Partie 1 : Combinatoire

Feuille 1 : dénombrements

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est un carré parfait (i. e., le carré d'un entier) si, et seulement si, n admet un nombre impair de diviseurs.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et α_n le nombre maximal de parties de $[n]$ qui ont, deux à deux, une intersection non vide.

1. Déterminer α_2 et α_3.
2. Montrer que $\alpha_n = 2^{n-1}$.

Exercice 3 : Soit E un ensemble de cardinal $n > 0$. Si A et B sont des sous-ensembles de E tels que $A \cup B = E$, on dira que la paire $\{A, B\} \subset \mathscr{P}(E)$ est un *recouvrement* de E et que le couple $(A, B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$ est un *recouvrement ordonné* de E. Le but de cet exercice est de compter le nombre de recouvrements de E.

1. Soit X un sous-ensemble de E de cardinal k.

a) On considère l'ensemble $\mathscr{E}_X$ formés des recouvrements ordonnés (A, B) de E tels que $A \cap B = X$. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathscr{E}_X$ et $\mathscr{P}(E \setminus X)$.

b) Combien existe-t-il de recouvrements ordonnés (A, B) de E tels que $A \cap B = X$?

2. Combien existe-t-il de recouvrements ordonnés (A, B) de E tels que $A \cap B$ soit de cardinal k ?
3. En déduire le nombre de recouvrements ordonnés de E.
4. Combien E admet-il de recouvrements ?

Exercice 4 : 1. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot BAOBAB ? Et du mot MISSISSIPI ?

2. Un mot est une suite de lettres. On comptera le mot « vide » comme un mot sans lettre.

a) Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot FACULTÉ ? Et en utilisant uniquement les cinq lettres de BAZAR ?

3. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet à n lettres.

a) Soit k entier avec $k \leq n$. Combien de mots de k lettres et sans répétition de lettre peut-on former à partir de l'alphabet $\mathcal{A}$?

b) Montrer que le nombre de mots *sans répétition de lettre* que l'on peut former avec l'alphabet $\mathcal{A}$ est égal à $E(e.n!)$ (où $E(x)$ est la partie entière de x).

Exercice 5 : 1. Justifier que $A_n^m A_{n-m}^{p-m} = A_m^p$. On le justifiera d'abord sans faire de calculs avant de le vérifier en appliquant les formules.

2. Vérifier par le calcul les propriétés qui suivent :

i) $\binom{l}{k} = \binom{l}{l-k}$ *ii)* $\binom{l+1}{k} = \binom{l}{k-1} + \binom{l}{k}$ (identité de Pascal) *iii)* $k\binom{l}{k} = l\binom{l-1}{k-1}$

3. Prouver les égalités (avec $m \leq n$) :

i) $1 + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \ldots + 2^{n-1}\binom{n}{n-1} + 2^n = 3^n$ *ii)* $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m}$

iii) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ *iv)* $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$

Exercice 6 : 1. On considère le quadrillage du plan dont $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est l'ensemble des sommets (ou croisements). Quel est le nombre de plus courts chemins du sommet $(0,0)$ au sommet (p,q) (cf. Figure 1) ?

2. En déduire que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ (avec l'aide de la Figure 2).

3. Montrer que $\displaystyle\binom{p+q}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{p+k-1}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{q+k-1}{p}$ (avec l'aide de la Figure 3).

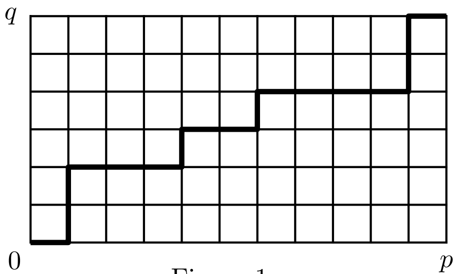


Figure 1

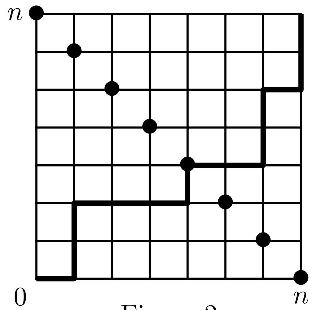


Figure 2

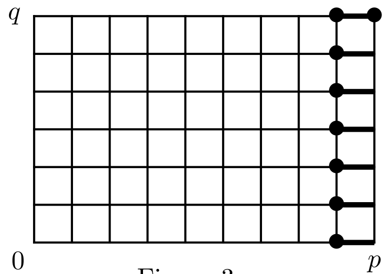
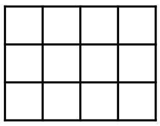
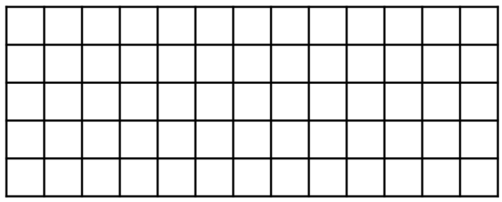


Figure 3

Exercice 7 : 1. Calculer le nombre de rectangles (avec côtés horizontaux ou verticaux) que l'on peut voir dans chacune des figures suivantes :


rectangle 3×4


rectangle 5×13

2. Même question si on donne un rectangle $p \times q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : 1. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro ?

2. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants (un enfant peut ne rien recevoir) ?

3. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins deux euros ?

4. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k garçons et l filles de sorte que chaque fille ait au moins un euro ?

On suppose dans chaque cas que les répartitions demandées sont possibles (i.e. que n est assez grand...).

Exercice 9 : Vrai ou Faux ? (avec $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n > k$) (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

VF 1. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro est égal au nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments.

VF 2. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro est égal au nombre de k-uplets $(a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$.

VF 3. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants est égal au nombre de k-uplets $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$.

VF 4. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants est égal au nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 10 : Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère $X = \{1, 2, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$, $Y = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = Y^X$, l'ensemble des applications de X dans Y. On considère également les sous-ensembles de $\mathcal{A}$:
   $U = \{f \in \mathcal{A}\,;\ f \text{ est injective}\}$
   $V = \{f \in \mathcal{A}\,;\ f \text{ est croissante (au sens large)}\}$
   $W = \{f \in \mathcal{A}\,;\ f \text{ est strictement croissante}\}$
   Reportez-vous au cours pour donner les valeurs de $|\mathcal{A}|$, $|U|$, $|V|$ et $|W|$.
2. Une urne contient n boules distinctes et on veut sélectionner k boules. Cette sélection peut se faire de quatre manières différentes (avec ou sans remise de la boule qui vient d'être tirée, en tenant compte ou non de l'ordre dans lequel les k boules ont été sélectionnées). Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le nombre de sélections possibles.

	avec ordre	sans ordre
avec remise		
sans remise		

Exercice 11 : 1. Quel est le nombre de parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ de cardinal k et ne contenant pas deux entiers consécutifs ?

2. On considère un polygone convexe à n sommets. De combien de manières peut-on sélectionner k sommets de ce polygone de sorte que deux sommets consécutifs ne soient pas dans la sélection (des sommets A et B sont dits *consécutifs* si le segment $[AB]$ est une arête du polygone).

Exercice 12 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite qui est donnée à partir d'une autre suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par la formule

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_i$$

1. Montrer qu'on a alors $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{n-k}$ (le passage de u_n à v_n est appelé *inversion de Pascal*).
2. En déduire la formule

$$d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

où $d(n)$ est le nombre de dérangements (ou permutations sans point fixe) d'un ensemble à n éléments.