L3 ESR INTÉGRATION 2017-18

TD 1 : ALGÈBRES, TRIBUS

Exercice 1.

1) Montrer que $[0, 1)$ *n'est pas dénombrable.*

2) Mqu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

3) Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *n'est pas dénombrable.*

4) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dénombrable.*

5) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dont l'ensemble des points de discontinuité est non dénombrable.*

Exercice 2. *Soit* A, B, C *des parties d'un ensemble* X*. On note*

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Calculer $A\Delta\emptyset$*,* $A\Delta X$*,* $A\Delta A$ *et établir les formules suivantes:*

1) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

3) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Exercice 3. *Soit* $X = \{a, b, c\}$ *un ensemble à trois éléments. Décrire toutes les algèbres sur* X*.*

Exercice 4. *Soit* X *un ensemble non-vide*

1) Montrer qu'une intersection d'algèbres sur X *est une algèbre.*

2) Est-ce qu'une union de deux algèbres sur X *est une algèbre ?*

3) Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *une famille non-vide de parties de* X*. Soit*

$$\alpha(\mathcal{E}) = \bigcap\{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X),\ \mathcal{A} \text{ algèbre contenant } \mathcal{E}\}$$

l'intersection de toutes les algèbres qui contiennent $\mathcal{E}$*. Montrer que* $\alpha(\mathcal{E})$ *est une algèbre, la plus petite qui contienne* $\mathcal{E}$*.*

4) Montrer que $\alpha(\mathcal{E}) \subset \alpha(\mathcal{E}')$ *si* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ *et* $\alpha(\alpha(\mathcal{E})) = \alpha(\mathcal{E})$.

Exercice 5. *Soit* E *une partie non vide d'un ensemble* X*.*

1) Déterminer l'algèbre engendrée par $\{E\}$.

2) Déterminer l'algèbre engendrée par $\{E^c\}$.

3) Déterminer l'algèbre engendrée par $\{A \subset X;\ E \subset A\}$.

Exercice 6. *Soit X un ensemble.*

1) L'ensemble des parties finies de X est-il une tribu ?

2) On suppose X infini. Montrer que

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{P}(X);\ E \text{ fini ou } E^c \text{ fini}\}$$

est une algèbre qui n'est pas une tribu.

3) On suppose X infini. Montrer que

$$\mathcal{A}' = \{E \in \mathcal{P}(X);\ E \text{ ou } E^c \text{ fini ou dénombrable}\}$$

est la tribu $\tau(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.

Exercice 7.

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que Ω est une union dénombrable de produits d'intervalles ouvert $]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$.

2) Montrer que la tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 8. *Soit X, Y deux ensembles non vides, $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ et $(B_j)_{j\in J} \in \mathcal{P}(Y)$, et soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que*

1) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$.

2) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$ avec égalité si f est injective.

3) $f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}(\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

4) $X \setminus f^{-1}(B_7) = f^{-1}(Y \setminus B_7)$.

Exercice 9. *Soit X, Y deux ensembles non vides, $\mathcal{B}$ une tribu sur Y et soit $f : X \to Y$ une application.*

1) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B);\ B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X.

2) Montrer par un contre-exemple que l'image directe $f(\mathcal{A})$ d'une tribu sur X n'est pas nécessairement une tribu sur Y.

Exercice 10. *Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par chacune des familles suivantes :*

1) La famille des intervalles ouverts bornés.

2) La famille des intervalles de la forme $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$.

3) La famille des intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

4) La famille des intervalles de la forme $]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

5) La famille des intervalles de la forme $[a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$.