5. Axiomes d'ordre

Pré-requis : axiomes d'ordre, séparation du plan par une droite en deux demi-plans, séparation d'une droite par un point en deux demi-droites, théorème de la transversale.

On se place dans un plan vérifiant les axiomes d'incidence et les axiomes d'ordre.

Axiome 4. *Si $A * B * C$, alors A, B, C sont trois points distincts alignés et $C * B * A$.*

Axiome 5. *Étant donnés deux points A et B, il existe un point C tel que $A * B * C$.*

Axiome 6. *Étant donnés trois points d'une droite, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres.*

Axiome 7 (Pasch). *Soient A, B et C trois points non alignés et $\cdot$ une droite qui ne contient aucun de ces points. Si $\cdot$ contient un point D entre A et B, alors soit elle contient un point entre A et C, soit elle contient un point entre B et C.*

Proposition 6 (Théorème de la transversale). *Soient $\widehat{BAC}$ un angle et D un point à l'intérieur de cet angle. Alors la demi-droite $[AD)$ rencontre le segment $[BC]$.*

Objectif : L'objectif de ce TD est de manipuler les axiomes d'ordre pour obtenir des premiers résultats « naturels », *i.e.* conforme à notre intuition de l'espace, sur les segments et les triangles. On démontrera enfin le théorème de la transversale vu en cours.

Exercice 16

1) Soient A, B, C, D quatre points alignés. Démontrer que
$$A * B * C \text{ et } B * C * D \implies B \in [AD] \text{ et } C \in [AD].$$

$A * B * C$ signifie que A et C sont de part et d'autre de B.
$B * C * D$ signifie que C et D sont du même côté de B.
Mais alors, d'après le corollaire de la demi-droite, par transitivité, A et D sont de part et d'autre de B, ce qui signifie $A * B * D$ c'est-à-dire $B \in [AD]$.
On raisonne de la même manière pour établir que que $A * C * D$ i.e. *$C \in [AD]$.*

2) On suppose qu'on a $A * B * C$ et $A * D * E$. Démontrer que le segment $[BE]$ rencontre le segment $[CD]$ en un point M.

On se place dans le triangle ABE et on considère la droite (DC) : elle ne contient aucun des points A, B ou E. Le point D est entre A et E.
On peut donc appliquer l'axiome 7 de Pasch : la droite (DE) contient donc soit un point entre A et B, soit un point entre B et E.
La première éventualité doit être rejetée car (DC) coupe déjà (AB) en C et on a $A * B * C$.
On en déduit que la droite (DC) rencontre le segment $[BE]$ en un point M.
En raisonnant de la même manière avec la droite (BE) et le triangle ACD, on en déduit que la droite (BE) rencontre le segment $[DC]$ en un point.

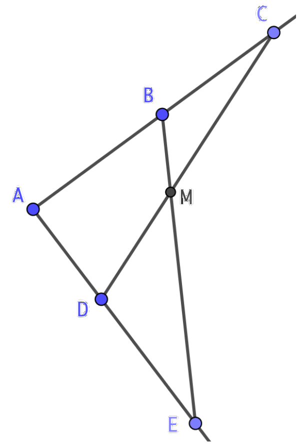

FIGURE 29. ($A * B * C$ et $A * D * E$) implique $[BE]$ rencontre $[CD]$

Deux droites, distinctes, se coupant en au plus un point, il s'agit bien du même point M.
Finalement, le segment $[DC]$ rencontre bien le segment $[BE]$.

Exercice 17 (Segments) On se donne deux points distincts du plan A et B.

1) Démontrer qu'il n'existe pas $C, D \in [AB]$ tel que $C * A * D$ en utilisant le corollaire de la demi-droite.

   Supposons qu'il existe $C, D \in [AB]$ tel que $C * A * D$.
   $C \in [AB]$ signifie $A * C * B$. C et B sont donc situés du même côté par rapport à A.
   $D \in [AB]$ signifie $A * D * B$. D et B sont donc situés du même côté par rapport à A
   Mais alors, d'après le corollaire de la demi-droite, C et D sont situés du même côté par rapport au point A sur la droite (AB) (ils sont tous deux situés sur la demi-droite $[AB)$), ce qui contredit $C * A * D$.

2) En déduire que les extrémités A, B du segment $[AB]$ sont déterminées de manière unique.

   Supposons qu'on a $[AB] = [CD]$ avec $(C, D) \neq (A, B), (B, A)$.
   On a en particulier $C, D \in [AB]$ et $A \in [CD]$ soit, si $A \neq C, D$, $C * A * D$.
   Or cela est impossible d'après la question précédente.

3) Démontrer que le segment $[AB]$ contient **au moins** un point F situé entre A et B (et donc distinct de A et B) en utilisant les axiomes d'incidence et d'ordre et en vous aidant de la figure 30.

   Il existe un point C qui n'appartient pas à (AB) (axiome 3) et un point D sur (AC) tel que $A * C * D$ (axiome 5).
   Il existe E sur (DB) tel que $D * B * E$ (axiome 5).
   Plaçons-nous dans le triangle ADB.
   La droite (CE) ne contient ni le point A ni le point D car elle coupe déjà la droite (AD) en C. Elle ne contient pas non plus le point B car elle contiendrait alors le point D.

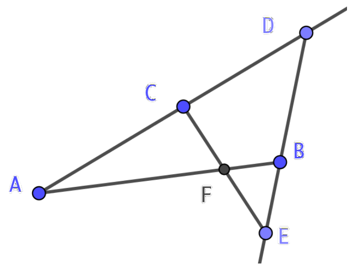

FIGURE 30. L'intérieur d'un segment est non vide

La droite (CE) coupe le segment $[AD]$ en C et ne coupe pas le segment $[BD]$.
D'après l'axiome 7 de Pasch, la droite (CE) doit donc couper nécessairement le segment $[AB]$ en un point F.

