TD1

1. Justifier la définition de mesure image et démontrer le théorème de transfert.

2. On suppose qu'en jouant au tennis A a indépendamment des autres points la probabilté p de gagner un point contre B.
   Calculer la probabilité qu'a A de gagner un jeu une fois arrivé à égalité (40/40).

3. Exemple de deux dés X et Y.
   Montrer que la famille $(X+Y=9)$, (X pair), (Y impair) n'est pas indépendante, mais que ces événements sont indépendants deux à deux.

4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
   $X \sim \exp(1)$, c'est-à-dire que sa loi est de densité $f(x) = e^{-x} 1_{x \geq 0}$.
   $Y \sim$ poisson(1), c'est-à-dire que sa loi est discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathrm{P}(Y = n) = \dfrac{e^{-1}}{n!}$.
   (a) Vérifier que ce sont bien deux lois de probabilité.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(X \geq Y)$.

5. Montrer que si deux événements A et B sont indépendants alors A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants.

6. Montrer que si
   $$\forall k, \left(X_k \leq \frac{1}{k^2} \text{ p.s.} \right)$$
   alors
   $$\sum^{\infty} X_k \text{ converge p.s.}$$