Université Paul Sabatier
L3E – Aléatoire 1 Année 2019–2020

TD – Feuille 1 : Espaces de probabilité

---

1 Univers, évènements

Exercice 1 Soit Ω l'ensemble des couples mariés homme/femme d'une ville donnée. On considère les événements A : "l'homme a plus de 40 ans", B : "la femme est plus jeune que l'homme" et C : "la femme a plus de 40 ans".

1. Interpréter en fonction de A, B, C l'événement "le mari a plus de 40 ans mais pas sa femme".
2. Vérifier que $A \cap C^c \subset B$.
3. Décrire en langage ordinaire les événements $A \cap B \cap C^c$, $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap B^c \cap C$, $A \cup B$.

Exercice 2 Soit 3 événements E, F, G auxquels on associe les deux événements

$$A = (E \cup F) \cap G \qquad B = E \cup (F \cap G).$$

1. Parmi les événements A et B, lequel entraîne l'autre ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur E et G pour que l'on ait $A = B$.

2 Probabilités, combinatoire élémentaire

Exercice 3 Soit E un ensemble de cardinal n et A un sous-ensemble de E de cardinal k. On choisit au hasard un sous-ensemble de E (avec probabilité uniforme sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E). Déterminer les probabilités des événements suivants :

1. il est inclus dans A ;
2. il est disjoint de A ;
3. ce sous-ensemble contient A.

Exercice 4

1. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On en retire toutes les boules une à une, et au hasard. Quelle est la probabilité p_n d'extraire alternativement une boule blanche, une boule noire, une boule blanche, une boule noire et ainsi de suite ?
2. Calculer la probabilité q_n d'obtenir cette configuration en faisant un tirage de 2n boules dans cette même urne, avec remise après chaque tirage.
3. Montrer que q_n/p_n tend vers zéro.

Exercice 5 On jette n dés. On sait qu'un des dés a amené 1. Quelle est la probabilité qu'on ait obtenu deux 1 ou plus ?

3 Probabilités conditionnelles, indépendance

Exercice 6 On considère l'expérience suivante : on fait deux lancers successifs avec une pièce non-équilibrée, qui tombe sur face avec probabilité p et sur pile avec probabilité $q = 1 - p$. Pour quelles valeurs de p les évènements "le premier lancer donne face" et "les deux lancers donnent le même résultat" sont-ils indépendants l'un de l'autre ? On donnera un argument heuristique et un calcul rigoureux.

Exercice 7 Trois familles composées de deux parents et de deux enfants sont réunies. Une des familles a deux garçons, une autre deux filles et la 3ème un garçon et une fille. On tire au hasard l'une des famille puis l'un des enfants : c'est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?

Exercice 8 Devant un certain "tableau clinique", on estime qu'une personne a 6 chances sur 10 d'être atteinte d'une maladie. On effectue alors deux tests biologiques, dont, dont les résultats sur une personne donnée sont supposés être indépendants. **Sur une personne malade**, le premier est positif à 70% et le deuxième à 90%. De même, **sur un non-malade**, le premier est positif à 20% et le deuxième à 30%.

1. Quelle est la probabilité conditionnelle que le deuxième test soit positif si le premier l'a été ? (On pourra construire un arbre pour envisager les différents cas et leurs probabilités.)
2. Les résultats des deux tests sur un ensemble de patients sont-ils indépendants ?

4 Exercices supplémentaires

Exercice 9 Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit la différence symétrique de deux événements A et B de $\mathcal{A}$ par $A\Delta B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Montrer que :

1. la fonction $(A, B) \mapsto d(A, B) := \mathrm{P}(A\Delta B)$ est une semi-distance sur $\mathcal{A}$, à savoir que les propriétés sont celles d'une distance sauf la suivante : si $A = B$, alors $\mathrm{P}(A\Delta B) = 0$ mais la réciproque n'est pas vraie. Par quelle(s) relation(s) peut-on la remplacer ?
2. Montrer que pour tous A, B dans $\mathcal{A}$ on a $|\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)| \leqslant \mathrm{P}(A\Delta B)$.

Exercice 10 Une urne U_1 contient p boules rouges et q boules noires. Une urne U_2 contient q boules rouges et p boules noires. On effectue une suite de tirages d'une boule, soit dans U_1, soit dans U_2, avec les règles suivantes :

— Si à un tirage on a obtenu une boule rouge, le tirage suivant s'effectue dans U_1. Sinon, le tirage suivant se fait dans U_2.

— Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne d'où elle provient.

Le premier tirage se fait dans U_1. On note A_n l'événement "la $n$ième boule tirée est rouge".

1. Calculer $\mathrm{P}(A_n|A_{n-1})$ et $\mathrm{P}(A_n|\overline{A_{n-1}})$.
2. En déduite $\mathrm{P}(A_n)$ en fonction de $\mathrm{P}(A_{n-1})$.
3. Calculer alors $\mathrm{P}(A_n)$ en fonction de n et la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Exercice 11 Une urne contient 2 boules, chacune ayant une probabilité p d'être blanche et une probabilité $(1-p)$ d'être noire. On effectue dans cette urne une succession de n tirages d'une boule avec remise. Si les n tirages ont amené une boule blanche, quelle est la probabilité p_n que l'urne contienne 2 boules blanches ? Déterminer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Exercice 12 Jordi et Miryam passent ensemble un examen noté sur A, B, C. On sait que la probabilité d'avoir B est de 3/10 pour Jordi et de 4/10 pour Miryam. On sait de plus que la probabilité que l'un des deux ait B sans qu'aucun n'ait A est de 1/10. On note F l'évènement où l'un des deux a B mais aucun n'a C, calculer $\mathbb{P}(F)$.