Remarque. On en déduit donc que l'intérieur d'un segment est non vide et on peut démontrer, à la suite, qu'un segment contient une infinité de points (mais le raisonnement est fastidieux du fait de la prise en compte de l'ordre des points sur le segment).

Exercice 18 (triangles) On considère un triangle ABC.

1) En utilisant la question 3 de l'exercice 17 et en vous aidant de la figure 31, démontrer que l'intérieur du triangle ABC est non vide.

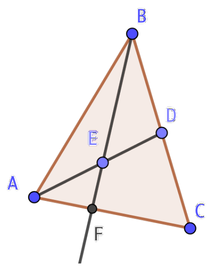

FIGURE 31. L'intérieur d'un triangle est non vide

D'après la la question 3 de l'exercice 17, il existe $D \in [BC]$ et $E \in [AD]$.
Le segment $[ED]$ ne rencontre pas la droite (AB) car la droite (ED) rencontre (AB) en A, donc E et D sont du même côté de (AB).
Le segment $[CD]$ ne rencontre pas la droite (AB) donc C et D sont du même côté de (AB).
Finalement, E est situé dans le demi-plan délimité par la droite (AB) contenant C.
Pour les mêmes raisons, E est situé dans le demi-plan délimité par la droite (AC) contenant B.
Enfin, le segment $[EA]$ ne rencontre pas (BC) car la droite (EA) rencontre (BC) en D : E est donc situé dans le demi-plan délimité par la droite (BC) contenant A.
On en déduit finalement que le point E appartient à l'intérieur du triangle ABC.

2) Justifier que l'intérieur du triangle ABC est *convexe*.

L'intérieur du triangle ABC est l'intersection de trois demi-plans qui sont convexes par définition, il est donc convexe.

3) On suppose qu'une droite Δ contient un point E à l'intérieur du triangle ABC. Démontrer que la droite Δ rencontre au moins un côté du triangle ABC.

D'après le théorème de la transversale, la demi-droite $[BE)$ rencontre le segment $[AC]$ en un point F.

— *Si $\Delta = (BE)$, c'est terminé.*

— *Sinon, on se place dans le triangle BFC et on applique l'axiome 7 de Pasch. La droite Δ contient le point E entre B et F, elle contient donc un point de $[FC]$ ou de $[BC]$.*

Exercice 19 (Théorème de la transversale)

Soit E le point tel que $E * A * C$ (axiome 5).

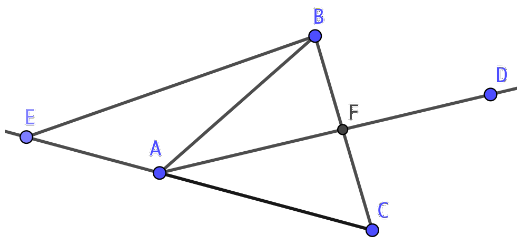

FIGURE 32. Le théorème de la transversale : démonstration

1) Justifier que la droite (AD) ne contient aucun des points B, E, C.

Comme (AD) rencontre déjà (AB) en A, elle ne peut pas contenir le point B, sinon les droites (AB) et (AD) coïncideraient et D appartiendrait à (AB), ce qui contredit D à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$.

Remarque. Le même raisonnement s'applique aux deux autres points.

2) Justifier que tous les points de $[BE]$, à l'exception de B, sont situés de l'autre côté de C par rapport à (AB).

Le segment $[BE]$ coupe (AB) au seul point B. Sinon, on aurait $(BE) = (AB)$, et $E * A * C$ impliquerait A, B, C alignés, ce qui est impossible.

Donc tous les points du segment $[EB]$, à l'exception de B, sont situés du même côté de (AB).

D'autre part, $E * A * C$ implique que E et C sont situés de part et d'autre de (AB).

On en déduit que tous les points de $[BE]$ à l'exception de B, sont situés de l'autre côté de C par rapport à (AB).

3) Justifier que tous les points de $[AD)$, à l'exception de A, sont situés du même côté que C par rapport à (AB).

Comme D est à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$, tous les points de $[AD)$, à l'exception de A, sont situés du même côté que C par rapport à (AB).

4) Que peut-on en conclure ?

On conclut des questions 2 et 3 que la demi-droite $[AD)$ ne rencontre pas le segment $[BE]$.

Remarque. Par un raisonnement similaire[8], on montrerait que tous les points de $[BE]$, à l'exception de E, sont du même côté que B par rapport à (AB), et donc du côté opposé à celui de C par rapport à (AB). Ce qui montre que $[BE]$ ne rencontre pas la demi-droite « opposée » à $[AD)$.

On admet que la droite (AD) ne rencontre pas le segment $[EB]$

5) En déduire que la droite (AD) rencontre le segment $[BC]$ en un point F.

La droite (AD) ne contient aucun des points B, E, C. Elle rencontre par construction de E le segment $[EC]$ en A et ne rencontre pas le segment $[EB]$. On déduit de l'axiome 7 de Pasch que la droite (AD) rencontre nécessairement le segment $[BC]$ en un point F.

6) Conclure la démonstration du théorème.

Il reste à montrer que F appartient à $[AD)$ (et pas seulement à (AD)). Or, le fait que B et F, ainsi que B et D, soient du même côté par rapport à (AC), implique que F et D sont du même côté par rapport à (AC), d'où F et D sont du même côté, par rapport à A sur (AD), autrement dit F appartient à $[AD)$.

8. Pour une démonstration complète, voir [Hartshorne(2000), p. 78].