Université Paul Sabatier Année 2019-2020
L3 E (Mathématiques pour l'enseignement) Algèbre 1

Exercices du chap. 2 : Ensembles et relations

Exercice 1. Pour tout ensemble X, vérifier que $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ et que $x \in X \Leftrightarrow \{x\} \subset X$.

Exercice 2. 1. Vrai ou faux ? a) $\varnothing \subset \varnothing$ b) $\varnothing \in \varnothing$ c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ d) $\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing)$
2. Décrire les éléments de $\mathcal{P}(\varnothing)$ et de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$.

Exercice 3. Vrai ou faux ? (justifier la réponse !)
1. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ 2. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 4. $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

Exercice 4. Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer :
1. $A \cup B \subset A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$; 2. $B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n le sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$ formé des multiples de n.
1. Caractériser $A_3 \cap A_5$, $A_3 \cap A_6$, $A_4 \cap A_6$ et, plus généralement $A_n \cap A_m$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.
2. Caractériser $\bigcup_{p \in P} A_p$ et $\bigcap_{p \in P} A_p$, P désignant l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 6. On rappelle que pour tout ensemble X, $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ (l'ensemble des parties de X, muni de la différence symétrique) est un groupe abélien. En déduire que pour tous ensembles A, B, C, si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ alors $B = C$.

Exercice 7. (novembre 2014) Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer l'équivalence :

$$A \cap B = A \cap C \iff A\Delta(B \cup C) = (A\Delta B) \cup (A\Delta C)$$

Exercice 8. Soit E un ensemble de cardinal n. Combien existe-t-il sur E de relations binaires :
1. quelconques ? 2. réflexives ? 3. symétriques ?

Exercice 9. Il y a une erreur dans le raisonnement suivant :
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E, symétrique et transitive. Alors $\mathcal{R}$ est réflexive. En effet, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$ par symétrie et, par transitivité, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ impliquent que $x\mathcal{R}x$ (et $y\mathcal{R}y$ ...).
Quelle est l'erreur commise ?

Exercice 10. 1. Décrire l'ensemble quotient obtenu pour chacune des relations d'équivalence de la liste d'exemples du cours.
2. Les relations (X, Γ) suivantes sont-elles des relations d'équivalence ? Si oui, décrire alors les classes d'équivalence et l'ensemble quotient :
a) $X_1 = \mathbb{Z}$, $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \in 2\mathbb{Z}\}$
b) $X_2 = \mathbb{R}$, $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(2x) = \cos(2y)\}$
c) $X_3 = \mathbb{R}$, $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = x - y\}$
d) $X_4 = \mathbb{Z}$, $\Gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - y^2 \in 3\mathbb{Z}\}$
3. (novembre 2012) On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par : par $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si $(x + x', y^2 - y'^2) \in (2\mathbb{Z}) \times (3\mathbb{Z})$.
a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) On note $\overline{(x, y)}$ la classe d'équivalence du couple $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Décrire l'ensemble des classes d'équivalence et donner un représentant de chacune d'entre elles.

Exercice 11. (Extrait de l'examen de novembre 2017)
Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence et $f : F \to E$ une application. Montrer *élégamment* (au lieu de vérifier séparément les trois propriétés usuelles) que la relation $\mathcal{S}$ sur F définie par

$$x\mathcal{S}y \iff f(x)\mathcal{R}f(y)$$

est une relation d'équivalence.

Exercice 12. (Extrait de l'examen de juin 2018)
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Montrer que chaque $\mathcal{R}$-classe a au plus 3 éléments.
3) Pour préciser le résultat précédent, on pose

$$A_k := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la classe de } x \text{ a exactement } k \text{ éléments}\}.$$

Déterminer les ensembles A_3, A_2, A_1 et A_0 (il pourra éventuellement être utile de remarquer que $-1\ \mathcal{R}\ 2$).
4) Donner un exemple de partie X de $\mathbb{R}$ contenant exactement un élément de chaque classe.

Exercice 13. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\preccurlyeq$ par

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \iff (x \leq x' \text{ et } y \leq y')$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2. Le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ admet-il des majorants ? des éléments maximaux ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?
3. Mêmes questions pour le carré $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| \leq 1, 0 \leq |y| \leq 1\}$.

Exercice 14. (Extrait de l'examen de novembre 2015)
On considère la relation $\preceq$ définie sur $C = [0,1] \times [0,1]$ par

$$\forall\, (x,y), (x',y') \in C,\ (x,y)\ \preceq\ (x',y') \iff \Big(\big(x < x'\big) \text{ ou } \big(x = x' \text{ et } y \leq y'\big) \Big)$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. L'ensemble C admet-il des éléments maximaux ? et des éléments minimaux ?
3. Est-ce que que toute partie non vide de C admet un plus grand élément ?

Exercice 15. 1. On considère l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \mid\,)$.
a) Existe-t-il des éléments maximaux dans $\mathbb{N}$? Si oui, lesquels ? Existe-t-il des éléments minimaux ? Si oui, lesquels ?
b) Soit $S = \{2, 4, 6, 7, 15\} \subset \mathbb{N}$. S admet-il des majorants ? Une borne sup ? Un plus grand élément ? Des éléments maximaux ? S admet-il des minorants ? Une borne inf ? Un plus petit élément ? Des éléments minimaux ? Justifier la réponse.
2. Soit X un ensemble. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(X), \subset)$. Dans chacun des cas qui suivent, le sous-ensemble S de $\mathcal{P}(X)$ admet-il des majorants ? Une borne sup ? Un plus grand élément ? Des éléments maximaux ? S admet-il des minorants ? Une borne inf ? Un plus petit élément ? Des éléments minimaux ?
i) $S = \{\{1,2,3\}, \{3,4\}, \{6\}, \{1,4,6\}, \{1,6,8\}, \{2,4,6\}\}$ avec $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
ii) $S = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}$ avec $X = \{1,2,3,4\}$.

Exercice 16. (novembre 2013) On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$.
1. La famille $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ fini}\}$ admet-elle des éléments minimaux ? Un plus petit élément ? des éléments maximaux ? Un plus grand élément ? Si la réponse est oui, on indique quels sont les éléments répondant à la question.
2. Même question avec la famille $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{N} \mid \overline{A} \text{ fini}\}$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$).

Exercice 17. Est-il vrai qu'un ensemble bien ordonné possède la propriété de la borne supérieure ? (justifier la réponse !)

Exercice 18. (Extrait de l'examen de juin 2018)
On considère l'ensemble ordonné $(T, \leq) := (\mathcal{P}(X), \subset)$ (l'ensemble des parties de X, ordonné par l'inclusion), où X est un ensemble arbitraire. Montrer que dans T :
1) toute partie non vide S de T a une borne inférieure ;
2) la partie $S = \varnothing$ a également une borne inférieure.

Exercice 19. (Extrait de l'examen de novembre 2017)
On considère les parties d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$.
1) Montrer que la partie E a une borne supérieure si et seulement si E a un maximum.
2) Montrer que la partie $\varnothing$ a une borne supérieure si et seulement si E a un minimum.

3) On dit que $(E, \leq)$ est un *treillis complet* si dans E, toute partie a une borne supérieure. Montrer que le segment réel $[0, 1]$ (muni de l'ordre usuel) est un treillis complet.
4) Soit $(E, \leq)$ un treillis complet. Démontrer que chaque partie A de E admet aussi une borne inférieure. (Une piste : en notant B l'ensemble des minorants de A et β la borne supérieure de B, montrer que tout élément de A est supérieur ou égal à β).

Exercice 20. (Extrait de l'examen de novembre 2017)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension non nécessairement finie). On rappelle qu'une partie (non nécessairement finie) L de E est libre si aucun vecteur $\ell \in L$ n'est combinaison linéaire de vecteurs de $L \setminus \{\ell\}$. On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ des parties libres de E, ordonné par l'inclusion.
1) Démontrer formellement que $\varnothing \in \mathcal{L}$.
2) $(\mathcal{L}, \subset)$ a-t-il des éléments minimaux ? un élément minimum ?
3) $(\mathcal{L}, \subset)$ a-t-il des éléments maximaux ? un élément maximum ?

Exercice 21. 1. On considère, sur $\{1, 2, 3, 4\}$, la relation $\mathcal{R}$ de graphe $\{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4), (4, 1)\}$.
a) Donner le diagramme sagittal de cette relation.
b) Trouver la fermeture de $\mathcal{R}$ pour chacune des propriétés suivantes : réflexivité, symétrie, transitivité, et donner son diagramme sagittal.
2. Soit la relation dans $\mathbb{N}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $xy = 9$. Trouver la fermeture de $\mathcal{R}$ pour chacune des propriétés suivantes : réflexivité, symétrie, transitivité.
3. Mêmes questions avec la relation dans $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 15\}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $2x = 3y$.
4. Est-ce que toute propriété admet une fermeture ? (se poser la question avec l'antisymétrie).