L3 ESR INTÉGRATION 2017-18

TD 2 : MESURES, FONCTIONS MESURABLES

Exercice 1. *Soit X un ensemble non-vide et $a \in X$. Montrer que*

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases} \in \mathbb{R}^+$$

définit une mesure sur la σ-algèbre $\mathcal{P}(X)$ (la masse de Dirac au point a).

Exercice 2. *Soit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ définie par*

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} \text{ si } A \text{ est fini,} \\ \\ \infty \text{ si } A \text{ est infini.} \end{cases}$$

Montrer que si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, mais μ n'est pas une mesure sur $\mathcal{A}$.

Exercice 3. *On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue λ.*

1) Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il nécessairement borné ?

2) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq $\lambda(B) > 0$. Est-ce que B contient un ouvert non-vide?

3) Construire un ouvert dense $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que $\lambda(\Omega) = 7$.

Exercice 4. *On dit que deux nombres réels x, y sont "équivalents" et on note $x \equiv y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. On note $\bar{x}$ la classe d'équivalence de x,*

$$\bar{x} = \{y \in [0, 1] \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$$

et I l'ensemble des classes d'équivalence, c'est-à-dire $I = \{C_x \mid x \in [0, 1]\}$. En utilisant l'axiome du choix, on choisit un élément a_C dans chaque classe d'équivalence C et on pose $A = \{a_C \mid C \in I\}$.

1) Pour $t \in \mathbb{R}$ on considère le translaté $A_t = \{x + t \mid x \in A\}$. Montrer que $[0, 1] \subset \cup_{t \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} A_t \subset [-1, 2]$.

2) En déduire que A n'est pas Lebesgue mesurable.

Exercice 5. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ une application telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et pour tous les ensembles disjoints $A,\ B \in \mathcal{A}$,*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Montrer que μ est une mesure ssi pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ croissante ($A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n), on a $\mu\left(\cup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

Exercice 6. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $E_k \in \mathcal{A}$ tq $\sum_{k\geq 1} \mu(E_k) < +\infty$. Soit A l'ensemble des $x \in X$ qui appartiennent à une infinité de E_k.*

1) Montrer que A est mesurable, égal à $\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} E_k$.

2) En déduire que presque tout x n'appartient qu'à un nombre fini de E_k.

Exercice 7. *On enlève un intervalle ouvert $I_{1,1}$ de longueur 3^{-1} du centre de l'intervalle $[0, 1]$. Il reste deux intervalles fermés $J_{1,1}$ et $J_{1,2}$, chacun de longueur 3^{-1}. On enlève ensuite des intervalles ouverts $I_{2,1}$ et $I_{2,2}$ de longueur 3^{-2} du centre de $J_{1,1}$ et de $J_{1,2}$. Il reste 4 intervalles fermés $J_{2,1}$, $J_{2,2}$, $J_{2,3}$, $J_{2,4}$. On procède par récurrence: après la n^{eme} étape on se retrouve avec 2^n intervalles fermés disjoints $J_{n,1}, \dots, J_{n,2^n}$, chacun de longueur 3^{-n}. L'ensemble restant $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$. est l'ensemble triadique de Cantor.*

1) Montrer que $C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid x_n \in \{0, 2\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer qu'il existe une bijection $\varphi : C \to [0, 1]$.

2) Montrer que C est fermé, d'intérieur vide, et que $C' = C$ (C' désigne l'ensemble de points d'accumulation x de C).

3) Montrer que C est Borel mesurable et sa mesure de Lebesgue est nulle.

Exercice 8. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $A \in \mathbb{R}$. Montrer que la troncature*

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & si \quad f(x) < -A \\ f(x) & si \quad |f(x)| \leq A \\ +A & si \quad f(x) > +A \end{cases}$$

est une fonction mesurable.

Exercice 9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Mq l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. En déduire que f est borélienne.*

Exercice 10. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \geq 1)$ une suite de fonctions mesurables. On note $A = \{x \in X \mid (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ converge}\}$. Montrer que*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq k, \forall q \geq k,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \tfrac{1}{n}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p=k}^{\infty} \bigcap_{q=k}^{\infty} \left\{x \in X \mid |f_p(x) - f_q(x)| \leq \tfrac{1}{n}\right\}. \end{aligned}$$

En déduire que A est mesurable.

Exercice 11. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Mq f' est borélienne.*

Exercice 12. *On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ avec mesure complète. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable et soit $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction telle que $f = g$ presque partout. Montrer que g est mesurable.*

Montrer que le résultat est faux si la mesure est incomplète.