Exercices de topologie.

Exercice 1 Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à 2 éléments (resp. 3) et dire si elles sont séparées ou non.

Exercice 2 Soit E un ensemble. Quelles conditions doivent vérifier deux parties A et B de E pour que $\{\emptyset, A, B, E\}$ soit (l'ensemble des ouverts d')une topologie sur E ?

Exercice 3 Une topologie non usuelle sur $\mathbb{R}$:
Soit $\mathcal{T} = \{]-x; x[\mid x \in [0; +1]\}$.
a. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un singleton $\{a\}$ puis d'un segment $[a; b]$.

Exercice 4 Espace topologique tel que les singletons sont ouverts.
Soit X un ensemble. Combien y-a-t'il de topologies sur X telles que tous les singletons $\{x\}$, $x \in X$, soient des ouverts ?

Exercice 5 Topologie sur $\mathbb{R}^2$ dont les ouverts sont les boules centrées à l'origine.
Montrer que la famille des boules $B(0; r) := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$ pour $r \in [0; +\infty]$ forme une topologie sur $\mathbb{R}^2$.
Cette topologie est-elle séparée ? Est-elle plus ou moins
fine que la topologie usuelle ?

Exercice 6 Topologie des complémentaires de parties finies.
Soit X un ensemble. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire
fini (i.e. $C \in \mathcal{C}_0 \iff X \setminus C$ est fini), et $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_0$ et de l'ensemble vide.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X. Cette topologie est-elle séparée ?

Exercice 7 Soit $(X,)$ un espace topologique, $M, N \subset X$ et$\{M_i\}_{i\in I}$ un ensemble des sous-ensembles de X.
(a) Si $M \subset N$, comparer $\overline{M}$ et $\overline{N}$.
Comparer les ensembles suivants avec des inclusions ou des égalités. Donner un contre-exemple lorsqu'il n'y a pas égalité :
(b) $\overline{M \cup N}$ et $\overline{M} \cup \overline{N}$
(c) $\overline{\bigcup_{i\in I} M_i}$ et $\bigcup_{i\in I} \overline{M_i}$
(d) $\overline{M \cap N}$ et $\overline{M} \cap \overline{N}$
(e) $\overline{\bigcap_{i\in I} M_i}$ et $\bigcap_{i\in I} \overline{M_i}$
(f) $\overline{M} \setminus \overline{N}$ et $\overline{M \setminus N}$.

Exercice 8 Adhérence relative.
Soient X un espace topologique et Y une partie de X. Pour tout $A \subset Y$, notons $\overline{A}$ l'adhérence de A dans X et $\overline{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y (muni de la topologie induite). Montrer que $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$.

Exercice 9 Pour un espace topologique X et $M \subset X$, montrer que M est ouvert si et seulement si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $x \in U \subset M$.

Exercice 10 (**)On définit une topologie sur $\mathbb{Z}$ (appelée la topologie des entiers uniformément espacés) comme suit :

$$U \subset \mathbb{Z} \text{ est ouvert } \iff U \text{ est une réunion d'ensembles de la forme } a\mathbb{Z}+b \text{ où} a,b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

et où $a\mathbb{Z}+b = \{ax+b \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que
(a) c'est vraiment une topologie sur $\mathbb{Z}$;
(b) les $a\mathbb{Z}+b$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$ sont fermés et ouverts (clopen en anglais) ;
(c) $\mathbb{Z} \setminus \{1\} = \bigcup_{p \text{premier}} (p\mathbb{Z}+0)$.
En notant qu'un ensemble non vide et fini $U \subset \mathbb{Z}$ n'est pas ouvert, montrer qu'il y a une infinité des nombres premiers.

Exercice 11 (***) Considérer $X := \mathbb{R} \sqcup \{*\}$ la réunion disjointe de $\mathbb{R}$ et d'un singleton $\{*\}$. Poser $\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{X \setminus M \mid M \subset \mathbb{R} \text{ fini }\}$.
(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie.
(b) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ engendrée par $\mathcal{B}$ n'est pas métrisable, i.e. il n'y a aucune métrique d sur X telle que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathrm{T}_d$.
Indication : On pourra utiliser que pour tout $y \in Y$ l' ensemble
$V(y) := \{N \subset Y \mid \text{ il existe } V \subset Y \text{ ouvert tel que } y \in V \subset N\}$ des voisinages de y dans un espace métrisable admet une base dénombrable.

Exercice 12 Droite réelle avec un point double.
On considère l'ensemble E obtenue comme union disjointe de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et de deux points notés 0_A et 0_B. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E de la forme :
- soit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $0 < \varepsilon < |x|$,
- soit $\{0_A\} \cup (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\setminus \{0\})$ pour $\varepsilon > 0$,
- soit $\{0_B\} \cup (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\setminus \{0\})$ pour $\varepsilon > 0$

Montrer que $\mathcal{B}$ forme la base d'une topologie. Montrer que cette topologie ne peut être métrisable.

Exercice 13 On considère le sous ensemble $X = \{-1,1\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite. Décrire les ouverts de X.
On considère le quotient $E = X/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par

$$(x,y) \sim (x',y') \iff (x=0, x'=0, y=y') \text{ ou } (x \neq 0, x'=x, |y|=|y'|).$$

Décrire les classes d'équivalences. Décrire les ouverts de E pour la topologie quotient.