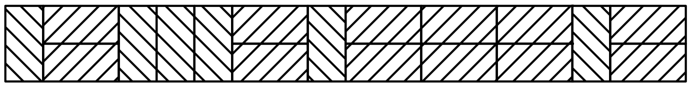
Partie 1 : Combinatoire

Feuille 2 : Formules explicites (ou formules fermées)

Exercice 1 : Trouver une formule *fermée* (ou formule *close*) pour la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ et les conditions initiales $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 4$.

Exercice 2 : De combien de manières peut-on recouvrir (sans superposition) un rectangle $2 \times n$ avec des dominos (ou rectangles 2×1) ?

Exemple de recouvrement pour $n = 18$:



Exercice 3 : De combien de manières peut-on colorier les cases d'un rectangle $1 \times n$ en vert ou en rouge de sorte qu'il n'y ait pas deux cases consécutives coloriées en rouge ?

Coloriage valide ($n = 11$) :

V	V	R	V	R	V	R	V	V	V	R

Coloriage non valide ($n = 11$) :

V	V	V	R	V	V	R	R	V	R	V

Exercice 4 : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{2}\big((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\big)$ est entier.

Exercice 5 : 1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Trouver une formule explicite pour le terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ 2-périodique et vérifiant $a_0 = a$ et $a_1 = b$.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Trouver une formule explicite pour le terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ 3-périodique et vérifiant $a_0 = a$, $a_1 = b$ et $a_2 = c$.

Exercice 6 : On se donne la fonction génératrice $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ que l'on notera également $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$.

1. Quelle est la fonction génératrice de $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$?
2. Quelle est la fonction génératrice de $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots)$?
3. Quelle est la fonction génératrice de $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \ldots)$?
4. Quelle est la fonction génératrice de $(a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_3, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, \ldots)$?
5. a) Quelle est la fonction génératrice de $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$?

b) Quelle est la fonction génératrice de $(2^n)_{n\geq 0}$?

c) Quelle est la fonction génératrice de $(2^{\lfloor n/2 \rfloor})_{n\geq 0}$?

Exercice 7 : Trouver la fonction génératrice de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_{n+1} = 4a_n - 100$ et $a_0 = 50$.

Exercice 8 : Trouver une formule explicite pour le terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^{n+1}$, $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$.

Exercice 9 : Soit k un entier strictement positif

1. a) Trouver la fonction génératrice de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ où a_n est le nombre de manières de distribuer n balles à k joueurs.

b) En déduire que

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i\right)^2 = \sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)x^i \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i\right)^3 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)(i+2)x^i$$

2. a) Trouver la fonction génératrice de la suite $(b_n)_{n\geq k}$ où b_n est le nombre de manières de distribuer n balles à k joueurs de sorte que chaque joueur ait au moins une balle.

b) En déduire l'expression de $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} x^i\right)^2$ et $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} x^i\right)^3$.

c) retrouver le résultat de la question 1.b.

Exercice 10 : 1. De combien de manières peut-on distribuer les dix carrés d'une tablette de chocolat à trois enfants de sorte que chacun d'eux ait au moins deux carrés et au plus quatre ?

2. Trouver une formule explicite pour x_n, le nombre de manières de faire un panier de n fruits composé de poires et d'oranges sachant que les oranges vont par lots de deux.

Exercice 11 : Trouver le nombre de triplets d'entiers (u, v, w) qui vérifient les conditions $u + v + w = 6$, $-1 \leq u \leq 2$ et $1 \leq b, c \leq 4$.

Exercice 12 : Soit $c = (c_n)_{n\geq 1}$, la suite définie par

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \ldots + c_{n-1}c_0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_ic_{n-1-i} \ \text{ pour } n \geq 1$$

et soit $C(X)$ la fonction génératrice associée à c.

1. Montrer que $C(X) = 1 + XC(X)^2$.
2. En déduire que, pour $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ces nombres sont appelés *nombres de Catalan*.

Exercice 13 : De combien de façons peut-on découper un polygone convexe à n côtés en triangles de sorte que les côtés des triangles sont des diagonales du polygone ou des arêtes du polygone et aucune de ces diagonales ne se coupent ; par exemple, pour $n = 5$: