Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III) **Année universitaire**
Département de mathématiques – L3 ESR **2017-2018**
U.E. Analyse Numérique

Feuille de TD 1 : Analyse numérique matricielle

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer si M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser le cas échéant.

Exercice 2. Soient $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(1;0;1), (1;2;1)$ et $(0;-1;2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Après s'être assuré que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, l'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 3. (Méthode de Gauss)
Résoudre les systèmes linéaires suivants avec la méthode du pivot de Gauss.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6/5 \\ 3x-2y-z & = & 0 \\ 2x+y+\frac{6}{5}z & = & -9/5 \end{array} \right.$.

2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x+2y+z+w & = & 0 \\ x-y+w & = & 1 \\ 2x-3y+w & = & 4 \end{array} \right.$.

3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-2z & = & 1 \\ x+z & = & 0 \\ -2x+y-z & = & -3 \end{array} \right.$.

Exercice 4. (Exemple de perturbation)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 10,1 \\ 6,9 \end{pmatrix}.$$

Résoudree les équations $AX = Y_1$ et $AX = Y_2$.

Exercice 5. (Normes matricielles subordonnées)
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,N\}} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1. On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|$.
2. On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_1$. Montrer que $\|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\dots,N\}} \sum_{i=1}^N |a_{i,j}|$.
3. On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_2$. Montrer que $\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 6. (Propriétés générales du conditionnement I)
On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme, notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée associée, notée aussi $\|\cdot\|$. Pour une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $\mathrm{cond}(A) \geqslant 1$.
2. Montrer que $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles. Montrer que $\mathrm{cond}(AB) \leqslant \mathrm{cond}(A)\mathrm{cond}(B)$.

Exercice 7. (Propriétés générales du conditionnement II)
On suppose que $\mathbb{R}^N$ est muni de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite, notée aussi $\|\cdot\|_2$. On note alors $\mathrm{cond}_2(A)$ le conditionnement d'une matrice A inversible.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note σ_N (resp. σ_1) la plus grande (resp. petite) valeur propre de A^tA (noter que A^tA est une matrice symétrique définie positive). Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \sqrt{\sigma_N/\sigma_1}$.
2. On suppose maintenant que A est symétrique définie positive, montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \lambda_N/\lambda_1$ où λ_N (resp. λ_1) est la plus grande (resp. petite) valeur propre de A.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale (c'est-à-dire $Q^t = Q^{-1}$).
4. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(R)$.
5. Soit $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A + B) \leqslant \max\{\mathrm{cond}_2(A), \mathrm{cond}_2(B)\}$.