4. Applications du théorème de Thalès : théorèmes de Ceva, Menelaüs et Pappus

Pré-requis : Lemme des proportions, théorème de Thalès.
Objectif : L'objectif de ce TD est d'établir quelques théorèmes classiques de géométrie affine (Ceva, Menelaüs, Pappus) qu'on peut déduire du théorème de Thalès.

Exercice 12 (Le lemme du chevron) Soit ABC un triangle et O un point du plan à l'intérieur du triangle. On suppose que la droite (AO) coupe (BC) en A'.
Démontrer que

$$\frac{aire(AOB)}{aire(AOC)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Exercice 13 (Relations de Gergonne et Ceva)

Soient ABC un triangle et O un point intérieur au triangle. On suppose que les droites (AO), (BO), (CO) coupent les côtés du triangle en A', B', C'.

1) Démontrer à l'aide du lemme des proportions que

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{aire(OBC)}{aire(ABC)}.$$

2) En déduire la relation suivante (dite de **Gergonne**) :

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

3) Démontrer la relation suivante (dite de **Ceva**) à l'aide du lemme du chevron :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 14 (Théorème de Menelaüs)

Soit ABC un triangle. Une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par A, B, C coupe respectivement les droites (BC), (CA), (AB) en A', B', C'.

1) Démontrer la relation suivante (dite de **Menelaüs**) :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

On se place dans le cas de figure où la sécante $\mathcal{D}$ coupe les deux côtés $[AB]$ et $[AC]$.

   a) en utilisant le théorème de Thalès. On pourra tracer la parallèle au côté $[AB]$ passant par C qui coupe $\mathcal{D}$ en C''.
   b) en raisonnant avec des rapports d'aire.

2) La réciproque du théorème de Menelaüs est-elle vraie pour les *longueurs* ?

3) Déduire de la relation de Menelaüs la relation de Ceva.
   On pourra appliquer le théorème de Menelaüs au triangle ABA' avec la transversale (CC') et au triangle ACA' avec la transversale (BB').

Exercice 15 (Théorème de Pappus)

Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en O et soient A, B, C (resp. C', B', A') trois points de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) distincts de O. On suppose que les droites (AB') et (BA') sont parallèles, ainsi que (AC') et (CA').

1) Faire la construction.
2) Démontrer que les droites (BC') et (CB') sont parallèles (on pourra utiliser la réciproque du théorème de Thalès).