du chevron

2) La réciproque du théorème de Menelaüs est-elle vraie pour les *longueurs* ?

On suppose donc qu'on a l'égalité

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

et l'on veut montrer que les points A', B', C' sont alignés. Si l'on prend pour A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, la relation est clairement vérifiée pour les longueurs (mais pas pour les mesures algébriques).

La réciproque est donc fausse pour les longueurs, sans hypothèse supplémentaire, mais on peut démontrer qu'elle est vraie pour les mesures algébriques.

3) Déduire de la relation de Menelaüs la relation de Ceva.

On pourra appliquer le théorème de Menelaüs au triangle ABA' avec la transversale (CC') et au triangle ACA' avec la transversale (BB').

En appliquant le théorème de Menelaüs au triangle ABA' avec la transversale (CC'), on obtient

$$\frac{C'A}{C'B} \times \frac{CB}{CA'} \times \frac{OA'}{OA} = 1.$$

De même, en appliquant le théorème de Menelaüs au triangle ACA' avec la transversale (BB'), on obtient

$$\frac{B'C}{B'A} \times \frac{OA}{OA'} \times \frac{BA'}{BC} = 1.$$

On obtient l'identité de Ceva en multipliant les deux égalités puis en simplifiant.

Exercice 15 (Théorème de Pappus)

Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en O et soient A, B, C (resp. C', B', A') trois points de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) distincts de O. On suppose que les droites (AB') et (BA') sont parallèles, ainsi que (AC') et (CA').

1) Faire la construction.

Voir figure 28.

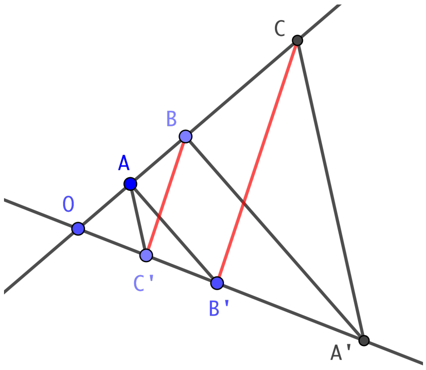

FIGURE 28. Le théorème de Pappus

2) Démontrer que les droites (BC') et (CB') sont parallèles (on pourra utiliser la réciproque du théorème de Thalès).

Les droites (AB') et (BA') sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès au triangle $OA'B$, on obtient

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Les droites (AC') et (CA') sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès au triangle $OA'C$, on obtient

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OA'}{OC'}.$$

En multipliant et en simplifiant, on déduit

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OC'}{OB'}.$$

Les points O, A, C (resp. O, B', A') sont alignés et dans le même ordre, *on déduit d'après la réciproque du théorème de Thalès que les droites (BC') et (CB') sont parallèles.*