TD1

1. Soit X une application mesurable $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (E, \mathcal{B})$.
On définit la mesure image μ^X sur $(E, \mathcal{B})$ par $\mu^X(B) = \mu(X^{-1}(B))$
Justifier que c'est bien une mesure.

2. Avec les notations de l'exercice précédent, pour ϕ mesurable $(E, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
on appelle théorème de transfert $\int_\Omega \phi \circ X \, \mathrm{d}\mu = \int_E \phi \, \mathrm{d}\mu^X$. Le démontrer :
   (a) Pour ϕ étagée.
   (b) Pour $\phi \geq 0$ et les intégrales dans $[0, +\infty]$.
   (c) au sens où les intégrabilités sont équivalentes et les intégrales égales quand elles existent, dans le cas général.

3. On modélise le jet de deux dés avec les notations précédentes par
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mu(A) = \#A/36$.
Le premier dé sera la variable aléatoire $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$.
   (a) Quelle la mesure image μ^X ?
   (b) Expliciter les deux intégrales du théorème de transfert.

4. Dorénavant on note $\mu = \mathrm{P}$ qui sera une probabilité car $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
On appelle P^X la loi de X et X est une variable aléatoire car elle est mesurable.
Enfin l'intégrale du théorème de transfert est $\mathrm{E}(\phi(X))$.
   (a) Montrer que P^X est une probabilité.
   (b) Soit $X \sim \exp(\lambda)$, c'est-à-dire que X est réelle : $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
   et P^X admet une densité $f^X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
   Vérifier que ce P^X est bien une probabilité et calculer $\mathrm{E}(X)$.
   (c) Soit $X = (U, V)$ où U et V sont réelles, c'est-à-dire que $E = \mathbb{R}^2$ et $X(\omega) = (U(\omega), V(\omega))$.
   On suppose que U et V sont deux normales centrées réduites indépendantes, c'est-à-dire que $\mathrm{P}^X = \mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathcal{N}(0, 1)$ où $\mathcal{N}(0, 1)$ admet la densité $f(u) = e^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}$.
   Montrer que pour toute fonction réelle ψ mesurable bornée,
   $$\mathrm{E}\left(\psi\left(\frac{U}{V}\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \frac{1}{\pi(1 + y^2)} \, \mathrm{d}y.$$
   Que dire de U/V ? de $\mathrm{E}(U/V)$?
   (d) Soit $X = (Y, N)$ où Y et N sont réelles indépendantes, $Y \sim \exp(1)$
   et $N \sim \text{poisson}(1)$, c'est-à-dire que $\mathrm{P}^N = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta_k$.
   Calculer $\mathrm{P}(Y \geq N) = \mathrm{E}(1_{Y \geq N})$.