5. Axiomes d'ordre

Pré-requis : axiomes d'ordre, séparation du plan par une droite en deux demi-plans, séparation d'une droite par un point en deux demi-droites, théorème de la transversale.

On se place dans un plan vérifiant les axiomes d'incidence et les axiomes d'ordre.

Axiome 4. *Si $A * B * C$, alors A, B, C sont trois points distincts alignés et $C * B * A$.*

Axiome 5. *Étant donnés deux points A et B, il existe un point C tel que $A * B * C$.*

Axiome 6. *Étant donnés trois points d'une droite, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres.*

Axiome 7 (Pasch). *Soient A, B et C trois points non alignés et $\cdot$ une droite qui ne contient aucun de ces points. Si $\cdot$ contient un point D entre A et B, alors soit elle contient un point entre A et C, soit elle contient un point entre B et C.*

Proposition 6 (Théorème de la transversale). *Soient $\widehat{BAC}$ un angle et D un point à l'intérieur de cet angle. Alors la demi-droite $[AD)$ rencontre le segment $[BC]$.*

Objectif : L'objectif de ce TD est de manipuler les axiomes d'ordre pour obtenir des premiers résultats « naturels », *i.e.* conforme à notre intuition de l'espace, sur les segments et les triangles. On démontrera enfin le théorème de la transversale vu en cours.

Exercice 16

1) Soient A, B, C, D quatre points alignés. Démontrer que
$$A * B * C \text{ et } B * C * D \implies B \in [AD] \text{ et } C \in [AD].$$
2) On suppose qu'on a $A * B * C$ et $A * D * E$. Démontrer que le segment $[BE]$ rencontre le segment $[CD]$ en un point M.

Exercice 17 (Segments) On se donne deux points distincts du plan A et B.

1) Démontrer qu'il n'existe pas $C, D \in [AB]$ tel que $C * A * D$ en utilisant le corollaire de la demi-droite.
2) En déduire que les extrémités A, B du segment $[AB]$ sont déterminées de manière unique.
3) Démontrer que le segment $[AB]$ contient **au moins** un point F situé entre A et B (et donc distinct de A et B) en utilisant les axiomes d'incidence et d'ordre et en vous aidant de la figure 10.

Exercice 18 (triangles) On considère un triangle ABC.

1) En utilisant la question 3 de l'exercice 17 et en vous aidant de la figure 11, démontrer que l'intérieur du triangle ABC est non vide.
2) Justifier que l'intérieur du triangle ABC est *convexe*.
3) On suppose qu'une droite Δ contient un point E à l'intérieur du triangle ABC. Démontrer que la droite Δ rencontre au moins un côté du triangle ABC.

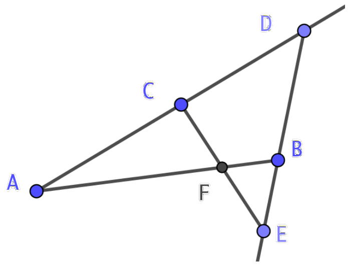

FIGURE 10. L'intérieur d'un segment est non vide

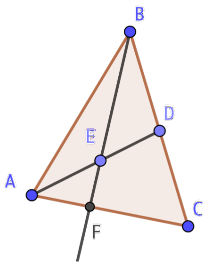

FIGURE 11. L'intérieur d'un triangle est non vide

Exercice 19 (Théorème de la transversale)

Soit E le point tel que $E * A * C$ (axiome 5).

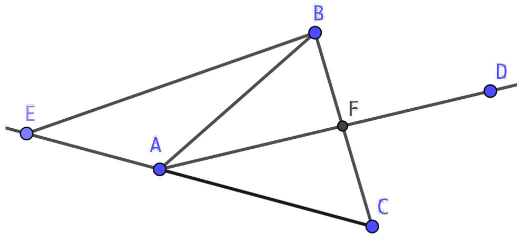

FIGURE 12. Le théorème de la transversale : démonstration

1) Justifier que la droite (AD) ne contient aucun des points B, E, C.
2) Justifier que tous les points de $[BE]$, à l'exception de B, sont situés de l'autre côté de C par rapport à (AB).
3) Justifier que tous les points de $[AD)$, à l'exception de A, sont situés du même côté que C par rapport à (AB).
4) Que peut-on en conclure ?
   On admet que la droite (AD) ne rencontre pas le segment $[EB]$
5) En déduire que la droite (AD) rencontre le segment $[BC]$ en un point F.
6) Conclure la démonstration du théorème.