

## TD1 : Intégration sur un intervalle compact

### 1 Aire du disque, volume de la sphère, longueur du cercle

#### 1.1 L'aire du disque

Soit  $R > 0$ . On considère

$$D_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Calculer l'aire de  $D_R$  (à l'aide du calcul intégral).

#### 1.2 Le volume de la sphère

Soit  $R > 0$ . On considère

$$B_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

- a) Soit  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixé. Calculer l'aire  $S(z_0)$  de l'intersection de  $B_R$  avec le plan d'équation  $z = z_0$ .  
b) À l'aide de la formule

$$V(B_R) = \int_{-R}^R S(z) dz,$$

calculer le volume  $V(B_R)$  de  $B_R$ .

#### 1.3 La longueur du cercle

Soit  $R > 0$ . On considère

$$C_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Calculer la longueur de  $C_R$  (à l'aide du calcul intégral) :

— montrer que

$$(x, y) \in C_R \implies \exists \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} ;$$

cela permet de paramétrer le cercle ;

— utiliser la formule donnant la longueur d'une courbe paramétrée  $\gamma$  : quand  $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$  pour  $\theta \in [a, b]$ ,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta.$$

## 2 Sur l'aire et la longueur d'une ellipse

Pour  $a, b > 0$ , on considère

$$E_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

et

$$D_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

### 2.1 L'aire contenue dans l'ellipse

Calculer l'aire de  $D_{a,b}$  (à l'aide du calcul intégral).

### 2.2 La longueur de l'ellipse

Montrer que

$$(x, y) \in E_{a,b} \implies \exists \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} ;$$

cela permet de paramétrer l'ellipse.

En déduire que la longueur de  $E_{a,b}$  est donnée par :

$$L_{a,b} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

On notera

$$f(a, b, \theta) := \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \quad g(a, b, \theta) := a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

### 2.3 L'ellipse la plus courte ?

Soit  $\mathcal{A} > 0$ . On s'intéresse à toutes les ellipses pour lesquelles l'aire contenue est égale à  $\mathcal{A}$ . On se demande s'il en existe-t-il une qui a un périmètre plus petit que toutes les autres (et si oui, laquelle?). Il sera utile d'introduire  $R$  tel que

$$\mathcal{A} = \pi R^2.$$

- Donner l'expression de la longueur  $\ell(a)$  d'une telle ellipse.
- Soit  $\theta \in [0, 2\pi]$ . On considère la fonction

$$h_\theta : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_\theta(a) = f\left(a, \frac{R^2}{a}, \theta\right) = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + \frac{R^4}{a^2} \cos^2 \theta}.$$

Montrer que  $h_\theta$  vérifie :

$$\forall a > 0, \quad h_\theta''(a) \geq 0.$$

(Ainsi  $h_\theta$  est convexe.)

- En déduire que

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall a > 0, \quad h_\theta(a) \geq h_\theta(R) + (a - R)h_\theta'(R).$$

- En déduire que

$$\ell(a) \geq \ell(R) + (a - R) \int_0^{2\pi} h_\theta'(R) d\theta.$$

- Calculer cette dernière intégrale.
- Quelle est la réponse à la question de départ : existe-t-il une ellipse qui a un périmètre plus petit que toutes les autres (et si oui, laquelle?)
- Quel serait l'équivalent dans l'espace usuel de dimension 3?

### 3 La longueur d'une famille de morceaux de paraboles

Pour une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$  de classe  $C^1$ , on rappelle que sa longueur est donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Pour  $s \geq 0$ , on considère

$$f_s : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_s(x) := s(1 - x^2).$$

- a) Dessiner la courbe représentative  $\mathcal{C}_s$  de  $f_s$ .
- b) Donner la formule pour la longueur de  $\mathcal{C}_s$ , et la calculer.
- c) Quelle est la courbe  $\mathcal{C}_s$  la plus courte?

### 4 Calcul de l'intégrale de la gaussienne grâce à un paramètre

Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

- a) Montrer que  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Calculer  $f'(x), g'(x)$ , et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2f'(x)f(x).$$

- c) En déduire que la fonction  $g + f^2$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Que vaut cette constante?
- d) Déterminer la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $f(x)$  et de  $g(x)$ .

### 5 Calcul de dérivée avec paramètre dans les bornes et à l'intérieur

Soient  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On considère

$$F(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt.$$

Montrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  et calculer  $F'(x)$ .

Application :

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \ln(x^2 + t^2) dt.$$

## 6 Quelques calculs

### 6.1 Calculs de primitives

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + a^2}, \quad \int_0^\pi \cos x \cos 2x \, dx.$$

### 6.2 Par intégration par parties

Calculer

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx, \quad \int_0^1 \ln(x^2 + 1) \, dx.$$

### 6.3 Par changement de variables

Calculer

$$\int_0^4 e^{-\sqrt{x}} \, dx, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

### 6.4 Intégration des fractions rationnelles

On considère

$$I := \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4}, \quad J := \int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5}.$$

Dans chacun des cas, décomposer la fraction rationnelle en éléments simples, déterminer une primitive de chaque élément simple, et en déduire la valeur de chacune des intégrales.

### 6.5 Intégration des fractions rationnelles en cos et sin

On veut calculer

$$\int \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes.

#### 6.5.1 Les règles de Bioche

Elles permettent de transformer l'intégrale à calculer en l'intégrale d'une vraie fraction rationnelle. Il y a 4 formules :

- si l'expression  $\frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta$  est invariante en changeant  $\theta$  par  $-\theta$ , on définit  $x = \cos \theta$  ;
- si l'expression  $\frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta$  est invariante en changeant  $\theta$  par  $\pi - \theta$ , on définit  $x = \sin \theta$  ;
- si l'expression  $\frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta$  est invariante en changeant  $\theta$  par  $\pi + \theta$ , on définit  $x = \tan \theta$  ;
- si rien ne marche, on définit  $x = \tan(\theta/2)$ .

Pour vérifier que au moins la dernière fonctionne toujours, exprimer  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  et  $d\theta$  en fonction de  $x$ , et vérifier que l'intégrale obtenue est bien celle d'une fraction rationnelle en  $x$ .

#### 6.5.2 Exemple

Calculer

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}.$$